This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

H152.12

HARVARD UNIVERSITY.

Mineralogical Laboratory,

UNIVERSITY MUSEUM.

Gift of J. E. Wolff
23 June, 1898.

J. E. Wolff
Heidelberg
Baden

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE

19 788. — TYPOGRAPHIE A LAHURE
Rue de Fleurus, 9, à Paris

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE

GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE

PAR

M. ERNEST MALLARD

INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES MINES

TOME PREMIER

TEXTE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 49

1879

H152.12

HARVARD UNIVERSITY,
CAMBRIDGE,
MASS.
Dept. of Mineralogy & Petrography

1898 June 23
Gift of
J. E. Wolff

PRÉFACE

Depuis les admirables travaux d'Haüy, la Cristallographie a subi de profondes modifications. Haüy, plus naturaliste que géomètre, avait, avec une singulière sagacité, édifié la science découverte par son génie sur une hypothèse physique qui pouvait paraître hasardeuse. L'école allemande, dirigée par Weiss, par Rose, par Naumann, renonça complètement à l'hypothèse sur la forme des molécules, et ne vit plus dans les lois cristallographiques que des lois géométriques, dont elle renonçait d'ailleurs à chercher aucune explication rationnelle. Cette innovation eut un heureux résultat; la géométrie introduite en maîtresse dans la science y apporta avec elle ses théories et ses procédés; les calculs pénibles d'Haüy furent remplacés par des calculs élégants et rapides; les méthodes ingénieuses des zones, des projections stéréographique et gnomonique vinrent soulager l'esprit dans le débrouillement souvent difficile des cristaux complexes. Le livre de Miller, traduit en français par Sénarmont, reste dans son élégante concision, comme un monument

achevé de l'application, à la cristallographie, des méthodes de la géométrie.

Mais les cristaux ne sont pas des êtres géométriques ; la forme qui les caractérise n'est que l'expression figurée des propriétés les plus intimes de la matière qui les compose. C'est donc restreindre arbitrairement et stériliser la science que se borner à étudier les polyèdres cristallins, en s'interdisant, par une défiance exagérée de l'hypothèse, de chercher la signification physique du langage géométrique que nous parlent ces polyèdres. On ne voit même pas très bien quel but peut poursuivre le savant qui se borne à étudier la forme cristalline, en elle et pour elle, comme disent les philosophes allemands.

Cette manière de comprendre la science n'a jamais été celle des cristallographes de notre pays. Un élève direct d'Haüy, dont la science déplore la perte récente, Delafosse, sans abandonner la théorie féconde de son maître, sut la compléter heureusement et donner la véritable interprétation de l'hémiédrie. Mais c'est surtout à un savant auquel une mort prématurée n'a pas permis de rendre à la science tous les services qu'elle pouvait en attendre, à Bravais, que l'on doit la théorie définitive à mon sens, qui permet de faire de la science cristallographique une science rationnelle. Grâce à cette théorie, la cristallographie, sans abandonner les procédés précieux dont la géométrie l'a enrichie, peut prendre en quelque sorte une nouvelle vie en pénétrant, par la route la plus assurée, et sans qu'il en coûte rien à la méthode scientifique la plus rigoureuse, jusque dans le mystère de la structure intérieure des corps solides.

Bravais a exposé ses idées dans plusieurs mémoires publiés de 1848 à 1851 [1], les uns dans le *Journal de Mathématiques*

1. *Notes sur les polyèdres symétriques de la géométrie* (Journal de math., t. XIV). *Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique* (Journal de math., t. XIV). *Mémoire*

pures et appliquées de Liouville, les autres dans le *Journal de l'École polytechnique*. Ils ont été, en 1866, après la mort de l'auteur, recueillis et publiés en un volume sous le titre d'*Études cristallographiques*, par les soins d'Élie de Beaumont, qui témoignait sans doute ainsi sa reconnaissance à celui dont les études géométriques lui avaient suggéré l'idée de son réseau pentagonal.

Malgré les mérites de la rédaction, ces mémoires ont le tort d'être écrits avec tout l'appareil de théorèmes, de lemmes, de scolies et de corollaires qui paraît rebutant à beaucoup de lecteurs, et de contenir des développements dont l'intérêt est presque exclusivement géométrique.

De là une complication, plus apparente que réelle, mais à laquelle la théorie de Bravais doit sans doute d'être encore aujourd'hui fort ignorée, même dans notre pays. J'ai cru que, pour faire connaître, comme elle le mérite, cette belle théorie, qui n'est au reste que le développement et comme l'achèvement de celle d'Haüy, il était utile de la prendre pour base d'un exposé didactique complet de la science cristallographique. Tel est un des buts principaux que je me propose en publiant aujourd'hui la rédaction du cours que j'ai l'honneur de professer depuis plusieurs années à l'École des mines.

Ce n'est cependant pas le seul désir de contribuer à répandre les idées fécondes du savant dont la mémoire reste chère à tous ses élèves, qui m'a fait entreprendre la publication d'un nouveau *Traité de Cristallographie*. Il m'a semblé que les ouvrages, peu nombreux, qui ont été écrits sur ce sujet dans notre langue, ne

sur les systèmes formés par des points disposés régulièrement sur un plan ou dans l'espace (Journ. de l'Éc. Pol., 83e cahier). Présenté à l'Ac. des sc. le 11 décembre 1848.

Études cristallographique. (Journ. de l'Éc. Pol., 34e cahier). Prés. à l'Ac. des sc. le 26 février 1849 et le 24 février 1851.

répondent pas complètement aux besoins de l'enseignement. Si l'on excepte les leçons autographiées du cours professé à l'École normale par M. Des Cloizeaux, publiées à un nombre d'exemplaires des plus restreints, les élèves des cours de Minéralogie ou de Physique ne peuvent recourir, pour s'initier à la science des cristaux, qu'au traité de M. Delafosse ou à celui de M. Miller. Le premier, quoique excellent en beaucoup de points, me paraît cependant trop incomplet en ce qui regarde la partie géométrique et analytique; le second, au contraire, sacrifie trop à mon gré la partie descriptive et physique. J'ai donc cru qu'un traité où l'on s'efforcerait de ne tomber ni dans l'un ni dans l'autre de ces deux défauts pourrait avoir quelque utilité.

La forme géométrique des substances cristallisées n'est d'ailleurs qu'un des nombreux phénomènes au moyen desquels ces substances manifestent la structure intérieure et les actions mutuelles des molécules qui les composent. On est amené à chaque instant à compléter l'étude morphologique d'un cristal par l'étude de toutes les autres propriétés physiques qui le caractérisent, ou du moins de celles qui, ayant un rapport intime avec la structure intérieure du cristal, concourent avec la forme extérieure à nous la révéler. C'est ainsi qu'il n'est plus permis à un cristallographe de ne point posséder à fond la connaissance des lois de la double réfraction.

J'ai ainsi été amené à diviser mon traité en deux parties. Dans la première, j'expose les lois de la forme cristalline et les procédés d'observation qui en permettent l'étude. Sauf l'avant-dernier chapitre, où j'ai cru nécessaire de faire connaître et de discuter une loi curieuse, quoique incomplète, formulée par Bravais, toute cette première partie est purement géométrique. C'est en quelque sorte la partie rationnelle de la science.

Je me suis attaché à ne rien y omettre d'essentiel; on y trou-

vera les procédés élégants de calcul exposés par Miller, l'examen détaillé du mode de symétrie et des formes simples ou composées, holoédriques ou hémiédriques qui caractérisent chaque système cristallin; l'étude des principaux symboles cristallographiques usités en France et à l'étranger; la description et l'usage des divers appareils employés aux mesures goniométriques. Cette première partie se termine par des tables étendues qui permettent de transformer entre eux les symboles employés par les diverses écoles cristallographiques; ces tables m'ont paru faciliter beaucoup la lecture des mémoires publiés par les savants étrangers. Enfin, aux nombreuses figures répandues dans le texte, j'ai joint un atlas de planches montrant les projections stéréographiques et gnomoniques des pôles des divers systèmes cristallins. J'appelle surtout l'attention sur les projections gnomoniques dont l'emploi, quoique peu répandu, est cependant de nature à rendre de très grands services aux cristallographes.

On s'étonnera peut-être de ne pas trouver dans cette première partie l'examen des phénomènes hémitropes. Mais, outre qu'ils ne sont pas des conséquences rationnelles de la notion de l'homogénéité, ils m'ont paru ne pouvoir être séparés des phénomènes de groupements cristallins. Or l'étude de ces phénomènes qui ne peuvent être observés sans le secours de la lumière polarisée, doit suivre nécessairement celle des propriétés optiques.

Dans la seconde partie, dont la publication suivra de près, je l'espère, celle de la première, j'étudierai tous les phénomènes physiques et chimiques qui se lient à la structure intérieure des corps cristallisés. Tels sont les phénomènes d'élasticité, de clivage, de fissure, de glissement, de dureté; les phénomènes optiques, thermiques, électriques et magnétiques; ceux de l'isomorphisme et du dimorphisme; le mode de production des corps

cristallisés; les phénomènes de polyédrie, de polysymétrie, d'hémitropie, de groupements cristallins, etc. On trouvera ainsi rassemblés un grand nombre de faits dont la connaissance importe à la science des cristaux et qui sont disséminés dans divers Traités ou dans les Mémoires originaux

---

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE

GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE

Lorsqu'une substance passe d'une manière suffisamment lente à l'état solide, elle revêt une forme géométrique régulière et il se produit ce qu'on appelle un *cristal*. Cet état cristallin de la matière est d'autant plus intéressant qu'il peut en être considéré comme l'état normal et régulier, puisqu'elle ne le prend que lorsqu'elle est complétement libre de céder aux plus délicates de ses actions internes.

L'étude des cristaux peut être divisée en deux parties; la première, que nous appellerons *Cristallographie géométrique*, s'occupe de la forme extérieure du cristal, et la seconde, que nous appellerons *Cristallographie physique*, des propriétés physiques qui accompagnent cette forme géométrique externe.

Cette division correspond aux deux parties de ce traité.

PREMIÈRE PARTIE

CRISTALLOGRAPHIE

GÉOMÉTRIQUE

CHAPITRE PREMIER

DE LA STRUCTURE DES CORPS CRISTALLISÉS

Exposé succinct de la théorie d'Haüy. — La forme géométrique des cristaux, et surtout de certains cristaux volumineux, comme le cristal de roche, a, dès la plus haute antiquité, frappé les yeux des observateurs les moins attentifs. Ce n'est cependant qu'au siècle dernier qu'on paraît s'être posé sérieusement les problèmes qu'elle soulève.

Parmi ces problèmes, un des premiers qui se présentent à l'esprit est la recherche du rapport qui doit exister entre cette forme et la nature chimique. Dans cette recherche, on se trouve arrêté immédiatement par ce fait qui paraît inexplicable, qu'un même corps peut se présenter cristallisé sous des formes géométriques qui paraissent absolument différentes.

Les figures 1 et 2 représentent en effet deux cristaux de la variété commune de carbonate de chaux connue sous le nom de calcite, et à la premiere vue, si les différences sautent aux yeux, les analogies

semblent nulles. Cependant, certains traits se trouvent communs aux deux formes et sont comme une marque de leur identité substantielle. La calcite possède, ainsi qu'un grand nombre d'autres cristaux, la très-curieuse propriété de présenter, suivant certaines directions, des

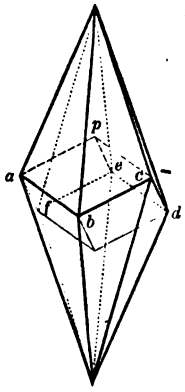


Fig. 1.

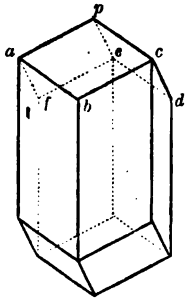


Fig. 2.

cassures planes que l'on nomme des *clivages*. Dans le cristal (fig. 1), une direction de clivage est parallèle à un plan passant par les deux arêtes *ab*, *bc;* en choquant le cristal, on le voit s'effeuiller en quelque sorte, en montrant des plaques superposées parallèles au plan *abc*. Un second clivage se produit aussi suivant un plan passant par deux autres arêtes *bc* et *cd*, et enfin un troisième, suivant le plan parallèle aux arêtes *cd* et *de*. Il résulte de ces particularités, qu'en dirigeant convenablement le choc, on peut enlever tout le pointement à six faces, qui termine la partie supérieure du cristal, et le remplacer en quelque sorte par un pointement à trois faces, ayant pour sommet *p*, et pour contours, les arêtes en zigzag *ab*, *bc*, *cd*, *de*, *ef*, *fa*. Les trois plans, *pabc*, *pcde*, *pefa*, de ce pointement sont parallèles aux trois directions du clivage.

Nous pourrons agir de même sur la partie inférieure du cristal, et l'on conçoit enfin qu'en dirigeant convenablement l'opération, on puisse extraire du cristal primitif un solide *pabcdefp'*, qui est un parallélipipède dont toutes les faces sont des rhombes égaux. Ce solide, qu'on appelle solide de clivage, parce que toutes ses faces sont des faces de clivage, est un *rhomboèdre*.

Si maintenant nous étudions le cristal de calcite fig. 2, nous constaterons que le choc y développe aussi des plans de clivage; que les

directions de ces plans sont au nombre de trois, et que leurs inclinaisons mutuelles sont précisément les mêmes que dans le premier cristal. Nous verrons de plus que les plans de clivage sont parallèles aux faces du pointement trièdre qui surmonte le prisme hexagone.

Les deux cristaux, malgré leurs formes si différentes, ne sont donc pas sans analogies. C'est la loi générale des analogies qui existent entre les formes cristallines d'une même substance chimique que la science se propose de chercher.

L'observation patiente, étendue à un grand nombre de cristaux, aurait sans doute conduit à la solution de ce problème. Mais il est, au point de vue philosophique, très-remarquable qu'elle a été trouvée par l'illustre abbé Haüy, presque sans le secours de l'observation et grâce à l'emploi d'un procédé logique qui a rendu d'inappréciables services à la science humaine, l'*abstraction*.

Je vais indiquer succinctement la marche des déductions logiques qui ont guidé Haüy dans sa belle découverte.

Prenons un cristal de calcite, d'une forme quelconque; nous pouvons, par le choc, supprimer toutes les faces cristallines, et obtenir un rhomboèdre de clivage, dont les angles dièdres et les angles plans sont toujours les mêmes, quel que soit le cristal choisi. Ce rhomboèdre lui-même peut être, par le choc, graduellement diminué, tout en restant semblable à lui-même, et comme l'esprit n'aperçoit pas de limite à cette diminution, il est forcé d'admettre que la plus petite parcelle de calcite qu'il puisse concevoir, a encore la forme d'un rhomboèdre semblable à celui que déterminent les plans de clivage.

On peut dire que cette forme rhomboédrique est celle de la dernière portion de matière qui est encore de la calcite; c'est, en employant le langage d'Ampère, la forme de la *particule* de la calcite. Haüy nommait cette particule, *molécule intégrante*.

Si nous empilons, suivant un ordre régulier, un nombre infini de petites particules rhomboédriques, nous devons donc pouvoir expliquer, en variant la manière dont se fera cet empilement, toutes les formes cristallines de la calcite. C'est en effet ce qui a lieu, et un simple coup d'œil jeté sur les figures 3 et 4, suffit à faire comprendre comment en juxtaposant des rhomboèdres infiniment petits, tous égaux entre eux, on peut expliquer la formation des cristaux représentés dans les figures 1 et 2.

De cette idée simple qui s'était peut-être présentée avant lui à l'esprit de bien d'autres minéralogistes, Haüy sut discerner immédiatement

l'importance. Avec une sagacité merveilleuse, il montra que toutes les substances pouvaient être conçues comme ayant pour molécules intégrantes, non pas toujours des rhomboèdres, mais tout au moins des Parallélipipèdes d'une forme donnée. Il montra que la forme de ce

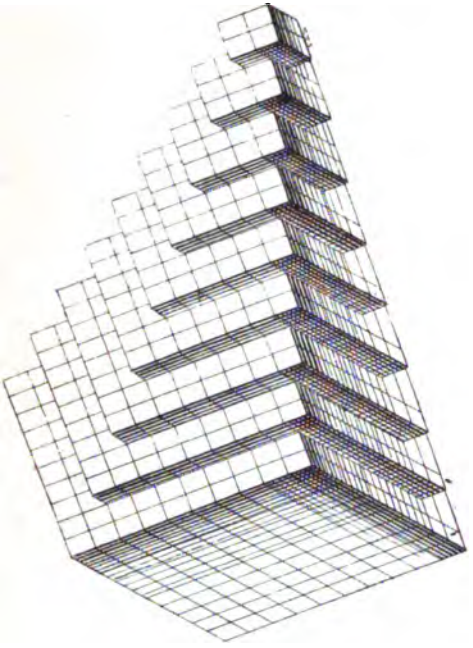


Fig. 3.

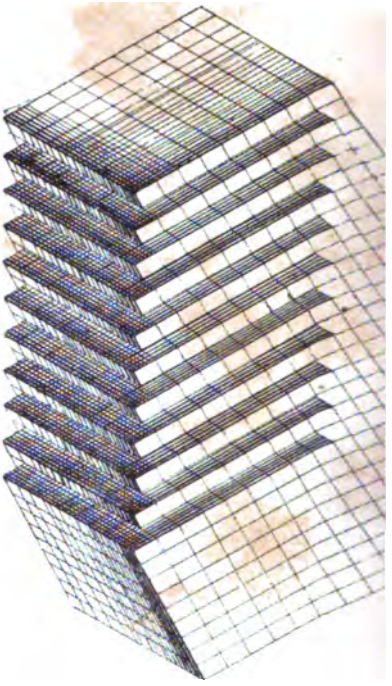


Fig. 4.

parallélipipède servait de lien caché entre toutes les formes cristallines de la substance ; et qu'enfin, par l'étude de ces formes cristallines, on pouvait fixer la forme de la molécule intégrante. La science cristallographique fut ainsi créée tout entière par le génie d'Haüy, et ses successeurs n'ont guère eu qu'à perfectionner les détails de son œuvre. Aucune autre branche des connaissances humaines n'est, à ce degré, l'ouvrage d'un seul homme.

Théorie rationnelle de la structure des corps cristallisés homogènes. — Cependant le raisonnement, dont nous venons de donner une idée, pèche en plusieurs points importants. D'une part, on y fait appel, au moins en apparence, à une propriété spéciale, le clivage, qui n'appartient pas à tous les cristaux. En outre, Haüy est amené à considérer comme l'élément cristallin primitif et irréductible, le petit

rhomboèdre élémentaire de calcite. Or ce solide, qui est une *particule* de calcite, doit être lui-même formé par des *molécules* dont l'existence est indépendante de celle du cristal, puisque la molécule, qu'on imagine formée par un certain groupement d'atomes simples, est, dans la théorie atomistique, la seule chose qui soit commune à tous les états, solide, liquide et gazeux, d'une même substance.

Le raisonnement d'Haüy n'est donc ni général, ni complet. On peut heureusement, depuis les belles recherches de Bravais, lui en substituer un autre beaucoup plus parfait, et qui permet de déduire les lois cristallographiques de la simple notion de l'*homogénéité*.

Par le mot d'*homogénéité*, nous désignons cette propriété que possèdent les corps solides de présenter, dans toutes leurs parties, les mêmes caractères essentiels, tels que densité, dureté, clivages, etc., quelque petit que soit le fragment examiné et quelle que soit la région du corps de laquelle ce fragment ait été extrait.

Nous n'entendons pas dire que tous les corps solides possèdent une semblable homogénéité. L'expérience contredirait bien vite cette assertion. Mais il nous suffit qu'elle existe manifestement dans quelques-uns des corps de la nature. Nous commencerons par supposer qu'elle est une propriété générale. Nous tirerons de cette notion toutes les conséquences qu'elle renferme implicitement, et qui s'appliqueront immédiatement aux corps réellement homogènes. Quant aux autres, nous les considérerons comme formés de la réunion d'un nombre très-grand de corps homogènes de très-petites dimensions auxquels nos lois s'appliqueront. Celles-ci deviendront alors des lois *élémentaires* desquelles nous pourrons déduire, par une sommation convenable, celles qui conviennent aux corps hétérogènes.

Pour concevoir un solide homogène, on peut le supposer réduit à l'étendue abstraite ; mais cette notion cartésienne est inféconde, car elle revient à vider le corps, en quelque sorte, de toutes ses propriétés physiques.

On peut encore concevoir l'homogénéité du solide comme celle d'un tas de sable. Une droite de direction quelconque menée à travers le tas, rencontre sur une longueur d, très-petite en valeur absolue, mais très-grande par rapport à la dimension des grains, un nombre n de grains de sable qui est sensiblement le même quelle que soit la direction de la droite ; de telle sorte que $\frac{d}{n}$ est constant pour toutes les droites, et pour tous les points d'une droite quelconque.

Une semblable homogénéité ne peut être celle des substances cristallisées. Toutes les directions, en effet, ne peuvent pas y être constituées de la même façon, puisqu'elles se distinguent les unes des autres par des caractères essentiels. Dans les cristaux de calcite, par exemple, les droites parallèles aux arêtes du rhomboèdre formé par les plans de clivage doivent avoir des propriétés qui ne peuvent appartenir qu'à elles seules.

Nous allons chercher quelle doit être la structure intérieure d'un corps solide homogène, en partant de cette seule donnée qu'on peut le découper en un nombre très-grand de parties extrêmement petites et jouissant des mêmes propriétés. Cela revient à dire qu'il y a dans l'intérieur du corps un nombre très-grand de points très-rapprochés et autour desquels la répartition de la matière est la même.

Prenons donc, dans l'intérieur d'un corps solide homogène, un point A_0 quelconque. Si l'on mène par A_0 une droite arbitraire, la loi de la répartition de la matière le long de cette droite est une certaine fonction de la distance, qui dépend de la direction de la droite.

D'après le principe que nous venons de formuler, il y a dans le corps un nombre infini de points très-rapprochés les uns des autres, ayant les mêmes propriétés que A_0, c'est-à-dire autour desquels la matière est répartie de la même façon. Nous appellerons tous ces points *Points analogues*.

Il résulte de cette définition que, si par deux points analogues nous menons des droites parallèles, la loi de la répartition de la matière le long de ces droites est la même.

Soit A_1 un point analogue de A_0 tellement choisi qu'entre ces deux points il n'y ait, sur la droite qui les joint, aucun autre point analogue. Nous prolongeons la droite $A_0 A_1$ de part et d'autre ; nous prenons

$$A_1 A_2 = A_1 A_0 = a.$$

Le point A_2 est un point analogue de A_0; autrement la matière ne serait pas distribuée à partir de A_1 comme elle l'est à partir de A_0. On a donc sur la droite $A_0 A_1$ un nombre infini de points, équidistants entre eux d'une longueur égale à a, et qui sont tous des points analogues.

En dehors de la ligne $A_0 A_1$ prenons un autre point analogue, et, dans le plan ainsi déterminé, faisons mouvoir parallèlement la ligne $A_0 A_1$ jusqu'à ce qu'elle vienne rencontrer un point analogue B_0.

Nous menons la ligne A_0B_0; il y aura sur cette ligne un nombre infini de points analogues A_0, B_0, C_0, etc., équidistants entre eux d'une longueur égale à

$$A_0B_0 = b.$$

Par ces points, menons des droites parallèles à A_0A_1; en prenant sur chacune d'elles, à partir de A_0, B_0, C_0... des longueurs égales à a, nous obtenons un nombre infini de points analogues équidistants.

Nous avons ainsi dans le plan $A_0A_1B_0$ un nombre infini de points analogues qui sont les sommets ou les nœuds d'un réseau formé par la juxtaposition de parallélogrammes tous égaux à $A_0A_1B_0B_1$.

Il est d'ailleurs évident, par notre mode de construction, qu'aucun autre point analogue ne peut exister dans le plan, car s'il en existait un sur les côtés ou dans l'intérieur d'un parallélogramme, il existerait aussi sur les côtés ou dans l'intérieur de tous les autres, et il est clair que cela ne peut pas avoir lieu pour le parallélogramme $A_0A_1B_0B_1$.

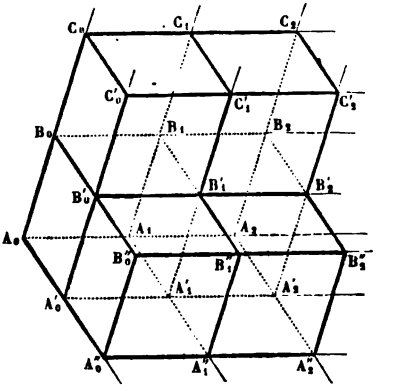


Fig. 5.

Le plan $A_0A_1B_0$ est, pour les points analogues de l'espèce considérée, ce qu'on appelle un *plan réticulaire*.

Chacune des lignes telles que A_0A_1, A_0B_0 ou toute ligne parallèle contenant un nombre infini de points analogues est une *rangée* du réseau. Les distances a, b, qui séparent sur une même rangée deux nœuds consécutifs, en sont les *paramètres*.

Nous faisons maintenant mouvoir, parallèlement à lui-même, le plan réticulaire $A_0A_1B_0$ jusqu'à ce qu'il vienne rencontrer un autre point analogue A'_0. Le plan mené par A'_0 parallèle au premier possède les mêmes propriétés que celui-ci; il renferme donc un réseau de points analogues et les nœuds de ce réseau plan s'obtiennent en donnant au premier une translation égale et parallèle à $A_0A'_0$.

Si nous prenons sur la droite $A_0A'_0$ et à partir de A_0, dans les deux sens, des points équidistants entre eux d'une longueur égale à

$$A_0A_0' = c,$$

nous obtenons des points analogues, et si nous donnons successivement au premier réseau plan des translations égales et parallèles à $A_0A'_0$, $A'_0A''_0$, etc., nous obtenons autant de plans réticulaires dont les nœuds sont tous des points analogues de A_0.

L'espace se trouve donc occupé tout entier par un système réticulaire dont la maille est un parallélipipède $A_0A'_0B_0B'_1$. Les sommets de tous les parallélipipèdes égaux juxtaposés, ou les nœuds de ce système réticulaire sont tous des points analogues, et on verrait facilement qu'aucun autre point analogue ne peut exister en dehors de ces nœuds.

Nous avons pris comme point de départ un point A_0 du solide jouissant de propriétés quelconques. Nous en choisissons maintenant un autre, a_0, jouissant de propriétés différentes; nous menons la droite A_0a_0, puis par chacun des points analogues à A_0 des droites égales et parallèles à A_0a_0. Il suit de la définition même des points analogues, que les extrémités de toutes ces droites seront des points analogues à a_0. Ces derniers points formeront donc les nœuds d'un système réticulaire qui ne sera autre que celui des points analogues à A_0, auquel on a fait subir une translation égale et parallèle à A_0a_0.

Il résulte donc de ces considérations très-simples que la constitution d'un corps solide cristallisé homogène, ne dépend que de deux éléments entre lesquels le principe de l'homogénéité n'établit d'ailleurs aucune relation. Ces deux éléments sont :

1° Le système réticulaire dont les points analogues entre eux forment les nœuds. Ce système est défini par la direction des trois rangées A_0A_1, A_0B_2 et $A_0A'_0$, ainsi que par le paramètre de chacune d'elles; ou, ce qui revient au même, par la forme du parallélipipède $A_0B'_1$ qui est la maille solide du réseau, et que nous désignerons avec Bravais par le nom de *parallélipipède élémentaire;*

2° La loi de la répartition de la matière autour de chacun des points analogues qui forment les nœuds du système réticulaire.

Cette conclusion est entièrement indépendante de toute hypothèse sur la constitution intérieure de la matière; elle se déduit rationnellement des données expérimentales les plus simples qui nous conduisent à la notion de l'homogénéité des corps solides. Elle peut donc servir à l'édification d'une science qui sera rationnelle au même titre que l'est la mécanique, déduite tout entière de la notion de masse.

On peut d'ailleurs traduire les conséquences auxquelles nous sommes arrivés en employant le langage imagé de la théorie atomistique. Il suffit de prendre pour points analogues les centres de gravité des

molécules, et de considérer les polyèdres moléculaires comme représentant géométriquement autour de chacun de ces points, ce que nous avons appelé la loi de répartition de la matière. Puisque l'on passe sans difficulté du langage de la théorie atomistique au langage, indépendant de toute hypothèse, que nous avons employé jusqu'ici, il est indifférent de faire usage de l'un ou de l'autre, et nous adopterons habituellement celui de la théorie atomistique comme plus bref et fournissant à l'esprit une image plus nette.

Il n'est point inutile de remarquer que la structure des corps cristallisés, telle que nous venons de la déduire rationnellement de la notion de l'homogénéité, ne contredit pas celle qu'Haüy avait formulée. La maille parallélipipédique de notre réseau n'est en effet autre chose que la *molécule intégrante* d'Haüy. Mais la théorie d'Haüy considère nécessairement cette molécule intégrante comme l'élément unique et irréductible du cristal. Elle laisse de côté la forme du polyèdre moléculaire. Cette grave imperfection s'est longtemps opposée à l'interprétation physique de faits cristallographiques importants. C'est ce qui avait conduit les savants allemands à rejeter comme hypothétiques les idées d'Haüy, et à renfermer la science dans l'étude, purement géométrique, de la forme des cristaux. Bien que ce procédé paraisse d'abord plus rigoureux, il est, en réalité, aussi infécond qu'antiphilosophique. Si les faits cristallographiques, en effet, nous semblent intéressants, c'est que nous avons l'espoir qu'interprétés convenablement ils nous feront pénétrer plus avant dans la connaissance de la matière. Or comment serait-il possible d'interpréter ces faits et de les aire concourir au progrès de la science, si l'on se refuse, comme une hypothèse blâmable, toute spéculation sur les relations qui peuvent exister entre la structure cristalline intérieure et la forme extérieure ?

M. Delafosse et Bravais ont pensé qu'il y avait mieux à faire que de rejeter, pour y substituer une géométrie stérile, la théorie d'Haüy, si intimement pénétrée de la réalité physique. Grâce à leurs travaux, on peut maintenant donner à la science des cristaux une base solide et assez large pour porter l'édifice tout entier.

CHAPITRE II

PROPRIETÉS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES RÉTICULAIRES

Les centres de gravité des corps solides cristallisés formant des systèmes réticulaires, il est nécessaire d'étudier les propriétés géométriques de ces systèmes. Ce sera l'objet de ce chapitre.

Définitions. — Nous remarquons d'abord que les six éléments qui déterminent le système réticulaire de la figure 5, sont les directions des trois rangées A_0A_1, A_0A_0', A_0B_0, et leurs paramètres respectifs $A_0A_1 = a$, $A_0A_0' = b$, $A_0B_0 = c$. Ces trois rangées, qui sont telles que, en construisant les parallélipipèdes correspondant à leurs paramètres, on retrouve tous les nœuds du système, sont appelées *rangées conjuguées*.

Les rangées parallèles entre elles forment un *système de rangées;* les plans réticulaires parallèles entre eux, *un système de plans réticulaires*. Les trois plans réticulaires qui passent deux à deux par trois rangées conjuguées sont des *plans réticulaires conjugués*.

L'espace compris entre deux plans réticulaires parallèles immédiatement contigus est une *strate*.

Mailles planes. — Mailles parallélipipédiques. — Il y a dans un même système réticulaire un nombre infini de systèmes de trois rangées conjuguées ; et, par conséquent, un même réseau peut être successivement considéré comme formé par un nombre infini d'espèces différentes de mailles parallélipipédiques.

On peut, en effet, en conservant à la maille sa base $A_0A_1A'_0A'_1$, prendre, pour la troisième arête de la maille, une quelconque des lignes qui joignent A_0 avec l'un des nœuds du plan réticulaire $B_0B'_0B_1B'_1$.

De même, au lieu de la base $A_0A'_1$, on peut prendre pour maille plane un quelconque des parallélogrammes formés avec A_0A_1 pour côté et pour autre côté une des droites joignant A_0 avec l'un des nœuds de la rangée $A'_0A'_1$; et il est aisé de voir qu'on peut varier à l'infini de semblables combinaisons.

On démontre que dans un même plan réticulaire toutes les mailles planes que l'on peut former ont même surface. Prenons en effet, dans ce plan, une surface S limitée par un contour quelconque mais infiniment grande relativement à l'aire ω de la maille. Si n est le nombre de mailles contenues tout entières dans l'intérieur de la surface S, S sera égal à $n\omega$ augmenté d'une aire égale à la somme d'un certain nombre de fractions de mailles réparti tout le long du contour. Cette aire, étant de l'ordre de grandeur du contour, sera infiniment petite par rapport à S, et nous aurons, à un infiniment petit près,

$$S = n\omega.$$

Pour une autre maille d'aire ω' nous trouverons de même

$$S = n'\omega'.$$

Mais les n premières mailles contiennent, à un infiniment petit près, tous les nœuds contenus dans la surface S, et il en est de même pour les n' secondes. On a donc, à un infiniment petit près,

$$n = n'$$

d'où l'on déduit enfin

$$\omega = \omega'$$

Un raisonnement entièrement analogue démontrerait que toutes les mailles solides que l'on peut attribuer à un même système réticulaire ont un même volume.

On déduit de ces théorèmes une conséquence importante. Considérons un plan réticulaire tel que $A_0A'_1$, et soit ω la surface de la maille plane correspondant à ce plan; soit d la distance normale qui sépare le plan réticulaire $A_0A'_1$ du plan réticulaire parallèle immédiatement contigu : le volume de la maille solide sera

$$\Omega = \omega d.$$

Ω étant constant, quel que soit le plan réticulaire considéré, on voit que ω est en raison inverse de d, c'est-à-dire que l'épaisseur d'une strate est en raison inverse de la surface de la maille plane correspondante, ou en raison directe du nombre de nœuds contenus par unité de surface dans le plan réticulaire, c'est-à-dire de la *densité réticulaire de ce plan*.

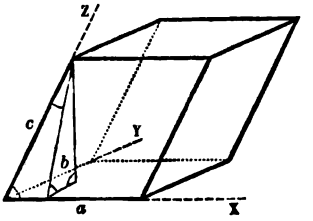


Fig. 6.

Si l'on désigne par x, y, z les trois rangées conjuguées ; par xy, yz, zx les angles des trois rangées conjuguées ; par a, b, c leurs paramètres respectifs ; par ξ, η, ζ, les angles dièdres des plans réticulaires conjugués ayant respectivement x, y, z, pour arêtes ; enfin par ω_{xy}, ω_{yz}, ω_{zx} les parallélogrammes élémentaires de ces plans, on a :

$$\omega_{xy} = ab \sin xy \qquad \omega_{yz} = bc \sin yz \qquad \omega_{zx} = ac \sin zx$$
$$\Omega = abc \sin xy \sin zx \sin \xi = abc \sin xy \sin zy \sin \eta = abc \sin zx \sin zy \sin \xi$$

ou, en posant

$$J = \sin xy \sin zx \sin \xi = \sin xy \sin zy \sin \eta = \sin zy \sin zx \sin \zeta$$
$$\Omega = abc\,J.$$

Si l'on appelle *intervalle moyen des nœuds*, le côté E d'un cube égal à l'unité de volume divisée par le nombre des nœuds que renferme cette unité, on a :

$$E^3 = \Omega \text{ ou } E = \sqrt[3]{\Omega}$$

Rangées contiguës et paramètre d'un système de rangées. — Rapportons aux trois rangées conjuguées prises pour axes, la position de tous les nœuds du réseau.

Soit A, fig. 7, un de ces nœuds ; menons par A une parallèle à OX et soit A′ l'intersection de cette parallèle avec le plan des ZY ; la longueur A′A est égale à un certain nombre entier de fois le paramètre a, puisque, d'après la loi de formation du réseau, une série de plans réticulaires parallèles à ZY et équidistants entre eux d'une longueur égale à a, comprennent sans exception tous les nœuds du réseau. Le point

A′ est donc un nœud, et l'on peut poser, en appelant x, y, z les coordonnées de A

$$x = ma \quad y = nb \quad z = pc,$$

m, n, p étant des nombres entiers.

Ces nombres définissent la position du point lorsque a, b, c sont connus; on les appelle les *coordonnées numériques* du nœud.

Les équations d'une rangée passant par l'origine O et un nœud quelconque A, sont :

$$\frac{x}{ma} = \frac{y}{nb} = \frac{z}{pc}.$$

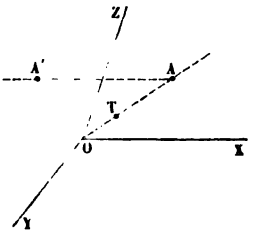


Fig. 7.

Si m, n, p ont un plus grand commun diviseur D, le nœud T défini par les coordonnées numériques

$$\frac{m}{D} \quad \frac{n}{D} \quad \frac{p}{D}$$

appartient à la rangée et est placé le plus près possible de O ; O T est donc le paramètre de la rangée.

Si donc nous supposons les nombres m, n, p, qui sont les *caractéristiques* de la rangée OA, ainsi que de toute rangée parallèle, débarrassés de leurs facteurs communs, le paramètre de la rangée, que nous représenterons par le symbole

$$p\,[mnp]$$

se déduira de l'expression

$$p^2[mnp] = m^2a^2 + n^2b^2 + p^2c^2 + 2mnab\cos xy + 2mpa\cos xz + 2npbc\cos yz$$

Dans ce système de notation, les rangées OX, OY, OZ, ont respectivement pour caractéristiques

OX 100
OY 010
OZ 001

et l'on peut écrire

$$p\,[100] = a \qquad p\,[010] = b \qquad p\,[001] = c.$$

Le système des rangées parallèles à OA est défini par les caractéristiques m, n, p et représenté par le symbole

$$[mnp].$$

On écrit toujours les caractéristiques de telle sorte que la première correspond à l'axe des x, la seconde à l'axe des y, la troisième à l'axe des z.

Plans réticulaires. — Caractéristiques d'un système de plans réticulaires. — Plans réticulaires conjugués d'une rangée. — Un plan réticulaire passant par l'origine et par deux nœuds dont les coordonnées numériques sont respectivement mnp d'une part et $m'n'p'$ de l'autre, a pour équation

$$x\,(nb.p'c - n'b.pc) + y\,(pc.m'a - p'c.ma) + z\,(ma.n'b - nb.m'a) = 0$$

ou, en divisant par le produit abc,

$$\frac{x}{a}(n'p - np') + \frac{y}{b}(pm' - p'm) + \frac{z}{c}(mn' - nm') = 0.$$

Soit D le plus grand commun diviseur des trois binômes, et posons

$$\frac{np' - n'p}{D} = g \qquad \frac{pm' - p'm}{D} = h \qquad \frac{mn' - nm'}{D} = k,$$

les nombres entiers g, h, k sont les *caractéristiques* du plan réticulaire dont l'équation devient

$$g\frac{x}{a} + h\frac{y}{b} + k\frac{z}{c} = 0.$$

Si, par un nœud quelconque, dont les coordonnées numériques sont $m''n''p''$, on mène un plan réticulaire parallèle, on a

$$g\frac{x}{a} + h\frac{y}{b} + k\frac{z}{c} = gm'' + hn'' + kp''.$$

Le second membre est un nombre entier positif ou négatif et peut recevoir toutes les valeurs entières possibles. Si donc on désigne

par C un nombre entier quelconque, tous les plans réticulaires parallèles à celui qui passe par l'origine et dont les caractérisques sont g, h, k, sont compris dans l'équation générale :

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=C.$$

Tous ces plans forment un système de plans réticulaires que nous représenterons par le symbole

$$(ghk).$$

Les deux plans les plus rapprochés de celui qui passe par l'origine et qu'on appelle les plans *limitrophes* de celui-ci, ont pour équation

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=\pm 1;$$

et, d'une manière générale,

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=\pm C$$

représente les deux plans qui, de part et d'autre de celui qui passe par l'origine, en sont séparés par un nombre de strates égal à C.

Pour qu'un plan réticulaire (ghk), passant par l'origine, soit conjugué d'une rangée mnp partant également de l'origine, il faut et il suffit que m, n, p représentent les coordonnées numériques d'un nœud situé dans l'un des plans réticulaires limitrophes du plan (ghk). L'équation, qui exprime que la condition est remplie, est donc

$$gm+hn+kp=\pm 1.$$

Longueurs numériques interceptées sur les axes coordonnés par un plan réticulaire. — Un plan réticulaire quelconque ayant pour équation

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=C$$

intercepte, sur les trois axes coordonnés, à partir de l'origine, des longueurs qui sont respectivement égales à

$$\frac{C}{g}a,\ \frac{C}{h}b,\ \frac{C}{k}c.$$

Si l'on prend les fractions $\frac{C}{g}, \frac{C}{h}, \frac{C}{k}$ et si on les réduit au plus petit dénominateur commun D, les longueurs interceptées par le plan sur les axes coordonnés sont représentées par

$$\frac{N}{D}a, \quad \frac{N'}{D}b, \quad \frac{N''}{D}c.$$

Si l'on appelle *longueurs numériques* interceptées sur les axes, les nombres $\frac{N}{D}, \frac{N'}{D}, \frac{N''}{D}$ par lesquels il faut multiplier les paramètres correspondants pour trouver les vraies longueurs interceptées, on voit que ces longueurs numériques sont proportionnelles à trois nombres entiers N, N', N''.

Ces longueurs numériques sont aussi proportionnelles à $\frac{C}{g}, \frac{C}{h}, \frac{C}{k}$; les nombres entiers g, h, k, qui sont les caractéristiques du plan représentent donc, à un facteur commun près, les *inverses* des longueurs numériques interceptées par le plan sur les axes.

Zones. — Axes de zone. — Conditions pour qu'un plan réticulaire fasse partie d'une zone. — Il est aisé de démontrer que deux plans réticulaires passant par un même nœud se coupent suivant une rangée.

Supposons, en effet, pour simplifier, que l'un des plans soit celui des xy, l'équation de l'autre étant

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=0$$

et l'origine étant le nœud commun. Les équations de l'intersection

$$z=0 \qquad g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}=0$$

sont satisfaites pour les valeurs

$$x=ha \qquad y=-gb \qquad z=0$$

qui représentent les coordonnées d'un nœud, puisque h et g sont entiers. L'intersection des deux plans est donc une rangée.

Tous les plans réticulaires passant par un nœud commun et se coupant suivant une rangée commune, ainsi que tous les plans réticu-

laires parallèles à ceux-là, sont dits appartenir à une même *zone*, dont la rangée commune est l'*axe*.

Supposons que l'origine soit le nœud commun, et soient P et P', dont les symboles sont respectivement (pqr) et $(p'q'r')$, deux plans de la zone. Les équations de ces deux plans seront

$$p\frac{x}{a}+q\frac{y}{b}+r\frac{z}{c}=0$$

$$p'\frac{x}{a}+q'\frac{y}{b}+r'\frac{z}{c}=0.$$

Celles de l'intersection ou de l'axe de la zone seront donc

$$\frac{1}{qr'-q'r}\frac{x}{a}=\frac{1}{rp'-r'p}\frac{y}{b}=\frac{1}{pq'-p'q}\frac{z}{c}$$

Si nous posons

$$P=qr'-q'r \quad Q=rp'-r'p \quad R=pq'-p'q,$$

les équations de l'axe de la zone deviennent

$$\frac{1}{P}\frac{x}{a}=\frac{1}{Q}\frac{y}{b}=\frac{1}{R}\frac{z}{c};$$

P, Q, R, sont les caractéristiques de la rangée qui est l'axe de la zone. Ces caractéristiques sont faciles à former par le procédé mnémonique suivant. On écrit sur deux lignes parallèles les caractéristiques de chacun des deux plans, en mettant l'un au-dessus de l'autre les nombres qui se rapportent au même axe coordonné, et en répétant les caractéristiques dans le même ordre autant de fois qu'il est nécessaire.

$$\begin{matrix} p & q & r & p & q \\ p' & q' & r' & p' & q' \end{matrix}.$$

On supprime ensuite le premier nombre de chacune des deux lignes; puis on forme le premier binôme P en multipliant en croix les deux nombres qui suivent dans chaque ligne, en commençant par le premier nombre de la ligne supérieure et en retranchant le second produit du premier. On trouve Q de la même façon en se servant du troisième et du quatrième nombre de chaque ligne, et enfin R en se servant du quatrième et du cinquième nombre de chaque ligne.

La condition pour que le plan (ghk) fasse partie de la zone PQR est évidemment

$$Pg + Qh + Rk = 0$$

puisque l'équation du plan est

$$g\frac{x}{a} + h\frac{y}{b} + k\frac{z}{c} = 0$$

et que les équations de la droite peuvent être mises sous la forme

$$\frac{x}{a} = CP \quad \frac{y}{b} = CQ \quad \frac{z}{c} = CR$$

C étant un nombre quelconque.

Soient PQR, P'Q'R', deux axes de zone, et (ghk) un plan appartenant à la fois aux deux zones que ces axes caractérisent, on a les deux équations de condition :

$$Pg + Qh + Rk = 0$$
$$P'g + Q'h + R'k = 0.$$

Ces deux équations sont pour g, h, k, ce que sont les équations de deux plans d'une même zone pour $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$. On déduit de cette remarque les équations suivantes :

$$\frac{g}{QR' - Q'R} = \frac{h}{RP' - R'P} = \frac{k}{PQ' - P'Q}.$$

Si les binômes qui forment les dénominateurs sont divisés par leur plus grand diviseur commun, les quotients représentent les caractéristiques du plan.

Les caractéristiques d'un plan qui appartient à la fois à deux zones dont les caractéristiques sont connues, peuvent donc se déduire de ces dernières, par un procédé mnémonique absolument semblable à celui qui permet de déduire des caractéristiques de deux plans, celles de la droite qui leur sert d'intersection.

Changement d'axes coordonnés. — Les notations des rangées et des plans réticulaires étant rapportées à trois rangées conjuguées déterminées, on peut se demander ce qu'elles deviennent lorsque le réseau est rapporté à trois autres rangées conjuguées, que nous

pourrons toujours, au reste, supposer partir de la même origine.

Soient x, y, z, les anciens axes ; x', y', z', les nouveaux ; et supposons données les caractéristiques des plans $x'y'$, $y'z'$, $z'x'$ par rapport aux anciens axes.

En considérant l'axe des x' comme l'intersection de $x'y'$ et de $z'x'$, on tirera facilement de ces caractéristiques, celles de l'axe x', et ainsi de suite pour les axes des y' et des z'. Les caractéristiques des nouveaux axes sont donc connues, et je désigne

celles de x' par P,Q,R
— y' — P′,Q′,R′
— z' — P″,Q″,R″.

Quant à la grandeur des paramètres, elle se déduit par une formule connue, des caractéristiques de chacun des axes. Appelons a', b', c' les paramètres respectifs de x', y', z', et soit (ghk) le symbole dans le système des anciens axes, d'un plan réticulaire dont nous cherchons le symbole $(g'h'k')$ dans le nouveau.

Choisissons parmi tous les plans parallèles compris dans le symbole (ghk), celui qui est limitrophe de l'origine, dont l'équation est

$$g\frac{x}{a}+h\frac{y}{b}+k\frac{z}{c}=1,$$

et qui rencontre l'axe Ox', à une distance de l'origine égale à $D_{x'}$, en un point M (fig. 8), dont les coordonnées sont ξ, η, ζ. Soit $OA' = a'$ le paramètre de Ox' ; les coordonnées de A′ sont

$$Pa,\ Qb,\ Rc$$

et il est clair qu'on peut poser les égalités :

$$\frac{\xi}{Pa}=\frac{\eta}{Qb}=\frac{\zeta}{Rc}=\frac{D_{x'}}{a'}$$

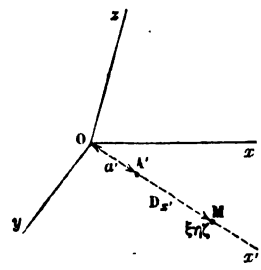


Fig. 8.

d'où l'on tire, en remarquant que le nœud M fait partie du plan (ghk),

$$Pg+Qh+Rk=\frac{a'}{D_{x'}}$$

En appelant $D_{y'}$, $D_{z'}$, les longueurs interceptées par le plan (ghk) sur

les axes y', z', on trouve de même :

$$P'g + Q'h + R'k = \frac{b'}{D_{y'}}$$

$$P''g + Q''h + R''k = \frac{c'}{D_{z'}}$$

Les inverses des premiers membres des trois dernières équations, divisés respectivement par a', b', c', représentent donc les longueurs interceptées sur chacun des nouveaux axes ; et les premiers membres de ces équations, débarrassés, s'il y a lieu, de leurs facteurs communs, sont les caractéristiques cherchées g', h', k'.

Si uvw représentent les coordonnées numériques d'un nœud dans l'ancien système d'axes, on peut se proposer de chercher les coordonnés $u'v'w'$ de ce nœud dans le nouveau système.

Soit (pqr) le symbole du plan des xy dans l'ancien système, le plan parallèle qui passe par le point uvw a pour équation :

$$p\frac{x}{a} + q\frac{y}{b} + r\frac{z}{c} = pu + qv + rw$$

et le second membre représentant le nombre de strates compris entre ce plan et $z'y'$ est précisément la coordonnée numérique u' cherchée. On aura donc :

$$u' = pu + qv + rw$$

et de même

$$v' = p'u + q'v + r'w$$
$$w'' = p''u + q''v + r''w$$

en appelant $(p'q'r')$ le symbole du plan $z'x'$
et $(p''q''r'')$ — — $x'y'$.

Aire élémentaire d'un plan réticulaire. — Nous conviendrons de désigner l'aire élémentaire d'un système de plans réticulaires (ghk) par le symbole $s(ghk)$. Nous allons chercher l'expression de $s(ghk)$. Soient trois rangées conjuguées, servant d'axes coordonnés, et ayant respectivement pour paramètres a, b, c. Nous les supposons coupées aux points G, H, K (fig. 9), par un plan réticulaire (ghk) limitrophe de l'origine.

On a

$$\text{Aire GOH} = \frac{1}{2}\frac{a}{g}\frac{b}{h}\sin xy = \frac{1}{2}\frac{s(001)}{gh}$$

Soit p la perpendiculaire abaissée de O sur le plan, et S l'aire GHK :

$$(1) \qquad Sp = \frac{1}{2}\frac{s(001)}{gh}\cdot\frac{c}{k}\cos\gamma\,;$$

γ étant l'angle, avec Oz, de la perpendiculaire abaissée de K sur le plan xy, et dont la longueur est $\frac{c}{k}\cos\gamma$.

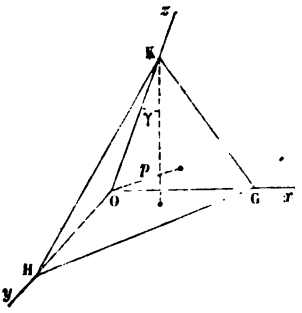


Fig. 9.

On a d'ailleurs, Ω étant le volume élémentaire du réseau,

$$(2) \qquad p.s(ghk) = s(001).\,c\cos\gamma = \Omega$$

et en composant les équations (1) et (2), on déduit

$$\frac{S}{s(ghk)} = \frac{1}{2}\frac{1}{ghk}.$$

Un théorème connu de la géométrie analytique permet, on le sait, d'écrire :

$$S^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 - 2XY\cos\zeta - 2XZ\cos\eta - 2YZ\cos\xi$$

X, représentant l'aire du triangle KOH situé dans le plan des yz;

Y, l'aire GOK, et Z l'aire GOH ;

ξ, étant l'angle des deux plans coordonnés xy et xz dont Ox est l'arête;

η, l'angle des deux plans yx et yz dont Oy est l'arête;

ζ, l'angle des deux plans zx et zy dont Oz est l'arête.

D'après le théorème précédent, on a :

$$X = \frac{1}{2}\frac{s(100)}{hk}$$

$$Y = \frac{1}{2}\frac{s(010)}{gk}$$

$$Z = \frac{1}{2}\frac{s(001)}{gh}$$

$$S = \frac{1}{2}\frac{s(ghk)}{ghk}$$

valeurs qui, substituées dans l'équation précédente, donnent :

$$s^2(ghk)=\left\{\begin{array}{l} g^2.s^2(100) \\ +h^2.s^2(010) \\ +k^2\ s^2(001) \end{array}\right\}-2\left\{\begin{array}{l} gh.s(100).\,s(010).\cos\zeta \\ +hk.s(010).\,s(001).\cos\xi \\ +gk.s(100).\,s(001).\cos\eta \end{array}\right.$$

Angle de deux rangées. — Étant données deux rangées R et R′, dont les symboles respectifs sont

$$[pqr],\quad [p'q'r']$$

on peut se proposer de chercher l'angle qu'elles forment entre elles.

Soit (uvw) le plan qui comprend ces deux rangées, qu'on peut toujours supposer menées par l'origine ; on a :

$$u=\frac{qr'-rq'}{D}$$
$$v=\frac{rp'-pr'}{D}$$
$$w=\frac{pq'-qp'}{D}$$

en appelant D le plus grand commun diviseur des trois numérateurs.

On a d'ailleurs

$$s(qr'-rq',\,rp'-pr',\,pq'-qp')=D.s(uvw)=p\,[pqr]\,.\,p\,[p'q'r']\,.\sin RR'$$

d'où l'on tire

$$\sin RR'=\frac{D.s(uvw)}{p\,[pqr]\,.\,p\,[p'q'r']}.$$

Cette formule est peu employée à cause de l'incertitude que laisse la détermination d'un angle par son sinus. On préfère déterminer l'angle RR′ par son cosinus ou sa tangente.

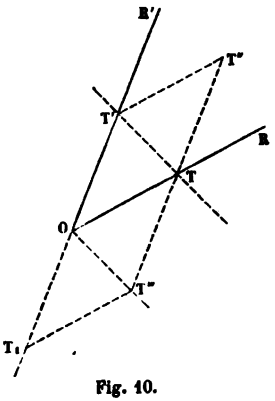


Fig. 10.

Soient les deux rangées OR et OR′ (fig. 10), dont les paramètres respectifs sont

$$OT=p\,[pqr],\quad OT'=p\,[p'q'r']$$

Construisons sur OT et OT′ un parallélogramme dont le quatrième sommet sera T″ ; les coordonnées numériques de T″ sont :

$$p+p',\quad q+q',\quad r+r'$$

et

$$OT'' = p\,[p+p',\ q+q',\ r+r'].$$

Construisons de même un parallélogramme sur OT et $OT_1' = -OT'$; les coordonnées numériques du quatrième sommet T'' seront

$$p-p',\ q-q',\ r-r'$$

et

$$OT'' = p\,[p-p',\ q-q'\ r-r'] = TT'$$

Or, dans le triangle OTT'', on a

$$\overline{OT''}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 + 2.OT.OT'.\cos RR',$$

et dans le triangle OTT' :

$$\overline{TT'}^2 = \overline{OT}^2 + \overline{OT'}^2 - 2.OT.OT'\cos RR'$$

On tire aisément de ces deux équations

$$\cos RR' = \frac{1}{4}\,\frac{\overline{OT''}^2 - \overline{TT'}^2}{OT \times OT'} = \frac{1}{4}\,\frac{p^2[p+p', q+q', r+r'] - p^2[p-p', q-q', r-r']}{p\,[pqr] \times p\,[p'q'r']}$$

et, en remplaçant les symboles par leurs expressions connues, il vient, toutes réductions faites :

$$\cos RR' = \frac{\left.\begin{matrix} pp'a^2 \\ +qq'b^2 \\ +rr'c^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} (pq'+p'q)\,ab\cos xy \\ +(pr'+p'r)\,ac\cos xz \\ +(qr'+q'r)\,bc\cos yz \end{matrix}\right.}{\sqrt{\left.\begin{matrix} p^2a^2 \\ +q^2b^2 \\ +r^2c^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2pqab\cos xy \\ +2prac\cos xz \\ +2qrbc\cos yz \end{matrix}\right.} \times \sqrt{\left.\begin{matrix} p'^2a^2 \\ +q'^2b^2 \\ +r'^2c^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2p'q'ab\cos xy \\ +2p'r'ac\cos xz \\ +2q'r'bc\cos yz \end{matrix}\right.}}.$$

Connaissant sin RR' et cos RR', il est aisé d'obtenir tang. RR', et l'on obtient :

$$\text{tang. } RR' = \frac{D.s(uvw)}{\frac{1}{4}\Big[p^2[p+p',\ q+q',\ r+r'] - p^2[p-p',\ q-q',\ r-r']\Big]}$$

ou, en remplaçant les symboles par leurs expressions

$$\text{tang.RR}' = \text{D}\,\frac{\sqrt{\left.\begin{array}{r} u^2b^2c^2 \sin yz \\ +v^2a^2c^2 \sin xz \\ +w^2a^2b^2 \sin xy \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} 2uvabc^2 \sin yz \sin xz \cos\zeta \\ +2uwacb^2 \sin xy \sin yz \cos\eta \\ +2vwbca^2 \sin xy \sin xz \cos\xi \end{array}\right.}}{\left.\begin{array}{r} pp'a^2 \\ +qq'b^2 \\ +rr'c^2 \end{array}\right\} + \left\{\begin{array}{l} (pq'+p'q)\,ab \cos xy \\ +(pr'+p'r)\,ac \cos xz \\ +(qr'+q'r)\,bc \cos yz \end{array}\right.}.$$

Réseaux polaires. — Étant donné un réseau construit sur les paramètres a, b, c qui correspondent aux trois rangées conjuguées x, y, z (fig. 11), on mène par l'origine des perpendiculaires à tous les systèmes de plans réticulaires, et l'on marque sur chacune de ces perpendiculaires, à partir de l'origine, un nombre infini de points équidistants entre eux d'une quantité égale à l'aire de la maille plane du système de plans, divisée par la distance moyenne des nœuds E. Si le système de plans réticulaires a pour symbole (ghk), la distance commune OD de deux des points contigus marqués sur la perpendiculaire sera

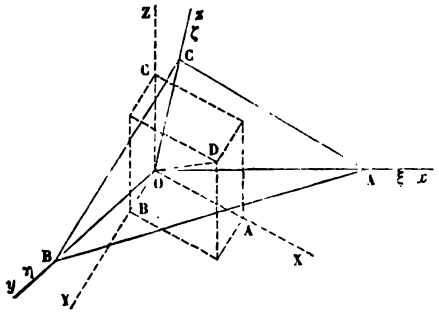


Fig. 11.

$$(1) \qquad \text{OD} = \frac{s(ghk)}{\text{E}}.$$

Or on a

$$(2) \qquad s^2(ghk) = \left\{\begin{array}{r} g^2.s^2(100) \\ +h^2.s^2(010) \\ +k^2.s^2(001) \end{array}\right\} - \left\{\begin{array}{l} 2gh.s(100).s(010).\cos\zeta \\ +2hk.s(010).s(001).\cos \\ +2gk.s(100).s(001).\cos\eta \end{array}\right.$$

Si l'on considère les trois perpendiculaires menées par l'origine perpendiculairement aux plans coordonnés, l'équidistance des points marqués sur ces perpendiculaires sera respectivement :

Sur la droite OX perpendiculaire à zy. . . $\text{OA} = \frac{s(100)}{\text{E}} = \text{A}$

— OY — zx. . . $\text{OB} = \frac{s(010)}{\text{E}} = \text{B}$

— OZ — xy. . . $\text{OC} = \frac{s(001)}{\text{E}} = \text{C}$.

Supposons que l'on rapporte le point D aux axes X, Y, Z, auxquels on attribuera respectivement les paramètres A, B, C. Une formule connue donnerait $\overline{OD}^2$ en fonction de ces paramètres et des coordonnées numériques de D par rapport aux nouveaux axes. La comparaison de cette formule avec la valeur de $\overline{OD}^2$ déduite des équations précédentes (1) et (2) fait voir que ces coordonnées numériques sont précisément égales aux nombres entiers g, h, k. On en conclut que tous les points D forment un réseau construit sur les axes X, Y, Z considérés comme des rangées conjuguées possédant respectivement les paramètres A, B, C. Nous appellerons ce réseau le *réseau polaire* du premier, que nous appellerons le *réseau primitif*.

On voit qu'à tout système de plans réticulaires (ghk) du réseau primitif correspond une rangée normale du réseau polaire, dont les caractéristiques, dans le système d'axes du réseau polaire, sont g, h, k. Nous désignerons cette rangée par le symbole $[ghk]_\pi$. Le paramètre de cette rangée désigné par le symbole P $[ghk]$ est donné par l'expression

$$P[ghk] = \frac{s(ghk)}{E}$$

$s(ghk)$ étant l'aire de la maille plane du système de plans réticulaires du réseau primitif.

Nous continuerons de désigner les axes coordonnés auxquels on rapporte le réseau primitif par x, y, z; ceux auxquels on rapporte le réseau polaire seront désignés par les lettres X, Y, Z.

Les paramètres des axes du réseau primitif étant appelés a, b, c, ceux du réseau polaire seront A, B, C. Les angles dièdres des plans coordonnés du réseau primitif étant appelés ξ, η, ζ, ceux des plans coordonnés du réseau polaire seront appelés Ξ, H, Z. On aura d'ailleurs

$$\begin{array}{ll} YX = 180 - \zeta & \Xi = 180 - zy \\ XZ = 180 - \eta & H = 180 - yx \\ ZY = 180 - \xi & Z = 180 - xz \end{array}$$

Le volume de la maille parallélipipédique du réseau primitif est

$$\Omega = abc\,J$$

Le volume de la maille parallélipipédique du réseau polaire est

$$\Omega_\pi = ABC\,J_\pi = \frac{ab \sin xy}{E} \cdot \frac{bc \sin yz}{E} \cdot \frac{ac \sin xz}{E} \cdot \sin\xi \sin\zeta \sin xz$$

ou à cause des relations

$$J = \sin xy \sin xz \sin \xi = \sin yz \sin xz \sin \zeta$$
$$\Omega_\pi = \frac{a^2 b^2 c^2 J^2}{E^5} = \frac{\Omega^2}{\Omega} = \Omega.$$

Les volumes sont donc identiques, ainsi que l'intervalle moyen E des nœuds, dans les deux réseaux.

On en conclut, sans difficulté, que le réseau primitif est le polaire du réseau polaire, et par conséquent qu'à tout système de plans réticulaires $(ghk)_\pi$ du réseau polaire correspond un système de rangées normales $[ghk]$ du réseau primitif. Si l'on désigne par le symbole $S(ghk)$ l'aire de la maille plane du réseau polaire, on aura :

$$p\,[ghk] = \frac{S(ghk)}{E}$$

En résumé, on voit que le réseau polaire et le réseau primitif jouissent, l'un par rapport à l'autre, de propriétés réciproques analogues à celles qui existent entre un triangle sphérique et son polaire. Toute propriété démontrée pour les rangées d'un réseau se transformera en propriété relative aux plans réticulaires du second et réciproquement.

Nous avons vu que les paramètres du réseau polaire ont, en fonction de ceux du réseau primitif, les valeurs :

$$A = \frac{s(100)}{E} = \frac{bc \sin yz}{E}$$
$$B = \frac{s(010)}{E} = \frac{ac \sin xz}{E}$$
$$C = \frac{s(001)}{E} = \frac{ab \sin yz}{E}$$

que l'on peut encore écrire

$$A = \frac{abc}{E} \cdot \frac{1}{a} \sin yz$$
$$B = \frac{abc}{E} \cdot \frac{1}{b} \sin xz$$
$$C = \frac{abc}{E} \cdot \frac{1}{c} \sin xy$$

Angle de deux plans réticulaires. — De ce qui précède, nous concluons que si, dans un réseau, on a deux plans réticulaires P et P′ re-

présentés par les symboles (pqr) et $(p'q'r')$, on trouvera l'angle de ces deux plans en cherchant le supplément de l'angle des deux rangées correspondantes du réseau polaire. Il suffira donc de prendre les formules qui donnent l'angle RR′ de deux rangées du réseau primitif, et d'y substituer aux paramètres et aux angles des axes de ce réseau, les paramètres et les angles des axes du réseau polaire, pour obtenir l'angle, que nous appellerons PP′, des normales aux deux plans. On peut ainsi écrire les formules

$$\sin PP' = \frac{D.S(uvw)}{P[pqr].P[p'q'r']}$$

ou encore

$$\sin PP' = \frac{E^2D.p[uvw]}{s(pqr).s(p'q'r')}$$

$$\cos PP' = \frac{\left.\begin{matrix} pp'A^2 \\ +qq'B^2 \\ +rr'C^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} (pq'+p'q)\,AB\cos XY \\ +(pr'+p'r)\,AC\cos XZ \\ +(qr'+q'r)\,BC\cos YZ \end{matrix}\right.}{\sqrt{\left.\begin{matrix} p^2A^2 \\ +q^2B^2 \\ +r^2c^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2pqAB\cos XY \\ +2prAC\cos XZ \\ +2qrBC\cos YZ \end{matrix}\right.} \times \sqrt{\left.\begin{matrix} p'^2A^2 \\ +q'^2B^2 \\ +r'^2C^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2p'q'AB\cos XY \\ +2p'r'AC\cos XZ \\ +2q'r'BC\cos YZ \end{matrix}\right.}}$$

Quant à la formule qui donne tg PP′, en remarquant que

$$BC\sin YZ = Ea$$
$$AC\sin XZ = Eb$$
$$AB\sin XY = Ec$$

elle peut s'écrire

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{ED\sqrt{\left.\begin{matrix} u^2a^2 \\ +v^2b^2 \\ +w^2c^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} 2uv.ab\cos\zeta \\ +2uw.ac\cos\eta \\ +2vw.bc\cos\xi \end{matrix}\right.}}{\left.\begin{matrix} pp'A^2 \\ +qq'B^2 \\ +rr'C^2 \end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix} (pq'+p'q)\,AB\cos XY \\ +(pr'+p'r)\,AC\cos XZ \\ +(qr'+q'r)\,BC\cos YZ. \end{matrix}\right.}$$

Remarques sur la formule qui donne tg PP′. — Si nous examinons l'expression de tg PP′, nous voyons que, lorsque les faces dont on veut trouver les inclinaisons, font partie de la même zone, u,v,w, étant les mêmes pour tous les plans de la même zone ; si P_1, P_1' sont deux plans faisant partie de la même zone que P et P′, on aura symboli-

quement :

$$\frac{\operatorname{tg} PP'}{\operatorname{tg} P_1P_1} = \frac{\Sigma p_1p'_1A^2 + \Sigma(p_1q'_1 + p'_1q_1)\,AB\cos XY}{\Sigma pp'A^2 + \Sigma(pq' + p'q)\,AB\cos XY}$$

Cette remarque peut simplifier les calculs dans beaucoup de cas.

On peut encore remarquer que si la maille du système réticulaire est un cube, les lignes trigonométriques, de même que les paramètres des axes, disparaissent. Le rapport des deux tangentes est donc rationnel, puisque les quantités D, D', p, p', p_1, p'_1 etc., sont entières.

Certains cristallographes allemands admettent en outre, comme une loi expérimentale, que le rapport des deux tangentes doit toujours être rationnel. Cette prétendue loi expérimentale n'aurait sans doute rien d'impossible, bien qu'on ne voie point les raisons théoriques qui la rendraient vraisemblable. On peut demander seulement que l'observation l'établisse nettement. Or si l'on consulte l'ouvrage de Naumann[1], on voit qu'on est obligé d'accepter pour rationnels des rapports tels que $\frac{11}{40}$, $\frac{17}{90}$, $\frac{13}{60}$, $\frac{1}{51}$, $\frac{8}{45}$.

Il paraît évident que l'on trouverait des rapports analogues, même si la loi était fausse. En réalité, à cause de l'imperfection inévitable de nos mesures, nous ne pouvons démontrer qu'un nombre observé est rationnel que lorsqu'il est en même temps simple. Ce n'est pas le cas pour les rapports que je viens de citer, et je ne crois pas que la loi dont j'ai parlé puisse être regardée comme expérimentalement démontrée.

Angles formés avec les plans coordonnés du réseau polaire, par les plans qui passent par une rangée de ce réseau et les axes coordonnés. — Si, par l'origine des coordonnées, on décrit une sphère de rayon arbitraire, on appellera *pôle d'une rangée*, le point où elle vient rencontrer la surface de la sphère.

Le grand cercle mené par deux pôles est l'intersection avec la sphère d'un plan réticulaire passant par l'origine.

Le pôle d'une rangée du réseau primitif peut être désigné par le symbole $[ghk]$ de cette rangée, ou par le symbole $(ghk)_*$ qui convient au plan du réseau polaire normal à cette rangée.

Soient X, Y, Z, (fig. 12) les pôles des trois axes du réseau polaire, et P le pôle de la rangée $[pqr]_*$ du même réseau. PX est un plan réticu-

[1] *Elemente der Theoretischen Kristallographie*, von Dr Carl Friedrich Naumann. — 1856. — Pages 234-235.

laire dont le symbole est $(or\bar{q})_\pi$ et qui est perpendiculaire à la rangée $[or\bar{q}]$ du réseau primitif. La normale au plan XY est aussi une rangée du réseau primitif dont le symbole est [001]. L'angle de ces deux rangées mesure l'angle dièdre PXY, et le sinus en a pour expression :

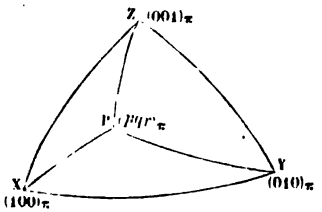


Fig. 12.

$$\sin PXY = \frac{r.s(100)}{c.p[or\bar{q}]}.$$

On aura de même

$$\sin PXZ = \frac{q.s(100)}{b.p[or\bar{q}]}$$

d'où l'on tirera

$$\frac{\sin PXY}{\sin PXZ} = \frac{r}{q}\,\frac{b}{c} = \frac{r}{c} : \frac{q}{b}$$

On aurait évidemment de même

$$\frac{\sin PYX}{\sin PYZ} = \frac{r}{p}\,\frac{a}{c} = \frac{r}{c} : \frac{p}{a}$$
$$\frac{\sin PZX}{\sin PZY} = \frac{q}{p}\,\frac{a}{b} = \frac{q}{b} : \frac{p}{a}$$

Angles d'une rangée du réseau polaire avec les axes du réseau primitif. — Soient toujours X, Y, Z (fig. 13) les pôles des axes coordonnés du réseau polaire; x, y, z les pôles des axes du réseau primitif; le triangle sphérique XYZ est le polaire du triangle xyz. Par le pôle P, $[pqr]_\pi$, nous menons les trois arcs Px, Py, Pz, que nous prolongeons jusqu'à la rencontre avec les côtés de XYZ en x', y', z'.

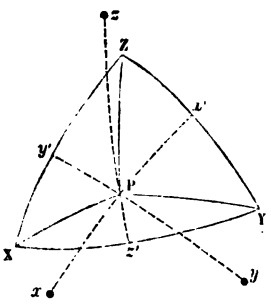


Fig. 13.

Dans les triangles rectangles PXz' et PXy' on a :

$$\sin Pz' = \sin PX \sin PXY$$
$$\sin Py' = \sin PX \sin PXZ$$

d'où l'on déduit

$$\frac{\cos Pz}{\cos Py} = \frac{\sin Pz'}{\sin Py'} = \frac{\sin PXY}{\sin PXZ} = \frac{r}{c} : \frac{q}{b}$$

De même on trouvera

$$\frac{\cos Pz}{\cos Px} = \frac{r}{c} : \frac{p}{a}$$

ou enfin

$$\frac{\cos Pz}{\frac{r}{c}} = \frac{\cos Py}{\frac{q}{b}} = \frac{\cos Px}{\frac{p}{a}}$$

Relations qui lient quatre pôles situés sur la même zone. — Nous remarquons que la formule qui donne le sinus de l'angle de deux plans contient au numérateur la quantité E^5 qui est constante pour tous les plans du réseau, et la quantité $p[uvw]$ qui est le paramètre de l'axe de la zone déterminée par les deux plans. Cette dernière quantité est la même pour tous les plans faisant partie de la même zone.

Fig. 14.

Supposons sur le grand cercle de la zone quatre pôles P_1, P_2, P_3, P_4 (fig. 14). La remarque précédente montre que l'on peut poser

$$\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_3} = \frac{D_{1.2}}{D_{2.3}} \cdot \frac{s_2.s_3}{s_1.s_2} = \frac{D_1 s_3}{D_{2.3} s_1}$$

en désignant d'une manière générale par $D_{m.n}$ le plus grand commun diviseur des binômes formés avec les caractéristiques de P_m et P_n, et en posant pour abréger :

$$s_m = s\,(g_m h_m k_m).$$

Si nous prenons 4 pôles, nous aurons évidemment

$$\frac{\sin P_1P_2 . \sin P_3P_4}{\sin P_1P_3 . \sin P_2P_4} = \frac{D_{1.2} . D_{3.4}}{D_{2.3} . D_{2.4}} \cdot \frac{s_1.s_3.s_2.s_4}{s_1.s_2.s_3.s_4} = \frac{D_{1.2} . D_{3.4}}{D_{2.3} . D_{2.4}}$$

d'où l'on tire

$$C = \frac{D_{3.4}}{D_{2.4}} = \frac{D_{2.3}}{D_{1.2}} \cdot \frac{\sin P_1P_2 . \sin P_3P_4}{\sin P_1P_3 . \sin P_2P_4}$$

On déduit de cette formule un moyen de trouver les caractéristiques de P_4, lorsqu'on connaît celles de P_1, P_2, P_3, et les inclinaisons mutuelles des 4 faces.

On a en effet :

$$h_2k_4-h_4k_2=uD_{2,4} \qquad k_2g_4-g_2k_4=vD_{2,4} \qquad g_2h_4-g_4h_2=wD_{2,4}$$
$$h_3k_4-h_4k_3=uD_{3,4} \qquad k_3g_4-g_3k_4=vD_{3,4} \qquad g_3h_4-g_4h_3=wD_{2,4}$$

u, v, w étant les caractéristiques de l'axe de zone.

On en déduit les 3 équations

$$\frac{h_2k_4-h_4k_2}{h_3k_4-h_4k_3}=\frac{k_2g_4-g_2k_4}{k_3g_4-g_3k_4}=\frac{g_2h_4-g_4h_2}{g_3h_4-g_4h_3}=C'=\frac{1}{C}.$$

Ces 3 équations du premier degré se transforment aisément en celles-ci :

$$\frac{k}{k_2-C'k_3}=\frac{h_4}{h_2-C'h_3}=\frac{g_4}{g_2-C'g_3}.$$

Les dénominateurs, débarrassés, s'il y a lieu, de leurs facteurs communs, seront donc les caractéristiques cherchées du plan dont le pôle est P_4.

Ce procédé de calcul est remarquable, car il permet de déterminer les caractéristiques du plan sans qu'on ait besoin de recourir aux données qui fixent les dimensions de la maille du système réticulaire.

Réciproquement, si l'on connaît les caractéristiques des 4 pôles et les angles mutuels de trois d'entre eux, P_1, P_2, P_3, on connaîtra $D_{3,4}$ et $D_{2,4}$ et par conséquent C ; on aura alors :

$$C=\frac{D_{3,4}}{D_{2,4}}=\frac{D_{1,3}}{D_{1,2}}\cdot\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_1P_3}\cdot\frac{\sin P_3P_4}{\sin(P_2P_3+P_3P_4)};$$

d'où en posant :

$$m=\frac{D_{3,4}}{D_{2,4}}\cdot\frac{D_{1,2}}{D_{1,3}}\cdot\frac{\sin P_1P_3}{\sin P_1P_2},$$

ce qui est une quantité connue, on tire aisément :

$$\operatorname{tg} P_3P_4=\frac{m\sin P_2P_3}{1-m\cos P_2P_3},$$

on peut donc calculer l'angle P_3P_4.

On peut encore poser

$$m = \operatorname{tg} \theta$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin P_3P_4}{\sin P_2P_4} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

d'où l'on tire, par des transformations très-simples :

$$\frac{\sin P_2P_4 - \sin P_3P_4}{\sin P_2P_4 + \sin P_3P_4} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} P_3P_2}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (P_2P_4 + P_3P_4)} \frac{\cos \theta - \sin \theta}{\cos \theta + \sin \theta} = \operatorname{tg} (45^\circ - \theta).$$

Or on a

$$P_2P_4 + P_3P_4 = 2P_2P_4 + P_2P_3 ;$$

l'équation précédente se transforme donc en celle-ci :

$$\operatorname{tg} (P_3P_4 + \tfrac{1}{2} P_2P_3) = \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} P_2P_3 \operatorname{cotg} (45 + \theta),$$

formule immédiatement calculable par logarithmes, et que l'on peut employer pour calculer P_3P_4.

Symboles à quatre caractéristiques. — Dans le but de rendre plus symétriques certaines formules, on peut, aux trois caractéristiques d'un nœud, d'une rangée ou d'un plan, en ajouter une quatrième se déduisant des trois autres suivant une loi connue. C'est ainsi qu'aux trois caractéristiques pqs se rapportant respectivement aux trois axes x, y, z, on peut en ajouter une quatrième, telle que

$$p + q + s + r = 0.$$

Si les caractéristiques se rapportent à un plan, r a une signification géométrique remarquable. Soit, en effet, $0u$ une direction allant de l'origine au nœud $\bar{1}\,\bar{1}\,\bar{1}$; la caractéristique du plan par rapport à $0u$ est (voir page 22) égale à $-p-q-s$, c'est-à-dire à la caractéristique auxiliaire r.

On pourrait aussi prendre cette caractéristique r telle que

$$p + q + r = 0.$$

Il serait alors aisé de voir que si pqs sont les caractéristiques d'un plan, r est la caractéristique de ce plan par rapport à une rangée $0u$ menée suivant le prolongement de la diagonale du parallélogramme construit sur a et b, c'est-à-dire joignant l'origine au nœud $\bar{1}\,\bar{1}\,0$.

Si nous supposons que l'axe des z est perpendiculaire sur le plan xy,

la formule qui donne le cosinus de l'angle PP′ formé par les normales menées à deux plans (pqs) et $(p'q's')$ est

$$\cos PP' = \frac{pp'A^2 + qq'B^2 + ss'C^2 + (pq' + p'q)\ AB \cos XY}{\sqrt{p^2A^2 + q^2B^2 + s^2C^2 + 2pqAB \cos XY}\ \sqrt{p'^2A^2 + q'^2B^2 + s'^2C^2 + 2p'q'AB \cos XY}}.$$

La rangée qui, *dans le réseau polaire*, va de l'origine au nœud $\bar{1}\,1\,0$, est perpendiculaire au plan $(\bar{1}\,1\,0)$ du réseau primitif, c'est-à-dire au plan ZOu; elle est donc perpendiculaire à Ou. Appelons F′ le paramètre de cette rangée, on a

$$F'^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos XY.$$

Portons dans cos PP′ la valeur de AB cos XY déduite de cette équation, et introduisons les nombres r et r' qui satisfont aux relations $p + q = r$, $p' + q' = -r'$, il vient

$$\cos PP' = \frac{ss'C^2 - A^2\,\frac{pr' + p'r}{2} - B^2\,\frac{qr' + q'r}{2} - F'^2\,\frac{pq' + p'q}{2}}{\sqrt{s^2C^2 - prA^2 - qrC^2 - pqF'^2}\ \sqrt{s'^2C^2 - p'r'A^2 - q'r'C^2 - p'q'F'^2}}.$$

La formule qui donne tg PP′ est :

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{ED\sqrt{u^2a^2 + v^2b^2 + w^2c^2 + 2uv\,ab \cos xy}}{pp'A^2 + qq'B^2 + ss'C^2 + (pq' + p'q)\,AB \cos XY}$$

ou encore

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{D\sqrt{w^2A^2B^2 \sin^2 XY + C^2(u^2B^2 + v^2A^2 - 2uv\,AB \cos XY)}}{pp'A^2 + qq'B^2 + ss'C^2 + (pq' + p'q)\,AB \cos XY}.$$

Appelons F le paramètre de la rangée qui, dans le réseau polaire, va de l'origine au nœud 110, nous aurons

$$F^2 = A^2 + B^2 + 2AB \cos XY.$$

Si nous portons au numérateur la valeur de 2AB cos XY déduite de cette équation, et au dénominateur la valeur de AB cos XY déduite de celle qui donne F′², en appelant t la quatrième caractéristique de la zone $[uvw]$ satisfaisant à la relation $u + v + t = 0$, il vient :

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{D\sqrt{w^2A^2B^2 \sin^2 XY - C^2(vtA^2 + utB^2 + uvF^2)}}{ss'C^2 - A^2\,\frac{pr' + p'r}{2} - B^2\,\frac{qr' + q'r}{2} - F'^2\,\frac{pq' + p'q}{2}}.$$

Il serait aisé, en suivant une marche analogue à celle qu'on a suivie pour trouver cos PP′, de voir qu'on a :

$$\frac{1}{E^2} s^2(pqrs) = -prA^2 - qrB^2 - pqF'^2 + s^2C^2.$$

Si l'angle $xy = 120°$, les trois axes x, y, u font entre eux des angles égaux à 120°.

Si l'on suppose en outre $a = b$, et si l'on appelle h le paramètre de l'axe des z, on a

$$A = B = \frac{m}{a} \qquad C = \frac{m}{h}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$F^2 = 2A^2(1 + \cos 60°) = 3A^2 \qquad F'^2 = 2A^2(1 - \cos 60°) = A^2.$$

Les formules précédentes deviendront donc :

$$\cos PP' = \frac{\frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}s^2 + \frac{1}{2}(pp' + qq' + rr')}{\sqrt{\frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}s^2 - pr - qr - pq}\sqrt{\frac{3}{4}\frac{a^2}{h^2}s'^2 - p'r' - q'r' - p'q'}}$$

ou, en remarquant que $p^2 + q^2 + r^2 + 2pr + 2qr + 2pq = 0$,

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}ss' + pp' + qq' + rr'}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s^2 + p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2}}$$

On aurait de même :

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{D\sqrt{3\frac{a^2}{h^2}(t^2 - 3uv) + 3w^2}}{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}ss' + pp' + qq' + rr};$$

et enfin :

$$s^2(pqrs) = \frac{E^2}{2}\left(p^2 + q^2 + r^2 + \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s^2\right)$$

CHAPITRE III

THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA SYMÉTRIE DES POLYÈDRES ET DES RÉSEAUX

Un corps cristallisé dont la constitution intérieure présente l'arrangement réticulaire que nous avons étudié dans le chapitre précédent, est nécessairement limité par une surface que nous pouvons toujours considérer comme passant par les centres de gravité des dernières molécules du corps et, par conséquent, comme formée par un nombre plus ou moins considérable de plans réticulaires. Si le nombre des plans réticulaires qui composent la surface était très-grand, la limite du corps serait courbe. En fait, l'observation la moins approfondie montre que le nombre des plans réticulaires limites est généralement très-restreint, et le caractère le plus saillant des substances cristallisées est la nature polyédrique de leur surface.

On peut se demander quels sont, parmi tous les plans réticulaires du réseau, ceux que la nature choisit pour servir de limite au cristal. Nous examinerons plus tard cette question, et nous reconnaîtrons que la théorie est insuffisante pour en donner la solution. Mais un raisonnement très-simple va nous fournir une donnée importante sur la configuration du polyèdre cristallin extérieur.

Supposons que dans le milieu où, sous l'action de causes multiples et inconnues, le cristal se développe, un plan réticulaire (*ghk*) vienne former un des plans limites du cristal. Ces causes, quelles qu'elles soient, dépendent uniquement de la constitution du milieu cristalligène qui est homogène, et de la façon dont la matière est répartie dans le milieu solide cristallin.

Or il peut arriver que la répartition de la matière dans ce dernier milieu se fasse d'une manière symétrique, et que, pour prendre un

exemple simple, dans ce milieu, supposé indéfini, la matière soit répartie symétriquement de part et d'autre d'un certain plan. Toutes les causes qui tendent à produire une certaine face limite, d'un côté du plan de symétrie, se retrouveront alors pour produire, de l'autre côté de ce plan, une face symétrique. On voit donc que le polyèdre cristallin présentera un genre de symétrie identique à celui du milieu cristallin. Conclusion très-importante, puisqu'elle nous permet de conclure de la symétrie observable du polyèdre, la symétrie cachée du milieu.

Il faut d'ailleurs remarquer, pour qu'il ne reste pas d'ambiguïté dans l'esprit, que la symétrie dont il est ici question ne peut pas être celle que l'on a l'habitude de considérer dans la géométrie élémentaire. Imaginons, en effet, un polyèdre cristallin possédant un plan de symétrie dans le sens rigoureux de la géométrie, c'est-à-dire tel que si, par un point quelconque, on mène une perpendiculaire au plan de symétrie, et si on la prolonge de l'autre côté de ce plan d'une quantité égale à elle-même, on tombe sur un second point du polyèdre. Il suffira, pour que ce plan de symétrie n'existe plus, que certaines faces prennent des accroissements un peu plus grands que leurs symétriques. C'est ainsi que si le polyèdre est un cube (fig. 15), dans lequel le plan diagonal BDHF est un plan de symétrie, il suffira que les faces ABEF, CDGH soient plus développées que les autres pour que le solide devienne un prisme droit à base rectangle, et que le plan diagonal cesse d'être un plan de symétrie au sens géométrique.

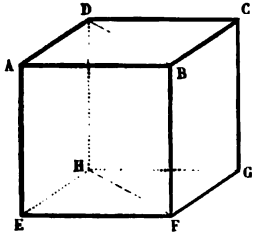


Fig. 15.

Cependant le cristal est limité par le même système de plans réticulaires. La seule différence entre les deux cas, c'est que, dans le système de plans réticulaires parallèles en nombre infini qui se rencontrent dans le réseau, ceux qui forment les faces ne sont pas tous situés à la même distance d'un des nœuds du réseau considéré comme origine. Mais dans le milieu cristallin où tout se répète identiquement autour de chaque nœud, rien ne distingue, dans un système de plans réticulaires, un des plans de son parallèle, et le choix fait par la nature entre tous les plans d'un même système pour en faire des faces limites ne dépend que de circonstances accidentelles qui échappent à la théorie et qu'elle néglige.

En résumé, des deux conditions de la symétrie géométrique, à savoir les directions des faces du polyèdre et les distances de ces faces à un point fixe, on sera conduit, dans la pratique des observations cristallographiques, à négliger la seconde pour ne tenir compte que de la première. En restant strictement dans les considérations morphologiques et laissant provisoirement de côté les autres propriétés physiques du cristal, la symétrie d'un polyèdre cristallin ne dépend donc que des inclinaisons mutuelles des faces qui le composent. Il est d'ailleurs commode, pour l'étude, de ramener dans tous les cas, par la pensée, les plans de ce polyèdre dans une position telle que les deux conditions géométriques de la symétrie soient satisfaites. Cette hypothèse, qui revient à donner au cristal la forme qu'il prendrait si des circonstances accidentelles et variables n'agissaient sur lui au moment de sa formation, est celle que nous ferons constamment dans tout ce qui suivra.

Quoi qu'il en soit, nous sommes, d'après ce qui précède, amenés à rechercher quels sont tous les modes de symétrie que l'on peut rencontrer dans un milieu cristallin; ce seront les seuls que l'on pourra observer dans les polyèdres cristallins. Mais nous sommes obligés, avant d'aborder cette question, de démontrer, sur la symétrie des polyèdres en général et des polyèdres réticulaires en particulier, un certain nombre de théorèmes que nous utiliserons dans la suite.

Définition des axes de symétrie et de leurs ordres. — De la symétrie des polyèdres. — Une figure quelconque étant donnée, si, après une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour d'une certaine droite L, la figure revient en coïncidence avec elle-même, nous dirons que L est un axe de symétrie d'ordre q ou $q^{ème}$. Nous désignerons cet axe par le symbole L^q. Un axe binaire, ternaire, quaternaire, quinaire, sénaire, sera un axe d'ordre 2, 3, 4, 5, 6.

Il est clair que q ne peut être qu'un nombre entier, car si c'était un nombre fractionnaire $\frac{m}{n}$, l'angle dont tournerait l'axe de symétrie pour restituer les sommets du polyèdre serait $\frac{2\pi n}{m}$, et, après un nombre m de rotations semblables, la figure reviendrait dans sa position première. Un point quelconque du polyèdre aurait alors occupé successivement, dans un plan perpendiculaire à l'axe, tous les sommets d'un polygone étoilé, dont les sommets contigus seraient séparés par un angle au

centre égal à $\frac{2\pi}{m}$. En faisant tourner la figure de $\frac{2\pi}{m}$ autour de l'axe, on arriverait donc à restituer tous les sommets, et n serait le véritable indice de l'axe.

Il est d'ailleurs évident que q ne saurait être irrationnel, car dans ce cas le polygone étoilé décrit par chaque sommet aurait un nombre infini de côtés, ce qui ne peut convenir qu'au cas très-particulier de la sphère.

Tout polyèdre qui possède un axe d'ordre pair passant par un centre de symétrie, possède un plan de symétrie passant par le centre et normal à cet axe.

En effet, l'axe étant d'ordre pair, les sommets du polyèdre sont restitués par une rotation de 180° autour de l'axe L (fig. 16). Un sommet A du polyèdre aura donc son symétrique A′ par rapport à L. Mais A et A′ ont chacun leurs symétriques A_1' et A_1 par rapport à C, lesquels sont respectivement les symétriques de A et de A′ par rapport au plan P mené par C perpendiculairement à L.

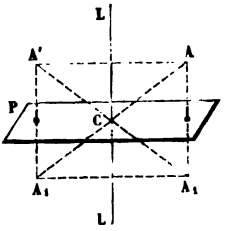


Fig. 16.

Lorsqu'un polyèdre possède un plan et un centre de symétrie, il possède un axe d'ordre pair. La démonstration de ce théorème se ferait d'une manière tout à fait analogue à celle du précédent.

S'il existe deux ou plusieurs axes de symétrie, ces axes et les plans de symétrie, s'il y en a, doivent tous se couper en un même point qui coïncide avec le centre de symétrie, s'il y en a un. Car le centre de gravité des sommets du polyèdre, supposés également pesants, devra se trouver sur chacun des axes de symétrie, sur tous les plans de symétrie, et coïncider avec le centre de symétrie du polyèdre.

Lorsqu'un polyèdre possède q *axes binaires, et* q *seulement, dans un même plan, chaque axe fait avec le plus proche un angle égal à* $\frac{\pi}{q}$.

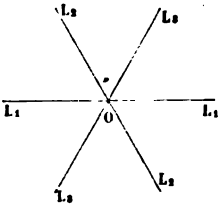


Fig. 17.

S'il en était autrement, en effet, il y aurait un axe de symétrie L_4 (fig. 17), qui ne serait pas la bissectrice de l'angle L_3OL_2 formé par les 2 axes contigus; en faisant tourner le polyèdre de 180° autour de OL_1, L_2 ne viendrait pas coïncider avec L_3, et déterminerait la position d'un nouvel axe de symétrie du polyèdre qui en posséderait plus de q dans le même plan, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Tout polyèdre qui possède q *axes binaires dans un même plan possède un axe de symétrie d'ordre* q *perpendiculaire à ce plan.*

Soient, en effet, deux axes binaires OL_1 et OL_2 (fig. 18), faisant entre eux un angle égal à $\frac{\pi}{q}$; S un sommet quelconque du polyèdre, qui par la rotation de 180° autour de L_1, vient coïncider avec le sommet S_1, lequel, à son tour, après la rotation de 180° autour de L_2, vient coïncider avec S_2. Projetons sur le plan $L_1 L_2$ les trois sommets S, S_1, S_2 en s, s_1, s_2. On a

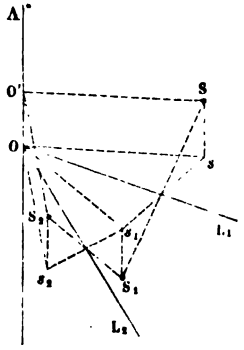


Fig. 17.

$$sOL_1 = s_1OL_1, \qquad s_1OL_2 = s_2OL_2.$$

et par conséquent

$$sOs_2 = 2.L_1OL_2 = \frac{2\pi}{q}.$$

Si l'on mène par O une perpendiculaire OA au plan $L_1 L_2$, si l'on prend $OO' = Ss = S_2s_2$, O'S est parallèle à Os, $O'S_2$ est parallèle à Os_2, et

$$SO'S_2 = sOs_2 = \frac{2\pi}{q}.$$

Donc, par une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de OA, on obtient le même résultat que par deux rotations successives de 180° autour de OL_1 et OL_2; OA est donc un axe de symétrie d'ordre q.

Remarquons que les angles mutuels des axes binaires étant égaux à $\frac{\pi}{q}$, une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de A n'amène en coïncidence les axes binaires que de deux en deux. Si q est impair, après q rotations successives ou un tour complet de la circonférence, l'axe binaire L_1 ne viendra en coïncidence qu'avec une des deux directions que chacun des autres axes binaires forme à partir du centre; et comme OL_1 vient en coïncidence q fois avec un axe binaire, il vient successivement en coïncidence avec les q axes binaires. Ces axes ne peuvent donc être distingués les uns des autres que par la position accidentelle que l'on a donnée au polyèdre dans l'espace; nous disons qu'ils sont de même espèce.

Si, au contraire, q est pair, l'axe OL_1 vient en coïncidence, pendant un tour complet autour de OA, avec chacune des deux directions d'un même axe binaire; et comme il ne vient que q fois en coïncidence avec un axe binaire, il y a la moitié des axes binaires avec lesquels il ne peut coïncider. On peut donc distinguer des axes binaires de deux espèces; nous distinguerons les uns par le symbole L^2, les autres par le symbole L'^2. Les axes binaires d'une espèce bissèquent les angles formés par les axes binaires de l'autre espèce.

Lorsqu'il y a un nombre total q *de plans de symétrie se coupant suivant une même droite, cette droite est un axe de symétrie dont le numéro d'ordre est* q *ou un de ses multiples.*

En effet les angles dièdres de ces plans sont nécessairement égaux entre eux, sans cela ils se reproduiraient symétriquement l'un par rapport à l'autre, et leur nombre total serait supérieur à q.

Par un point quelconque S du polyèdre (fig. 19), nous menons un plan, pris pour plan de la figure, perpendiculaire à l'intersection commune des plans de symétrie. Ceux-ci viennent le couper suivant des droites également inclinées les unes sur les autres, L'angle que forment ces droites entre elles est égal à $\frac{\pi}{q}$. Le point aura, par rapport à l'une des droites voisines, son homologue en S' et, par rapport à la suivante, son homologue en S''. L'angle S''OS est évidemment égal à $\frac{2\pi}{q}$. La ligne passant en O et perpendiculaire au plan de la figure est donc un axe de symétrie dont la caractéristique est au moins égale à q.

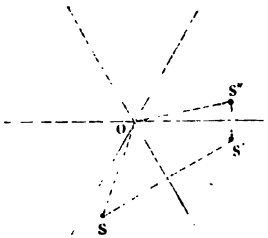


Fig. 19.

Tout polyèdre qui possède un axe d'ordre q *et un axe binaire perpendiculaire possède* q *axes binaires.*

En effet A (fig. 18) étant un axe d'ordre q, et L_1 un axe binaire, si S_2 est un point du polyèdre, S en est un autre, et S_1 un troisième; mais S_1 et S_2 viennent en coïncidence par une rotation de 180° autour de la droite L_2 qui fait avec L_1 un angle égal à $\frac{\pi}{q}$, donc, etc.

On démontrerait d'une manière analogue que *tout polyèdre qui possède un axe d'ordre* q *et un plan de symétrie passant par cet axe possède* q *plans de symétrie.*

De la symétrie propre aux réseaux. — Les théorèmes que nous avons démontrés, dans le paragraphe précédent, s'appliquent à tous les polyèdres quels qu'ils soient. Nous allons maintenant en faire connaître quelques autres qui ne s'appliquent qu'aux systèmes réticulaires.

Il est clair que, par la manière même dont est formé un semblable système supposé indéfini, tous les nœuds sont des centres de symétrie, c'est-à-dire que si l'on joint un nœud N_1 à un autre N, en prolongeant NN_1 de l'autre côté de N d'une quantité égale à elle-même, on trouve un autre nœud N_2.

Une droite sera un axe de symétrie d'ordre q du réseau, lorsque par une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de cette droite, tous les nœuds du réseau sont restitués. Tous les nœuds d'un même réseau étant identiques, l'existence d'un axe de symétrie d'ordre q passant par un nœud, entraîne celle d'un système d'axes du même ordre passant par chacun des autres nœuds.

Tous les axes de symétrie d'un réseau ne passent pas nécessairement par un nœud, mais *si nous menons par un nœud une parallèle à un axe de symétrie, cette parallèle est aussi un axe de symétrie de même ordre.*

Soit en effet O (fig. 20) la trace de l'axe de symétrie d'ordre q sur le plan de la figure supposée perpendiculaire à cet axe, et N un nœud situé dans ce plan. Faisons tourner le réseau de $\frac{2\pi}{q}$ autour de l'axe ; N vient, dans le plan de la figure, en N'. Donnons ensuite au réseau une translation égale et contraire à NN' ; les nœuds de la rangée NN', ainsi que ceux de toutes les rangées parallèles, c'est-à-dire tous ceux du réseau seront restitués. Or on sait, par un théorème bien connu de la cinématique, que la combinaison de cette translation et de cette rotation équivaut à une rotation de même amplitude autour d'un axe parallèle au premier et passant par N, qui est ains un axe de symétrie d'ordre q.

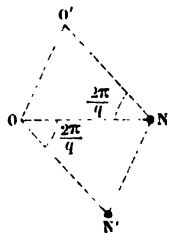


Fig. 20.

Il suffit donc, pour trouver tous les axes de symétrie d'un réseau, de chercher ceux qui passent par les nœuds.

Tout axe de symétrie passant par un nœud est une rangée.

En effet, il est aisé de voir que si l'on prend deux rangées issues d'un même nœud pour les directions de forces composantes, dont les grandeurs seront les paramètres des rangées, la direction de la résul-

tante sera celle d'une rangée dont le paramètre sera la grandeur de la résultante ou l'un de ses sous-multiples. Les rangées se composent donc entre elles comme des forces.

Or si nous appelons N (fig. 21) le nœud situé sur l'axe de symétrie L d'ordre q, et si nous imaginons une rangée dont NN_1 est le paramètre, cette rangée en nécessite q autres ayant même paramètre, issues de N, et disposées symétriquement autour de l'axe L. La résultante de toutes ces rangées sera dirigée suivant l'axe qui est par conséquent une rangée.

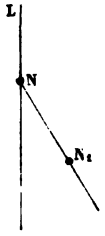


Fig. 21.

Lorsqu'un réseau possède un axe de symétrie, tout plan mené par un nœud perpendiculairement à cet axe est un plan réticulaire.

Ce théorème est évident lorsque l'axe de symétrie a un indice supérieur au second, car alors la présence d'un nœud dont le plan est normal à l'axe, entraîne celle de deux autres nœuds au moins.

Quant aux axes binaires, la démonstration est aisée. En effet, tout nœud ayant son symétrique par rapport à l'axe, il y a tout un système de rangées normales à cet axe; et si par un nœud quelconque, on mène des parallèles à toutes ces rangées, on détermine un plan réticulaire normal.

Dans un réseau à axe de symétrie binaire, si l'on considère les deux plans réticulaires limitrophes d'un plan réticulaire normal à l'axe, le réseau de l'un de ces plans coïncide avec la projection orthogonale du réseau de l'autre. Le théorème est évident, puisque, en vertu d'un des théorèmes précédents, le plan compris entre les deux limitrophes est un plan de symétrie du système réticulaire.

Quant au réseau de ce plan intermédiaire, si ses nœuds ne coïncident pas avec les projections orthogonales de ceux des deux autres, ils coïncident avec la projection des centres, ou celle des milieux des côtés des parallélogrammes générateurs.

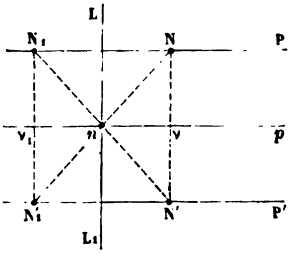


Fig. 22.

En effet représentons une coupe du système réticulaire faite par un plan passant par un nœud n (fig. 22) du plan intermédiaire p, par l'axe binaire LL passant en n, et par un nœud N d'un des plans limitrophes P. Soient N_1 le

symétrique de N par rapport à LL_1, N′ et N'_1 les symétriques de N et N_1 par rapport à p. Il est clair que n est le centre du rectangle $NN'N'N'_1$ et est à égale distance des points ν, ν_1, qui sont les projections sur p de N et N_1. Le point n se trouvera donc au milieu de la projection des côtés, ou au milieu de celle des diagonales du parallélogramme générateur.

Un théorème capital dans la question que nous avons à résoudre est le suivant :

Un réseau ne peut posséder que des axes de symétrie d'ordre 2, 3, 4 ou 6.

Par un nœud N (fig. 23), menons un plan normal à l'axe de symétrie passant en ce point, et dans ce plan qui sera celui de la figure, prenons un nœud n, tel qu'aucun autre nœud ne soit plus voisin de N.

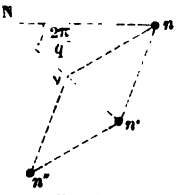


Fig. 23.

Si l'ordre de l'axe est q, en faisant tourner le réseau de $\frac{2\pi}{q}$ autour de N, nous obtiendrons dans le plan normal qui contient n, un autre nœud n'; puis, par une seconde rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de l'axe, un troisième nœud n'', etc. Nous construisons un parallélogramme sur les deux côtés nn' et $n'n''$, l'autre sommet ν du parallélogramme est encore un nœud du réseau, et il faut chercher tous les cas qui sont compatibles avec la supposition que n est à la distance minimum de N, c'est-à-dire pour lesquels $N\nu$ est supérieur ou au plus égal à Nn que nous pouvons prendre comme unité. Or on a

$$N\nu = 1 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{q}$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{array}{ll} \text{pour } q=3 & N\nu = -2 \\ q=4 & N\nu = -1 \\ q=5 & N\nu = -\frac{3-\sqrt{5}}{2} = -0{,}382. \\ q=6 & N\nu = 0 \\ q>6 & N\nu > 1 \end{array}$$

La formule ne s'applique pas au cas de $q=2$, qui est évidemment possible. Le théorème est donc démontré.

Nous terminerons en démontrant pour un réseau la réciproque d'un des théorèmes que nous avons démontrés pour les polyèdres quelques.

Si un réseau possède un axe de symétrie d'un ordre q *supérieur à* 2, *il possède* q *axes binaires dans un plan perpendiculaire à celui-ci.*

Soient en effet LL_1 (fig. 24) l'axe de symétrie et N_1 un nœud sur cet axe; nous prenons le plan réticulaire normal limitrophe de celui qui passe par N_1, et dans ce plan, un nœud N_2, le plus rapproché de l'axe qu'il se peut. En vertu de la symétrie, il y a un certain nombre d'autres nœuds N'_2, N''_2, etc., avec lesquels N_2 vient se superposer par ces rotations successives de $\frac{2\pi}{q}$ autour de LL_1.

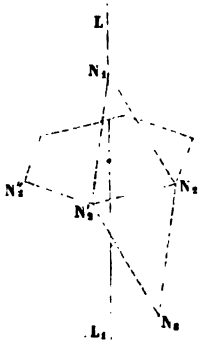


Fig. 21.

LL_1 ne peut être que ternaire, sénaire ou quaternaire. Dans ces 3 cas, le côté $N_2N'_2$ est un axe binaire du réseau plan $N_2N'_1N''_2$. De plus, en faisant tourner autour de $N_2N'_2$ tout le système réticulaire, N_1 vient coïncider avec le point N_3 qui se trouve dans le plan réticulaire limitrophe de $N_2N'_2N''_2$ et est obtenu en construisant un parallélogramme, sur $N_1N_2N'_2$. Donc $N_2N'_2$ est un axe binaire du système réticulaire, puisque, par une rotation de 180° autour de cette ligne, trois rangées conjuguées du réseau reviennent en coïncidence.

Si l'axe est ternaire, les points $N_2N'_2N''_2$ forment un triangle équilatéral, et il y a trois axes binaires ; si l'axe est sénaire, ils forment un hexagone, et il est aisé de voir que non-seulement les côtés de cet hexagoue sont des axes binaires, mais qu'il en est de même des lignes qui joignent les sommets de cet hexagone de deux en deux; il y a donc six axes binaires. Enfin, si l'axe est quaternaire, les points $N_2N'_2$ forment un carré dont les côtés et les diagonales sont des axes binaires. Le théorème se trouve donc démontré.

CHAPITRE IV

CLASSIFICATION DES ÉDIFICES MOLÉCULAIRES SUIVANT LE GENRE DE SYMÉTRIE QU'ILS POSSÈDENT

Classification des réseaux d'après leur mode de symétrie. — Nous allons chercher tous les modes de symétrie dont un réseau est susceptible.

Un premier mode est caractérisé par l'absence complète d'axes de symétrie qui entraîne celle des plans de symétrie, car le réseau possédant toujours un système de centres de symétrie, la présence d'un plan de symétrie entraînerait celle d'un axe d'ordre pair. Nous désignerons ce mode de symétrie par le symbole

$$OL, C, OP.$$

Un second mode est celui où le réseau possède un seul axe binaire, ce qui n'entraîne que l'existence d'un plan de symétrie perpendiculaire. Ce mode est désigné par le symbole

$$L^2, C, P.$$

Il nous faut maintenant supposer que le réseau possède un nombre quelconque d'axes binaires, et nous distinguerons deux cas, suivant qu'il y a ou non des axes d'ordre supérieur à 2.

Supposons d'abord qu'il n'y ait pas d'axes d'un ordre supérieur à 2. Il faudra que, dans un même plan, il n'y ait pas plus de deux axes binaires, et ces deux axes binaires rectangulaires entraîneront la présence d'un troisième axe binaire perpendiculaire à leur plan. On aura donc trois axes binaires rectangulaires entre eux, et d'espèces différentes.

On ne peut pas avoir d'autre axe binaire, car s'il y en avait un quatrième, il ferait, avec l'un quelconque des trois premiers, un angle inférieur à 90°, et l'on aurait alors dans le plan de ces deux axes, plus de deux axes binaires, ce qui entraînerait l'existence d'un axe d'ordre supérieur au 2e. Ce mode de symétrie est donc caractérisé par trois axes binaires rectangulaires dont la présence, jointe à celle d'un centre de symétrie, nécessite celle de trois plans de symétrie respectivement normaux aux trois axes. Il est désigné symboliquement par

$$L^2,\ L'^2,\ L''^2,\ C,\ P,\ P',\ P''.$$

S'il existe des axes de symétrie d'un ordre supérieur à 2, nous distinguerons encore deux cas, suivant qu'il y a seulement un de ces axes ou qu'il y en a plusieurs. Supposons qu'il n'y ait qu'un axe d'un ordre supérieur à 2.

L'ordre de l'axe peut être égal à 3, et il y a alors trois axes binaires perpendiculaires, de même espèce, et faisant entre eux des angles de 60° ou de 120°. Le symbole est :

$$\Delta^3,\ 3L^2,\ C,\ 3P.$$

L'ordre de l'axe peut être égal à 6, et il y a alors 6 axes binaires, de deux espèces différentes ; les axes binaires d'une espèce faisant des angles de 30° avec les axes binaires de la seconde. Le symbole est :

$$\Delta^6,\ 3L^2,\ 3L'^2,\ C,\ \Pi,\ 3P,\ 3P'.$$

L'ordre de l'axe peut être égal à 4, et il y a alors 4 axes binaires, de deux espèces différentes ; les axes d'une espèce faisant des angles de 45° avec ceux d'une autre. Le symbole est :

$$\Delta^4,\ 2L^2,\ 2L'^2,\ C,\ \Pi,\ 2P,\ 2P'.$$

Nous n'avons donc plus à examiner que le cas où il y a plusieurs axes de symétrie d'un ordre supérieur à 2.

Nous prendrons la question à un point de vue plus général, et nous chercherons tous les modes de symétrie que peut posséder, non plus un réseau, mais un polyèdre quelconque, dans lequel on suppose la présence de plus d'un axe de symétrie d'un ordre supérieur à 2.

Imaginons une sphère décrite du point de concours commun des axes de symétrie comme centre ; ceux-ci seront caractérisés par leurs

points d'intersection avec cette sphère, que nous appellerons les pôles des axes.

Parmi les axes d'ordre supérieur au second, il y en a toujours plusieurs de même ordre : car supposons qu'il y en ait deux d'ordre différent, l'un d'ordre p, l'autre d'ordre q, la rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour du second ramènera le polyèdre en coïncidence avec sa première position ; l'axe d'ordre p aura pris une direction qui ne coïncide pas avec la première, puisque q est plus grand que 2, et qui doit être celle d'un second axe d'ordre p.

Parmi tous les axes d'ordre égal à p, nous en choisissons deux, dont les pôles P_1 et P_2 (fig. 25) font entre eux le plus petit angle possible. Nous faisons tourner le polyèdre de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2; P_1 vient en P_3, et P_3 est le pôle d'un axe d'ordre p. Nous faisons tourner de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_3; P_2 vient en P_4 qui est encore le pôle d'un axe d'ordre p, et ainsi de suite. Les pôles P_1, P_2, P_3... sont tous sur un petit cercle dont je désigne le pôle par la lettre Q. Après p rotations successives autour de chacun des sommets P_2, P_3, etc., nous reviendrons au point de départ P_1, car autrement, la dernière rotation amènerait un pôle d'axe d'ordre p, à une distance angulaire de P_1, moindre que celle qui sépare P_2 et P_1, ce qui est contraire à l'hypothèse. Les pôles d'axes d'ordre p ainsi obtenus formeront donc les sommets d'un polygone régulier sphérique ayant Q pour pôle, et $\frac{2\pi}{q}$ pour angle au centre, q étant le nombre des sommets.

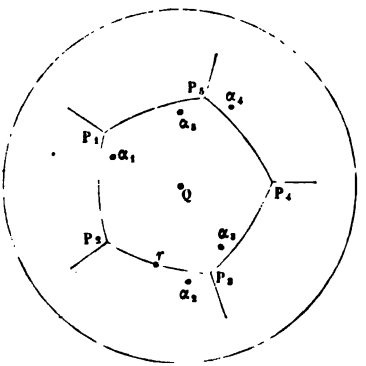


Fig. 25.

Si q est pair, le pôle Q est celui d'un axe de symétrie d'ordre $\frac{q}{2}$. En effet, en faisant tourner le polyèdre dans le sens rétrograde, de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, P_1 vient en P_3, et un point quelconque du polyèdre, α_1, que nous pouvons

toujours supposer sur la sphère dont le rayon est arbitraire, viendra en α_2.

Une nouvelle rotation de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_3, amène P_2 en P_4, de sorte que, après ces deux rotations, P_1P_2 est venu coïncider avec P_3P_4 ; le point α_1 se trouve en α_3, placé, par rapport à P_3P_4, comme α_1 l'est par rapport à P_1P_2. Les deux rotations successives de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2 et de P_3 équivalent donc à une rotation de $\frac{4\pi}{q}$ autour de Q, qui est ainsi le pôle d'un axe d'ordre $\frac{q}{2}$.

Si q est impair, p restant supérieur à 2, nous pouvons répéter le même raisonnement ; mais après q rotations successives autour des sommets du polygone sphérique régulier, P_1, P_2, P_3,.. P_q, le côté P_1P_2 est venu en coïncidence avec P_qP_1, le point α_q étant par rapport à P_qP_1 dans la même position que α_1 par rapport à P_1P_2. Après q rotations successives, lorsque q est impair, on arrive donc au même résultat que par une rotation de $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q qui est ainsi le pôle d'un axe d'ordre q.

Lorsque q est impair, si l'on fait tourner le polyèdre de $\frac{2\pi}{q}$ autour de Q, P_1P_2 vient en P_2P_3, mais on peut obtenir le même résultat en faisant tourner le polyèdre de $\frac{2\pi}{p}$ autour de P_2, ce qui amène P_1 en P_3, puis en faisant tourner de 180° autour du milieu r du côté P_2P_3. Le point r est donc le pôle d'un axe binaire. *Lorsque* q *est impair, les bissectrices des angles formés par deux axes contigus d'ordre* p *sont donc des axes binaires.*

En faisant tourner le polygone régulier sphérique autour de ses sommets P_1, lorsque P_1P_5 coïncide avec P_1P_2, le polygone régulier vient prendre une nouvelle position $P_1P_3P'_4P'_3P'_2$ et chacun des sommets est encore le pôle d'un axe d'ordre p. En faisant tourner le nouveau polygone autour d'un de ses sommets, il viendra former un nouveau polygone égal au premier et ayant avec lui un côté commun, et ainsi de suite. Or en effectuant ainsi toutes les rotations possibles autour des sommets des polygones successivement formés, on doit nécessairement arriver à couvrir la surface de la sphère de polygones réguliers, égaux et contigus. Autrement, en effet, en continuant les rotations successives, on arriverait à trouver le pôle d'un axe d'ordre p, qui serait plus

rapproché de P_1 que ne l'est P_2, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Le problème est donc ramené à chercher quels sont, parmi les polygones réguliers sphériques, ceux qui, juxtaposés, peuvent recouvrir complètement la surface de la sphère.

On connaît la solution du problème analogue pour le plan, et on sait que les seuls polygones réguliers plans qui peuvent couvrir une surface plane sont le triangle équilatéral, le carré et l'hexagone.

La surface de notre polygone régulier sphérique est

$$S = q \times \frac{2\pi}{p} - \pi(q-2) = 2q\pi\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)$$

Le nombre n des polygones qui recouvriront la sphère sera donné par la relation

$$2nq\pi\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right) = 4\pi.$$

On doit avoir évidemment

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} > 0.$$

Le minimum de p est 3 ; le maximum de $\frac{1}{p}$ est donc $\frac{1}{3}$, et il résulte par conséquent de l'inégalité précédente que le minimum de $\frac{1}{q}$ est $\frac{1}{5}$, ou que le maximum de q est égal à 5. Les seules valeurs possibles de q sont donc

$$q = 3, \qquad q = 4, \qquad q = 5.$$

Le maximum de q étant 3, et l'inégalité étant symétrique en p et q, on verrait de même que les seules valeurs admissibles de p sont

$$p = 3, \qquad p = 4, \qquad p = 5.$$

On voit d'ailleurs aisément que les combinaisons

$$(p=5,\ q=5);\ (p=5,\ q=4);\ (p=4,\ q=5);\ (p=4,\ q=4);$$

ne satisfont pas à l'inégalité, et il ne reste plus à examiner que les 5 com-

binaisons :

$$p=5,\ q=3$$
$$p=3,\ q=5$$
$$p=4,\ q=3$$
$$p=3,\ q=4$$
$$p=3,\ q=3.$$

1° $p=5$, $q=3$. Cette combinaison couvre la surface de la sphère de 20 triangles équilatéraux dont les sommets sont des axes quinaires, dont les pôles sont des axes ternaires, et dont les milieux des côtés sont des axes binaires.

2° $p=3$, $q=5$. Cette combinaison qui rentre évidemment dans la première, s'obtiendrait en joignant, par des arcs de grands cercles, les pôles des triangles précédents. On obtient ainsi 12 pentagones dont les sommets sont des axes ternaires, dont les pôles sont des axes quinaires, et dont les milieux des côtés sont des axes binaires.

Ces combinaisons ont servi de point de départ à M. Élie de Beaumont pour sa théorie célèbre du réseau pentagonal.

3° $p=4$, $q=3$. — Cette combinaison donne 8 triangles équilatéraux, trirectangles et trirectilatères. Les sommets, qui sont ceux de l'octaèdre régulier inscrit, sont des axes quaternaires; les pôles, qui sont les sommets du cube inscrit, sont des axes ternaires; les milieux des côtés, qui sont les points où les lignes qui joignent les milieux des côtés opposés du cube inscrit viennent couper la sphère, sont des axes binaires. Le symbole de la symétrie est

$$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2.$$

4° $p=3$, $q=4$.— Cette combinaison peut rentrer dans la précédente, et s'obtiendra alors en joignant les pôles des triangles précédents. On couvre ainsi la sphère de 6 carrés sphériques, dont les sommets sont des axes ternaires, et les pôles des axes quaternaires.

Mais le nombre des côtés du polygone étant pair, il peut se faire aussi que les sommets restant des axes ternaires, les pôles ne soient que binaires, et le symbole de la symétrie est alors

$$3L^2,\ 4L^3.$$

5° $p=3$ $q=3$. — Avec cette combinaison, on obtient 4 triangles équilatéraux dont les sommets, qui sont ceux du tétraèdre régulier inscrit, sont des axes ternaires; les pôles sont aussi des axes ternaires,

mais il est aisé de voir que le sommet d'un triangle et le pôle d'un autre sont aux extrémités d'un même diamètre. On n'a donc en tout que quatre axes ternaires disposés comme les précédents. On a en outre 3 axes binaires qui correspondent aux sommets de l'octaèdre régulier inscrit et sont disposés comme dans la combinaison précédente.

Cette combinaison rentre donc dans la précédente.

Ainsi, en résumé, la symétrie d'un polyèdre, qui a plus d'un axe de symétrie d'un ordre supérieur à 2, ne peut rentrer, au point de vue des axes de symétrie, que dans l'un des trois cas suivants :

1° $6L^5$, $10L^3$, $15L^2$ — Réseau pentagonal de M. E. de Beaumont.
2° $3L^4$, $4L^3$, $6L^2$ — Axes de symétrie du cube.
3° $3L^2$, $4L^3$. . . . — Axes de symétrie du tétraèdre régulier.

La présence ou l'absence d'un centre de symétrie, ou de plans de symétrie, introduirait d'autres différences dans la symétrie du polyèdre dont il s'agit.

De ces trois modes de symétrie, le premier ne convient point à un réseau qui ne peut contenir d'axes quinaires; le troisième ne convient pas davantage, parce que l'on ne trouverait pas dans un plan perpendiculaire à chaque axe ternaire, trois directions d'axes binaires, comme nous avons démontré que cela est nécessaire pour un réseau.

Il ne reste donc plus que le deuxième cas. Un réseau qui a plus d'un axe d'ordre supérieur à 2, a donc nécessairement 3 axes quaternaires, 4 axes ternaires et 6 axes binaires. Comme il y a des centres de symétrie, il y a des plans de symétrie perpendiculaires à tous les axes d'ordre pair, et le symbole total de la symétrie d'un réseau qui a plus d'un axe d'ordre supérieur à 2, est le suivant :

$$3L^4,\ 4L^3,\ 6L^2,\ C,\ 3P^4,\ 6P^2.$$

En résumé, les réseaux, au point de vue de la symétrie, peuvent se partager en 7 classes différentes dont le mode de symétrie est marqué respectivement par les symboles suivants :

1° $0L$, C, $0P$. . . . . Système asymétrique ou anorthique.
2° L^2, C, P. . . . . Système binaire ou clinorhombique.
3° L^2, L'^2, L''^2, C, P, P', P''. . . . Système terbinaire ou orthorhombique.
4° A^4, $2L^2$, $2L'^2$, C, Π, $2P$ $2P'$. . . Système quadratique.
5° A^3, $3L^2$, C, $3P$ . . . . . Système ternaire ou rhomboédrique.
6° A^6, $3L^2$, $3L'^2$, C, Π, $3P$, $3P'$. . Système sénaire ou hexagonal.
7° $3L^4$, $4L^3$, $6L^2$, C, $3P^4$, $6P^2$. . . Système terquaternaire ou cubique.

Chaque mode de symétrie du réseau détermine ce que nous appelons un *système cristallin.*

De l'holoédrie et de la mériédrie. — Jusqu'ici nous ne nous sommes occupés que de la symétrie du réseau, il faut maintenant étudier la façon dont la répartition de la matière autour de chaque nœud modifie la symétrie de l'*édifice cristallin.*

Cette répartition peut toujours s'exprimer géométriquement par un certain polyèdre, que nous avons appelé polyèdre moléculaire, et dont la symétrie peut appartenir au mode le plus général de symétrie d'un polyèdre quelconque. Pour qu'un élément de symétrie appartienne à l'édifice cristallin, il faut nécessairement qu'il se rencontre à la fois dans le réseau et dans le polyèdre moléculaire.

Il peut se présenter deux cas principaux. Ou bien le polyèdre moléculaire possède *tous* les éléments de symétrie du réseau, et alors l'édifice cristallin et le réseau ont le même mode de symétrie. Un polyèdre cristallin dont un plan réticulaire est une face limite, aura donc *en* même temps comme autres faces tous les plans réticulaires qui se déduisent du premier en vertu de la symétrie du réseau. L'édifice cristallin et le polyèdre cristallin sont dits alors *holoédriques.*

Ou bien le polyèdre moléculaire ne possède qu'une partie des éléments de symétrie du réseau. Les seuls éléments de symétrie de l'édifice cristallin sont alors ceux qui sont communs au polyèdre moléculaire et au réseau. Si un plan réticulaire se présente au nombre des faces du polyèdre cristallin, les plans qui se déduisent de celui-ci en vertu de la symétrie de l'édifice sont les seuls dont la présence est nécessaire parmi les autres faces. L'édifice et le polyèdre cristallin sont dits *mériédriques.*

Les éléments de symétrie qui, se rencontrant dans le réseau, ne se rencontrent pas dans le polyèdre moléculaire, sont les éléments *déficients.* Si c'est le centre de symétrie qui est *déficient,* il manquera dans le polyèdre cristallin limite toutes les faces symétriques, par rapport au centre, de celles qui subsistent, c'est-à-dire la *moitié* des faces qui coexistent nécessairement dans le polyèdre holoédrique. On dit alors que le polyèdre est *hémiédrique.*

On verrait de même que si un plan de symétrie est déficient, et si, après la restitution de ce plan de symétrie, il n'y a plus d'éléments déficients, le polyèdre cristallin est encore *hémiédrique.* Si, après la restitution de ce plan de symétrie déficient, un autre plan de symétrie fait encore défaut, il manque encore un nombre de faces égal au nombre de celles qui ont été restituées, et le polyèdre primitif ne possédait que

le *quart* des faces du polyèdre holoédrique ; il était *tétartoédrique*, etc.

Si les éléments déficients sont des axes de symétrie, il y aura certainement parmi eux au moins un axe binaire, car il est aisé de voir qu'un polyèdre qui possède tous les axes binaires d'un réseau, possède aussi les autres axes. Prenons donc le polyèdre mériédrique et faisons-le tourner autour de l'axe binaire déficient, les faces viendront former un nouveau polyèdre qui, réuni au premier, donnera un polyèdre d'un nombre double de faces, et possédant l'axe binaire déficient. Si ce nouveau polyèdre n'a plus d'axes binaires déficients, il est lui-même le polyèdre holoédrique, et le polyèdre primitif était *hémiédrique*. S'il manque encore un axe binaire, en faisant tourner autour de cet axe le polyèdre dont le nombre de faces est doublé, on obtient un nouveau polyèdre dont le nombre de faces est quadruplé, et si ce polyèdre n'a plus d'axes binaires déficients, le polyèdre primitif était tétartoédrique.

En résumé, le nombre des faces d'un polyèdre mériédrique ne peut être que $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, etc., du polyèdre holoédrique. Dans le premier cas, il est dit *hémiédrique;* dans le second, *tétartoédrique*, etc. L'hémiédrie est le cas le plus fréquent ; la tétartoédrie est rare ; les autres cas ne se rencontrent jamais.

Nous ne connaissons aucun moyen de déduire la forme du réseau de celle du polyèdre moléculaire. Cependant on peut établir certaines relations entre les modes de symétrie de ces deux formes. Il est, par exemple, naturel d'admettre qu'un élément de symétrie de la molécule doit se rencontrer dans le réseau, autant du moins que cela est possible. Il est clair, en effet, qu'un axe de symétrie de la molécule tend à former une rangée du réseau, car si deux molécules se placent bout à bout dans le prolongement de l'axe, toutes les actions mutuelles attractives ou répulsives donnent une résultante dirigée suivant l'axe. Le même raisonnement se répéterait pour le plan de symétrie. On peut donc regarder au moins comme très-vraisemblable la règle suivante : *Parmi les sept systèmes cristallins, les molécules d'une substance donnée qui vient à cristalliser, adopteront celui dont la symétrie offre le plus grand nombre d'éléments communs avec la symétrie qui leur est propre.*

L'expérience paraît d'ailleurs confirmer cette règle, car, si elle n'existait pas, on trouverait des cristaux dans lesquels le réseau serait d'une symétrie très-élevée ; appartiendrait, par exemple, au système cubique, tandis que la molécule aurait la symétrie du système anorthique. Le

polyèdre cristallin n'aurait que la symétrie anorthique, mais les inclinaisons mutuelles des faces seraient au nombre de celles que l'on peut rencontrer entre les plans réticulaires du système cubique. Ce fait, que l'observation pourrait constater, ne paraît pas se produire, au moins généralement.

Quoi qu'il en soit de ces conjectures intéressantes, mais sur lesquelles il serait prématuré d'insister dans l'état actuel de la science, nous pouvons dire avec certitude, et sans le secours d'aucune hypothèse, que *les éléments de symétrie que l'on observe dans le polyèdre cristallin se rencontrent tous à la fois dans le polyèdre moléculaire et dans le réseau.*

Classification des polyèdres cristallins. — Systèmes cristallins. — Nous pouvons maintenant faire, au point de vue de la symétrie, une classification de tous les polyèdres cristallins. Nous les répartirons entre les sept systèmes déduits du mode de symétrie du réseau. Dans chacun de ces systèmes nous rangerons : 1° les polyèdres cristallins qui auront tous les éléments de symétrie du système et qui seront les polyèdres *holoédriques ;* 2° les polyèdres cristallins qui n'auront qu'une partie des éléments de symétrie du système, mais dont la symétrie sera plus riche que celle des systèmes dont la symétrie est inférieure à celle du système considéré, ce seront les polyèdres *mériédriques.*

Si la relation conjecturale que nous avons établie plus haut entre la symétrie du réseau et celle du polyèdre moléculaire était vraie, le mode de classification serait tel que la nature du système cristallin indiquerait immédiatement le mode de symétrie du réseau. La seule chose qu'il nous soit permis d'affirmer, c'est que le réseau fournit une symétrie au moins égale à celle qui caractérise le système.

Nous étudierons, dans les chapitres suivants, la nature des polyèdres cristallins qui peuvent se rencontrer dans chaque système. Pour chacun d'eux, nous aurons à étudier tous les modes possibles du réseau et toutes les formes simples du polyèdre cristallin ; en appelant *forme simple* le polyèdre déterminé par l'association de toutes les faces qui *coexistent nécessairement*, en vertu de la loi de symétrie. Nous aurons à étudier d'ailleurs les formes simples holoédriques et les formes simples mériédriques.

Pour obtenir ces dernières, nous appauvrirons graduellement les éléments de symétrie du système, jusqu'à ce que nous ne puissions plus poursuivre cet appauvrissement sans tomber sur un mode de symétrie caractéristique d'un autre système.

Parmi les éléments de symétrie que l'on peut supprimer, se trouve

le centre de symétrie. Si l'on fait cette suppression, sans en faire aucune autre, on supprime la moitié des faces du polyèdre holoédrique; les faces conservées forment un polyèdre hémiédrique; les faces supprimées en formeraient un autre, qui est évidemment le symétrique inverse du premier par rapport au centre de symétrie. L'un de ces polyèdres est donc l'image du premier vu dans un miroir plan. Ces deux polyèdres ne sont pas, en général, superposables. En effet, s'ils l'étaient, on pourrait amener la superposition en faisant tourner l'un d'eux d'un certain angle autour d'une droite passant par le centre supprimé, et qui serait ainsi un axe de symétrie du polyèdre holoédrique. Or tous les axes de symétrie de ce polyèdre subsistant par hypothèse, dans le polyèdre hémiédrique, une ou plusieurs rotations autour de ces axes amène celui-ci en coïncidence avec lui-même et non avec son inverse.

Si, au lieu de supprimer le centre, on supprime un ou plusieurs axes, parmi lesquels il y a toujours, comme on le sait, au moins un axe binaire, le polyèdre holoédrique sera décomposé encore, dans le cas de l'hémiédrie, en deux polyèdres hémiédriques conjugués, mais superposables. En effet, si l'on fait tourner l'un des deux polyèdres de 180° autour de l'axe binaire déficient, les faces ne reviennent pas en coïncidence avec celles de ce polyèdre, car alors l'axe ne serait pas déficient; elles reviennent donc nécessairement en coïncidence avec celles du polyèdre conjugué.

Si c'est un plan de symétrie que l'on supprime, tous les axes étant conservés, cette suppression est nécessairement accompagnée de celle du centre, car l'existence de tous les axes et celle du centre entraîne celle de tous les plans de symétrie. On rentre donc dans un cas déjà examiné.

Nous pouvons donc dire qu'il y a deux cas principaux d'hémiédrie :

1° L'hémiédrie holoaxe, dans laquelle tous les axes sont conservés; un même polyèdre holoédrique donne alors deux polyèdres conjugués, non superposables, que l'on peut par conséquent distinguer l'un de l'autre autrement que par leur position accidentelle dans l'espace. L'un de ces polyèdres est l'image de l'autre. L'un d'eux étant le polyèdre *droit*, l'autre sera le polyèdre *gauche*.

2° L'hémiédrie non holoaxe; un même polyèdre holoédrique donne deux polyèdres conjugués superposables, que l'on ne peut pas par conséquent distinguer l'un de l'autre autrement que par leur position accidentelle dans l'espace. Ce genre d'hémiédrie se partage lui-même en deux autres suivant que le centre est conservé ou ne l'est pas :

a — si le centre est conservé, chaque face du polyèdre hémiédrique fournit une face parallèle ; c'est ce qu'on appelle la *parahémiédrie ;*

b — si le centre n'est pas conservé, aucune face du polyèdre hémiédrique ne possède sa parallèle ; c'est ce qu'on appelle l'*antihémiédrie*.

Les phénomènes de l'hémiédrie ayant pour cause la forme du polyèdre moléculaire, doivent rester identiques dans tous les polyèdres cristallins d'une même substance. Ces polyèdres peuvent être formés par la juxtaposition de plusieurs formes simples. Mais si l'une de ces formes est hémièdre holoaxe, les autres formes ne peuvent pas présenter un autre genre d'hémiédrie. Une même substance ne peut pas davantage présenter tantôt des polyèdres parahémiédriques, tantôt des polyèdres antihémiédriques. C'est en effet ce que l'observation confirme.

Il semble au premier abord qu'il en doit être de même des polyèdres holoédriques, et que des formes holoédriques ne doivent jamais subsister avec des formes hémiédriques. L'observation montre que cette conclusion n'est point exacte, et l'on en comprend facilement la raison.

Dans une substance hémiédrique, il y a en effet deux façons de concevoir comment un même polyèdre cristallin peut contenir des formes holoédriques coexistant avec des formes hémiédriques.

En premier lieu, nous remarquerons que lorsqu'un cristal est hémiédrique, les deux polyèdres conjugués, dont la réunion donnerait un polyèdre holoédrique, ne coexistent plus *nécessairement;* mais cette coexistence, qui n'est plus nécessaire, reste *possible;* les deux polyèdres conjugués peuvent donc par leur coexistence, donner une forme en apparence holoédrique. Seulement dans ce cas, les faces des deux polyèdres conjugués ne jouent plus le même rôle physique, et en général cette différence s'accuse par des différences physiques observables. C'est ainsi que les faces d'un des polyèdres conjugués étant lisses, celles de l'autre pourront être rugueuses; les faces de l'un des polyèdres étant toutes largement développées, celles de l'autre pourront l'être fort peu, etc. Réciproquement, lorsqu'on observera de semblables différences entre les faces des deux polyèdres conjugués, on devra conclure à l'hémiédrie, malgré l'apparence holoédrique du cristal.

D'un autre côté, il peut se faire que pour certaines formes holoédriques les deux formes hémiédriques conjuguées se confondent, et soient par conséquent identiques avec la forme holoédrique ; de sorte qu'une forme en apparence holoédrique peut appartenir à un cristal hémié-

drique. Nous verrons ultérieurement de nombreux exemples de ce cas particulier.

Notation symbolique. — Avant d'aborder l'étude détaillée de chaque système cristallin, il faut connaître le système de notation symbolique que nous emploierons.

Nous avons déjà vu qu'une rangée d'un réseau est notée $[ghk]$, le paramètre de la rangée étant noté $p[ghk]$. Nous emploierons la même notation pour les arêtes des faces des polyèdres cristallins, qui sont des rangées. Un plan réticulaire du réseau est noté (ghk) comme le sera la face parallèle des polyèdres cristallins ; $s(ghk)$ est l'aire élémentaire du plan réticulaire (ghk).

Toutes ces notations changeront naturellement lorsqu'on changera le système de rangées conjuguées pris pour axes coordonnés, et nous avons vu au moyen de quelles formules on peut passer des notations relatives à un système d'axes à celles qui se rapportent à un autre système.

On cherche ordinairement à choisir le système des trois axes de telle sorte que, par une rotation quelconque autour d'un axe de symétrie, le système d'axes revienne en coïncidence avec lui-même. Lorsqu'il en est ainsi, les trois longueurs interceptées par un même plan sur les trois axes coordonnés sont les mêmes pour tous les plans d'une même forme simple. Les caractéristiques g,h,k de tous ces plans sont donc les mêmes en valeur absolue, et leurs notations symboliques ne diffèrent entre elles que par les signes des coefficients, et par l'ordre dans lequel ces coefficients sont écrits, en suivant toujours la convention déjà faite, que le premier des coefficients se rapporte à l'axe pris comme axe des x, le second à l'axe des y, le troisième à l'axe des z.

Lorsqu'on voudra désigner symboliquement la forme simple, on emploiera la notation $\{ghk\}$ dans laquelle l'ordre des coefficients et leurs signes seront ceux qui conviennent à l'une des faces quelconques de la forme.

Une forme hémiédrique holoaxe sera notée $\lambda\{ghk\}$; la notation deviendra $\lambda_d\{ghk\}$ pour la forme droite, $\lambda_g(ghk)$ pour la forme gauche conjuguée.

Une forme non holoaxe parahémiédrique sera notée $\pi\{ghk\}$; une forme antihémiédrique, $\varkappa\{ghk\}$.

Les cristallographes emploient encore, pour désigner symboliquement les formes simples, un nombre, malheureusement trop grand, d'autres systèmes de notations. Celui que nous venons d'exposer, qui est très-commode pour désigner les plans isolés, l'est beaucoup moins pour noter les formes simples, à cause de l'attention qu'il faut faire à l'ordre des coefficients et à leurs signes. Nous ferons connaître plus tard les divers systèmes de notations usités.

CHAPITRE V

SYSTÈMES DE REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES

Il ne suffit pas de savoir désigner par un symbole chacun des plans d'un polyèdre cristallin ; il convient encore, pour faciliter l'étude, d'en représenter graphiquement la position relative.

On peut à cet effet tracer une perspective de ce polyèdre. On place ordinairement le point de vue à l'infini, et on dirige les lignes projetantes obliquement par rapport aux axes cristallographiques de manière à donner une idée plus nette du relief du solide.

On fait le plus souvent passer le plan de projection par deux des trois rangées conjuguées OA, OB (fig. 26), auxquelles le cristal est rapporté. On prend sur OA une longueur OA_1 égale au paramètre a de la rangée, et sur OB une longuenr OB_1 égale au paramètre b. La troisième rangée peut toujours être supposée projetée suivant une droite OC choisie arbitrairement, et sur laquelle une longueur arbitraire OC_1 représentera le troisième paramètre c. Un plan quelconque (ghk) coupe OA à une distance de O égale à $\frac{a}{g}$, OB à une distance $\frac{b}{h}$, OC à une distance $\frac{c}{k}$; pour avoir les points d'intersection du plan et de OA, il suffit donc de porter sur OA, dans le sens indiqué par le signe de g, $\frac{1}{g}$ fois OA_1 et ainsi de suite pour les autres axes. Le problème qui consiste à trouver les projections des plans déterminés par la projection de trois points est un problème de géométrie descriptive qui est toujours assez simple dans les cas habituels.

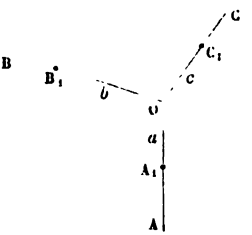


Fig. 26.

Lorsqu'on est conduit, par la nature particulière de la figure que l'on veut représenter, à ne pas placer deux des rangées conjuguées dans le plan de projection, on commence par déterminer, d'après les données de la question, les projections des trois rangées conjuguées, et l'on est ramené au cas précédent.

Il faut remarquer que, pour déterminer la direction de la projection de l'intersection de deux plans cristallins dont les caractéristiques sont connues, il suffit de chercher, par les procédés connus, les caractéristiques [*ghk*] de cette intersection. On détermine alors en projection la position du point dont les coordonnées numériques sont *ghk;* la droite qui passe par ce point et par l'origine est la direction cherchée.

Représentation des faces du cristal par les positions de leurs pôles sur une sphère de projection. — Les figures perspectives dont nous venons de parler donnent une idée nette de la figure extérieure du cristal, mais elles se prêtent mal à une étude géométrique précise. Lorsqu'on se propose ce but, il vaut mieux employer un autre mode de représentation.

Supposons que par le centre de symétrie du cristal nous décrivions une sphère avec un rayon quelconque pris pour unité. Par le même point, menons une normale à chacun des plans du cristal; chacune de ces normales vient rencontrer la sphère en un point que nous appelons le pôle du plan. L'ensemble de ces pôles pourra servir à représenter la figure cristalline, et l'arc de grand cercle compris entre deux pôles mesurera le supplément de l'angle des deux plans correspondants. Pour représenter le cristal sur un plan, il suffira de représenter sur ce plan la sphère et les pôles qui y sont contenus.

On sait que pour représenter une sphère sur un plan, on peut employer plusieurs systèmes de projections utilisées dans la construction des cartes de géographie.

On peut d'abord projeter orthogonalement la surface de la sphère sur le plan d'un grand cercle. Ce système a l'inconvénient de transformer la plupart des cercles en ellipses et de déformer considérablement la portion de la surface de la sphère qui avoisine le grand cercle de projection.

Projection stéréographique des pôles. — Un des systèmes de projection les plus employés dans la cristallographie, comme dans les cartes géographiques, est la *projection stéréographique*. On sait que ce système de projection est une perspective dans laquelle, le point de vue étant placé au pôle de l'hémisphère opposé à celui que l'on veut repré-

senter, on prend pour plan de perspective la base de cet hémisphère.

Dans ce système de projection bien connu, les angles sont conservés; les cercles tracés sur la sphère sont encore des cercles, et il est possible de construire, avec la règle et le compas, la résolution d'un triangle sphérique, quelles que soient les données. Ces avantages sont considérables. Malheureusement ils deviennent souvent illusoires, parce que les cercles qu'on est obligé de tracer ont fréquemment un très-grand rayon et sont alors d'une construction difficile.

Projection gnomonique des pôles. — Un autre système de projection, qu'on appelle *projection gnomonique*, est aussi une perspective dans laquelle le point de vue est au centre de la sphère, et le plan de perspective est le plan tangent à la sphère passant par le pôle de l'hémisphère que l'on veut représenter. Ce système jouit de cet avantage considérable que les grands cercles sont représentés par des droites. En revanche, les petits cercles sont des ellipses, la résolution des triangles sphériques ne peut plus se faire dans tous les cas par la règle et le compas, et enfin les points situés sur la base de l'hémisphère ont une perspective située à l'infini.

La projection gnomonique des pôles des faces d'un cristal est susceptible d'une interprétation intéressante.

Les pôles des faces d'un cristal sont en effet les nœuds du réseau polaire. Si le centre de la projection gnomonique est un nœud de ce réseau, les droites perspectives en sont des rangées. Supposons que le plan de perspective soit le plan réticulaire qui, dans le réseau polaire, est limitrophe du nœud pris pour point de vue, et contient les deux rangées conjuguées prises pour axes des X et des Y, les nœuds du réseau polaire situés dans ce plan, et dont les coordonnées numériques sont $(gh1)$, sont à eux-mêmes leurs perspectives et dessinent le réseau plan à maille parallélogrammique. Pour tracer ce réseau plan, et trouver la perspective de tous les nœuds compris dans le symbole $(gh1)$, il suffira donc de tracer deux axes coordonnés (fig. 27, pl. I) faisant entre eux un angle

$$XY = 180 - \zeta$$

de prendre sur X une longueur

$$Zx = A = \frac{abc}{E} \frac{1}{a} \sin zy$$

sur Y une longueur

$$Z\beta = B = \frac{abc}{E} \frac{1}{b} \sin zx$$

et de construire un réseau avec ces deux longueurs pour paramètres. Les caractéristiques des nœuds de ce réseau plan s'obtiennent évidemment à simple vue. Les droites qui joignent au point de vue un nœud quelconque du plan représentent, comme on le voit, les aires planes des faces correspondantes du réseau primitif. Ce point de vue O_1 sera situé au-dessous du plan de perspective, sur une droite partant du point de croisement des X et des Y, et faisant avec ces deux axes des angles égaux à

$$YZ = 180 - \xi$$
$$XZ = 180 - \eta$$

La distance qui séparera sur cette droite le point O du point de croisement des X et des Y est

$$C = \frac{abc}{E} \frac{1}{c} \sin xy$$

En convenant de prendre $\frac{abc}{E} \cdot \frac{1}{c} \sin xy$ pour l'unité de longueur, le point de vue sera complétement déterminé en indiquant sur le plan sa projection orthogonale O. Lorsque la rangée Z est un axe binaire, le point O se confond avec l'intersection des axes des X et des Y.

Les nœuds du réseau polaire situés dans le plan parallèle au plan de perspective ont leurs perspectives situées à l'infini, mais sur des directions différentes. Soit le nœud (*gh*0), la droite qui joint O à ce nœud est parallèle à celle qui, dans le plan de perspective, joint Z au point (*gh*1). On peut convenir de tracer tout autour de l'épure une bande où viendront aboutir les droites semblables, et on inscrira alors dans cette bande, sur la droite qui joint Z à (*gh*1), les coordonnés numériques du point (*gho*).

Il ne reste plus à représenter que les perspectives des nœuds situés au-dessus du plan de perspective (001).

Soit (*ghm*) un de ces nœuds, situé dans le plan réticulaire (00*m*), la droite menée du point de vue à ce nœud viendra rencontrer le plan de perspective en un point dont les coordonnées numériques sont évidem-

ment $\frac{g}{m}$, $\frac{h}{m}$. Ainsi, on peut dire, d'une manière générale, que la perspective d'un nœud quelconque (ghm) situé dans le plan ($00m$), est l'un des nœuds d'un réseau plan tracé dans le plan de perspective, sur les directions des X et des Y, avec des paramètres $\frac{A}{m}$ et $\frac{B}{m}$. La longueur

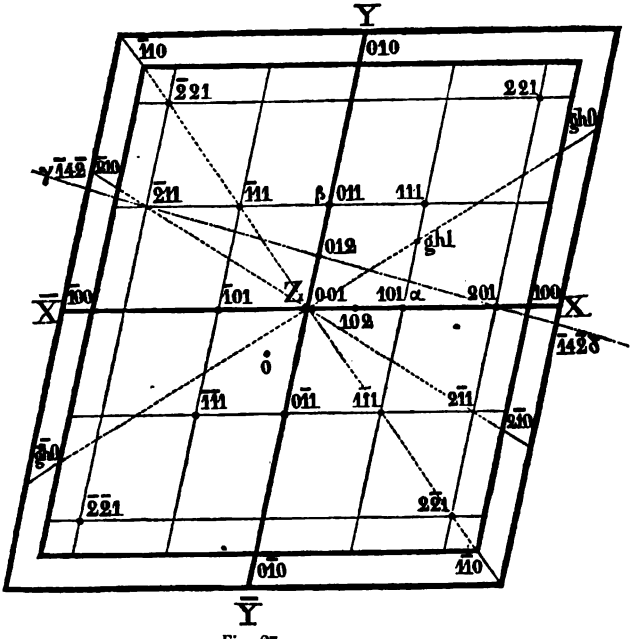


Fig. 27.

de la droite qui va du point de vue au point $\left(\frac{g}{m}, \frac{h}{m}, 1\right)$ est égale à $\frac{r}{m}$, en appelant r la longueur de la droite qui joint le point de vue au nœud (ghm), longueur qui représente l'aire de la maille correspondante du réseau primitif.

Si l'on mène sur la projection gnomonique une droite $\gamma\delta$, passant par deux nœuds quelconques, (012) et (201) par exemple, cette droite représente la trace d'un plan qui passe par les deux nœuds considérés et par le point de vue. Ce plan est perpendiculaire à une droite qui est l'axe de la zone de laquelle font partie toutes les faces du réseau primitif dont les pôles se trouvent sur la droite $\gamma\delta$.

Appelons p et q les longueurs numériques interceptées par $\gamma\delta$ sur les axes coordonnés du réseau polaire ou plutôt sur les parallèles aux axes coordonnés menés dans le plan (001) ; il est clair que les caractéristiques du plan passant par le point de vue et par $\gamma\delta$ ont :

$$\frac{1}{p}\,\frac{1}{q}\,\bar{1} \quad \text{ou} \quad qp\,\overline{pq}.$$

Telles seront donc aussi, dans le réseau primitif, les caractéristiques de l'axe de la zone ; de sorte que tous les pôles situés sur la ligne $\gamma\delta$ font partie d'une même zone dont l'axe a pour caractéristiques $q, p, \overline{pq}$.

La ligne $\gamma\delta$ de la figure correspond, par exemple, à la zone dont l'axe est noté

$$\frac{\bar{1}}{\bar{2}}\,\frac{\bar{1}}{\bar{2}}\,\bar{1} \quad \text{ou} \quad \bar{1}4\bar{2}.$$

Parmi les problèmes auxquels donne lieu le calcul des cristaux, un grand nombre, et des plus intéressants, se trouvent donc résolus très-simplement par la projection gnomonique. La projection stéréographique a, il est vrai, pour avantages, de se contenter d'un cadre plus restreint, et de ne pas donner de points situés à l'infini ; mais elle n'est jamais qu'une image destinée à représenter la position relative des pôles. La projection gnomonique est une véritable épure géométrique qui permet de trouver graphiquement, et souvent à simple vue, la solution de beaucoup de questions importantes.

CHAPITRE VI

SYSTÈME CUBIQUE OU TERQUATERNAIRE

Système régulier (Rose). — Système tesséral (Naumann). — Système tessulaire (Schrauf). — Premier système cristallin (Dufrénoy). — Système octaédrique (Miller).

Des modes possibles du réseau — Par un nœud N (fig. 28), menons un plan réticulaire normal à un axe quaternaire; si N_1 est un nœud pris dans ce plan à la distance minimum de N, les sommets N_2, N_3, N_4 du carré ayant N pour centre et NN_1 pour demi-diagonale sont aussi des nœuds. Les deux rangées perpendiculaires NN_1, NN_2 ayant des paramètres égaux, la maille du réseau plan est un carré, car ces deux rangées sont conjuguées. Si elles ne l'étaient pas, en effet, il y aurait un nœud dans l'intérieur d'une maille carrée NN_1 N_2 N_3, et ce nœud étant à une distance de l'un des sommets de la maille, moindre que NN_1, on en conclurait aisément qu'il y aurait dans le plan un nœud plus voisin de N que ne l'est N_1, ce qui est contraire à l'hypothèse.

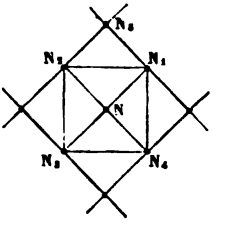


Fig. 28.

Dans le plan réticulaire à maille carrée considéré doivent se trouver compris les deux autres axes quaternaires; ces axes peuvent être dirigés ou suivant les côtés, ou suivant les diagonales de la maille.

Nous supposerons d'abord qu'ils coïncident avec les côtés de la maille.

On sait, d'après un théorème connu (page 44), que si l'on considère 3 plans contigus, que l'on notera 0, 1, 2, en allant de haut en bas, les projections des nœuds du plan 2 coïncidant toujours avec les nœuds du plan 0, celles des nœuds du plan intermédiaire 1, peuvent coïncider soit avec les centres, soit avec les milieux des côtés de la maille du plan 0.

On n'a donc que trois cas à examiner :

1er *cas.* — *Les projections des nœuds du plan* 2 *coïncident avec les nœuds du plan* 1. La maille solide est un prisme droit à base carrée, qui est en réalité un cube puisque une rotation autour d'un des axes ternaires doit amener successivement en coïncidence, les trois arêtes du prisme.

2e *cas.* — *Les projections des nœuds du plan* 1 *coïncident avec les centres des mailles du plan* 0. La figure 29 dans laquelle A_0, A'_0, B_0, B'_0 sont les projections des nœuds des plans pairs, et A_1, A'_1, B_1, B'_1 les projections des nœuds des plans impairs montre quelle est, dans ce cas, la disposition générale du réseau.

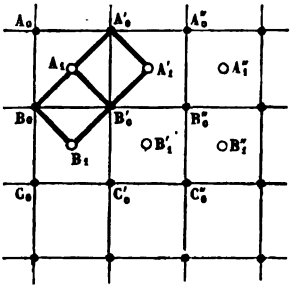


Fig. 29.

Une rotation de 120° autour de l'axe ternaire passant en A_0, amène A_0 A'_0 en coïncidence avec A_0 A_2; le réseau peut être considéré comme formé par des mailles cubiques A_0 B'_0 A_2 B'_2 ayant au centre un nœud A_1. On peut dire que la maille du réseau est un cube, mais un *cube centré*.

En réalité, la *vraie* maille du réseau n'est plus un cube, et il est intéressant de voir quelle en est la forme. Représentons en perspective (fig. 30) le réseau dont nous venons d'étudier la projection. Si l'on joint un nœud B'_2 à trois centres des mailles adjacentes, B'_2A_1, B'_2B_3, $B'_2A'_3$, et si l'on construit sur ces trois longueurs un parallélipipède B'_2 A_1 B_2 B_3 B'_4 $A'_3A_2A_3$, ce parallélipipède a tous ses côtés égaux, tous ses angles plans et tous ses angles dièdres égaux ou supplémentaires. C'est ce qu'on appelle un *rhomboèdre*. L'angle dièdre de ce rhomboèdre est celui que forment entre eux deux plans diagonaux d'un cube; il est donc égal à 120°. Ce rhomboèdre de 120° est d'ailleurs la vraie maille du réseau, car il ne contient aucun nœud dans son intérieur.

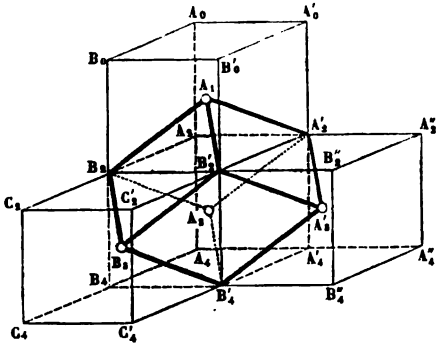


Fig. 30.

3e *cas.* — *Les projections des nœuds du plan* 1 *coïncident avec les milieux des côtés du plan* 0. Supposons que le réseau du plan 0 soit $A_0 A'_0 B_0 B'_0$ (fig. 30) la projection du réseau 1, peut être $A_1 A'_1 B_1 B'_1$, mais l'axe quaternaire passant en A_0 exige alors dans le plan 1, un nœud a_1, dont la projection vient partager $A_0 B_0$ en deux parties égales. La maille du plan 1 est donc $A_1\, a_1\, B_1\, a'_1$, et celle du plan 0, devant lui être égale, il faut qu'un système de nœuds a_0 vienne occuper les centres des carrés $A_0 A'_0 B_0 B'_0$.

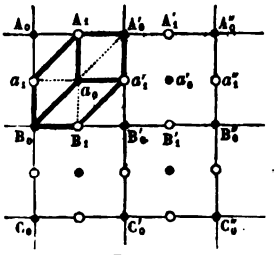


Fig. 31.

On voit donc que le réseau peut être supposé formé par un cube $A_0 A'_0 B_0 B'_0 - A_2 A'_2 B_2 B'_2$, portant un nœud au centre de chaque face. On dit que la maille est *un cube à faces centrées.*

Pour chercher la vraie maille du réseau, on figure la projection de ce réseau; on joint A'_0 (fig. 31) avec les trois centres des faces voisines A_1, a_0, a'_1, et on construit sur ces trois longueurs égales un parallélipipède qui aura pour autres sommets les trois autres centres des faces, a_1, B_1, a_2, et le sommet du cube B_2. Ce parallélipipède est une maille du réseau, car il ne contient aucun nœud. Les arêtes sont toutes égales entre elles; les angles plans et les angles dièdres sont tous respectivement égaux ou supplémentaires; c'est donc encore un rhomboèdre. Le plan $A'_0 a'_1 B_1 a_0$, qui est le plan $A_0 B_0 B'_2$, est perpendiculaire à une diagonale du cube; il en est de même du plan adjacent du rhomboèdre, $a_0 B_1 B_2 a_1$; l'angle dièdre du rhomboèdre est donc l'angle formé par les diagonales du cube, qui est égal à 70° 31′ 44″ et dont le cosinus a pour valeur $\frac{1}{3}$.

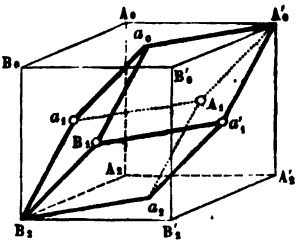


Fig. 32.

Après avoir supposé que les axes quaternaires sont dirigés suivant les côtés de la maille carrée du plan 0, il faut supposer qu'ils coïncident avec les diagonales. On aurait encore à examiner les trois cas précédents relatifs au mode de projection des nœuds. Il serait aisé de voir que le 1er cas est impossible; que le 2e cas donne un cube à faces centrées et le 3e, un cube centré.

En sous-entendant les restrictions convenables, on peut donc dire, en

résumé, que les substances appartenant au système terquaternaire ont un réseau à mailles cubiques, ou, en employant le langage d'Haüy, ont le cube pour forme primitive. De là le nom de *cubique* donné souvent au système. Mais avant d'aller plus loin, il importe de voir si l'introduction de mailles parallélipipédiques centrées ou à faces centrées n'apporte pas des modifications considérables aux formules que nous avons déduites de la théorie des réseaux.

Or la substitution d'une maille centrée ou à faces centrées à une maille ordinaire ne portant des nœuds qu'à ses sommets revient à introduire dans le réseau un certain nombre de nœuds dont les coordonnées numériques sont rationnelles; les rangées introduites ont donc des caractéristiques rationnelles; elles sont donc parallèles aux rangées de l'ancien réseau, et si l'introduction de nouveaux nœuds amène des rangées nouvelles, elle n'amène pas de nouveaux *systèmes de rangées*. Elle n'amène donc pas non plus de nouveaux systèmes de plans réticulaires, et la seule modification importante qui résulte de cette introduction de nouveaux nœuds est le changement de l'aire de la maille plane de certains plans réticulaires.

Système d'axes coordonnés. — Les axes quaternaires du système jouent un rôle tellement prépondérant qu'ils sont employés par tous les cristallographes (accord bien peu commun) comme axes coordonnés.

Angles des arêtes et de faces. — Les formules générales se transforment aisément en remarquant que les trois axes coordonnés sont rectangulaires et ont le même paramètre.

Si PP′ désigne l'angle de deux pôles P, (pqr) et P′ $(p'q'r')$

$$\cos PP' = \frac{pp' + qq' + rr'}{\sqrt{(p^2 + q^2 + r^2)(p'^2 + q'^2 + r'^2)}}$$

Si RR′ désigne l'angle des deux arêtes R, $[ghk]$ et R′, $[g'h'k']$

$$\cos RR' = \frac{gg' + hh' + kk'}{\sqrt{(g^2 + h^2 + k^2)(g'^2 + h'^2 + k'^2)}}$$

Formes simples holoédriques. — Si l'on considère les trois axes quaternaires, et, sur chaque axe, les deux directions positive et négative, on peut amener en coïncidence deux quelconques de ces 6 directions par des rotations autour des axes de symétrie, compatibles avec les indices de ces axes. Cette coïncidence obtenue, on peut faire coïncider entre elles deux quelconques des 4 autres directions. Il en résulte

que si l'on imagine un plan réticulaire $(p\,q\,r)$, tous les plans réticulaires qui ont les mêmes caractéristiques en valeur absolue sont identiques entre eux, car ils interceptent des longueurs égales sur les trois axes quaternaires, et peuvent, par conséquent, être amenés en coïncidence par des mouvements compatibles avec la symétrie du système.

Hexoctaédre. — On peut faire six arrangements des trois lettres p, q, r; chacun des 6 arrangements peut recevoir une des 8 combinaisons de signes qui conviennent à chacun des 8 quadrants dans lesquels les plans coordonnés partagent l'espace; la forme simple holoédrique la plus générale du système cubique se compose donc de 48 faces.

Pour trouver la position de ces 48 faces, nous cherchons la position

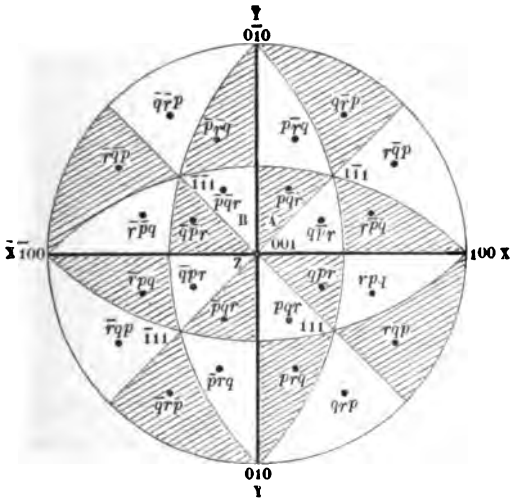


Fig. 33.

de leurs pôles sur la sphère, ou sur la projection stéréographique faite sur un plan de symétrie perpendiculaire à un axe quaternaire pris pour axe des Z (fig. 33). Le centre de projection représente le pôle (001), les points de rencontre des axes des Y et des X avec le cercle de perspective représentent les pôles $(\bar{1}00)$, (100), $(0\bar{1}0)$, (010).

La surface de l'hémisphère supérieur est partagée par les plans coordonnés en quatre quadrants, dans chacun desquels le centre est le pôle d'un axe ternaire :

Le centre du quadrant des		XY est un pôle noté	111
—	—	$\bar{X}Y$	$\bar{1}11$
—	—	$\bar{X}\bar{Y}$	$\bar{1}\bar{1}1$
—	—	$X\bar{Y}$	$1\bar{1}1$

Les grands cercles qui joignent deux à deux les centres de ces quadrants passent par un des axes quaternaires. Nous menons ces grands cercles, qui représentent les traces des plans de symétrie perpendiculaires aux axes binaires; ils sont à la fois les bissectrices et les médianes des triangles formés par les axes quaternaires.

Chacun de ces triangles se trouve ainsi divisé en 6 triangles rectangles égaux entre eux. Si l'on considère spécialement un des triangles trirectangles, et si l'on hache de deux en deux les triangles rectangles qui le composent, les triangles de même teinte peuvent venir en superposition mutuelle par une rotation permise autour du pôle ternaire. Dans les autres quadrants, on hache les triangles qui viennent en superposition avec les triangles hachés du premier, lorsqu'on met en coïncidence les deux quadrants par une rotation de $\frac{2\pi}{4}$ autour d'un axe quaternaire.

On peut convenir de désigner les triangles hachés par le nom de *triangles droits*; les autres seront les *triangles gauches*. Si l'on regarde, par exemple, en face, le pôle Z qui est l'extrémité d'un axe quaternaire, 8 triangles viennent se croiser sur la sphère en ce pôle; dans l'hémisphère supérieur, deux triangles A et B (fig. 33) de teintes différentes viennent se juxtaposer suivant le grand cercle perpendiculaire à la base de l'hémisphère. Les triangles droits sont ceux qui sont de même teinte que le triangle A situé à droite de l'observateur. Les autres sont les triangles gauches. Il est facile de voir que les triangles gauches sont opposés par le centre aux triangles droits.

Si l'on suppose un pôle (*pqr*), placé dans l'un des triangles gauches du quadrant YZ, ce pôle en entraînera deux autres placés d'une manière analogue dans les deux autres triangles gauches, et comme en faisant tourner les axes X, Y, Z autour du pôle (111), dans le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre, on change successivement X en Z, Y en X, Z en Y, les notations des trois pôles des trois triangles gauches seront en les parcourant dans le sens indiqué,

$$(pqr),\ (qrp),\ (rpq)$$

et, pour les former, il suffit d'écrire les caractéristiques à la suite les unes des autres et toujours dans le même ordre

$$pqrpq\ .\ .\ .\ .,$$

de prendre d'abord les 3 premières lettres, puis les 3 lettres qui deviennent les premières après avoir supprimé p, etc.; c'est ce qu'on appelle les *permutations tournantes* des trois lettres pqr.

Le triangle gauche qui contient (pqr) est séparé, par un plan de symétrie, du triangle droit que l'on rencontre en tournant toujours dans le même sens autour du pôle ternaire. L'existence d'un pôle dans le triangle gauche entraîne donc celle d'un pôle symétrique dans le triangle droit. Si le plan de symétrie considéré passe par X, les deux pôles auront le même X, et leurs Y et Z seront inversés. Les caractéristiques du pôle symétrique seront donc (prq), et les symboles des pôles situés dans les trois triangles droits du quadrant XY s'obtiendront en formant les permutations tournantes des trois lettres prq.

On a ainsi, dans un des quadrants, 6 pôles; et, comme tous les quadrants sont identiques, on en aura 6 dans chacun des 8 quadrants, ce qui fera bien 48 pôles. Il ne peut pas y en avoir d'autres, car il est aisé de voir que nous avons utilisé, pour les obtenir, tous les éléments de symétrie du système.

Quant aux notations des pôles, elles sont identiques avec celles du quadrant des XYZ que nous avons considéré d'abord, sauf que, dans le quadrant des $\bar{X}YZ$, il faudra affecter du signe — le paramètre correspondant à l'axe des X, et ainsi de suite pour les autres quadrants.

La forme holoédrique la plus générale du système terquaternaire est donc un polyèdre à 48 faces; la position des pôles sur la sphère nous montre d'ailleurs que ce polyèdre a 6 sommets à 8 faces sur les axes quaternaires, 8 sommets à 6 faces sur les axes ternaires, et enfin 12 sommets à 4 faces sur les axes binaires.

Ces données suffisent pour se faire une idée précise de la forme de ce polyèdre qui est représenté dans la figure 34 et que l'on appelle *hexoctaèdre*.

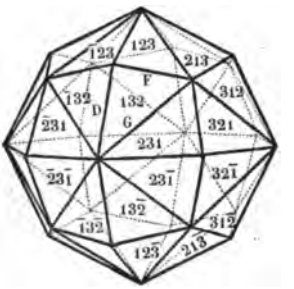


Fig. 34.

Trapézoèdre. — Trioctaèdre. — Il est clair que, lorsque le pôle (pqr) se trouve sur l'un des plans de symétrie binaire, 2 pôles symétriques se confondent en un seul; chaque

quadrant ne comprend plus que 3 pôles, et la forme simple ne possède plus que 24 faces.

Il faut et il suffit, pour que ce cas se produise, que deux caractéristiques soient égales entre elles; la notation de la forme sera donc

$$\{ppr\}$$

Il peut se présenter deux cas suivant que le pôle placé sur l'un des plans de symétrie binaire tombe dans la partie de la médiane du quadrant comprise entre le sommet et le centre du quadrant, ou dans la partie comprise entre le centre et le côté.

Dans le 1er cas, les longueurs interceptées sur les deux axes placés symétriquement par rapport au plan de symétrie sont plus longues que la longueur interceptée sur le troisième, et on a $p < r$.

Dans le second cas, l'inverse a lieu, et l'on a $p > r$.

1er cas : $p < r$. Trapezoèdre. — La projection stéréographique des pôles est représentée figure 35. La forme simple a des sommets à 3 faces sur les axes ternaires, des sommets à 4 faces sur les axes quaternaires

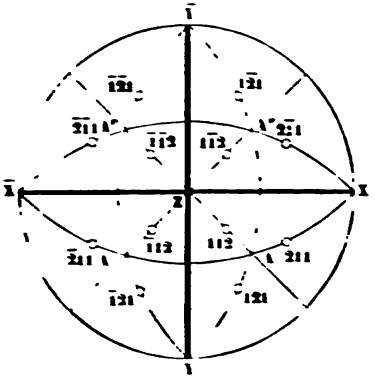


Fig. 35.

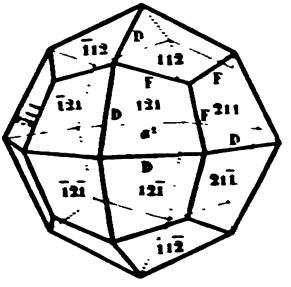


Fig. 36.

et des sommets également à 4 faces sur les axes binaires. On obtient un solide représenté, figure 36, que l'on appelle *icositétraèdre* ou *trapézoèdre*, parce que les faces sont des quadrilatères.

2e cas : $p > r$. Trioctaèdre. — La projection des pôles est représentée figure 37. La forme simple a des sommets à 3 faces sur les axes ternaires, des sommets à 8 faces sur les axes quaternaires; 2 faces viennent se rencontrer, suivant des droites perpendiculaires

aux axes binaires sur lesquels il n'y a aucun sommet. On obtient ainsi le solide, représenté figure 38, que l'on appelle *trioctaèdre* pour rappe-

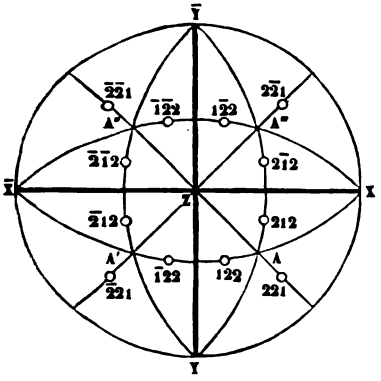


Fig. 37.

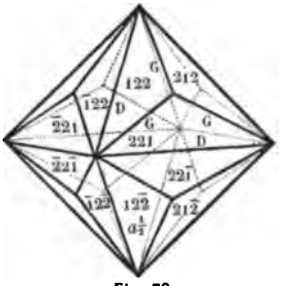


Fig. 38.

ler que la forme générale est celle d'un octaèdre régulier dont les faces sont remplacées par des pyramides surbaissées.

Octaèdre. — Lorsque le pôle tombe au centre même du triangle trirectangle, le solide se réduit à 8 faces perpendiculaires aux axes quaternaires; c'est l'*octaèdre régulier* (fig. 39), dont le symbole est

$$\{111\}.$$

Cet octaèdre est la limite commune des trapézoèdres et des trioctaèdres dont les 2 caractéristiques symétriques convergent vers la troisième.

Les arêtes de l'octaèdre sont perpendiculaires en leurs milieux sur les axes binaires; les faces sont perpendiculaires en leurs centres sur les axes ternaires; les sommets sont placés sur les axes quaternaires.

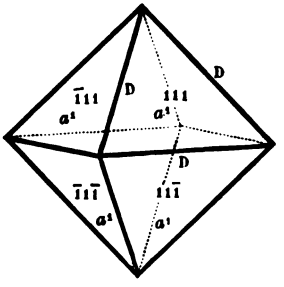


Fig. 39.

Deux faces adjacentes de l'octaèdre font entre elles un angle égal au supplément de celui des diagonales du cube, c'est-à-dire à $180^\circ - 70^\circ 31',7 = 109^\circ 28',3$, angle dont le cosinus est $-\frac{1}{3}$. Deux faces opposées font entre elles un angle égal à $70^\circ 31',7$.

Hexatétraèdre. — Il ne nous reste plus à examiner que les cas dans

lesquels les pôles sont placés dans les plans coordonnés, c'est-à-dire dans les plans de symétrie perpendiculaires aux axes quaternaires. La condition nécessaire et suffisante pour que ce cas se produise est que l'une des caractéristiques soit nulle ; la forme est alors notée :

$$\{pq0\}.$$

Il y a sur chaque côté d'un des triangles trirectangles deux pôles placés symétriquement de part et d'autre du milieu de ce côté correspondant au pôle d'un axe binaire. La projection des pôles est donc celle qui est représentée figure 40.

La forme simple aura 24 faces dont chacune sera parallèle à un axe quaternaire. Il y aura un sommet à 4 faces sur les axes quaternaires,

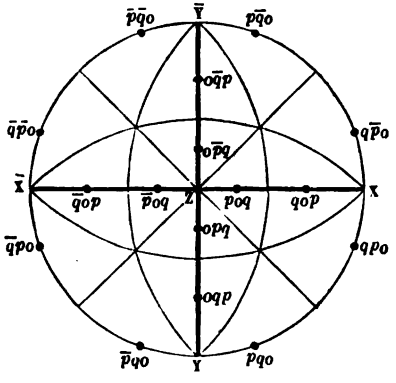


Fig. 40.

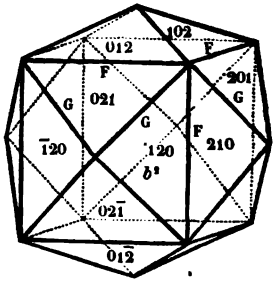


Fig. 41.

des sommets à 6 faces sur les axes ternaires, et les faces se rencontreront deux à deux suivant des arêtes perpendiculaires sur les axes binaires et parallèles à un axe quaternaire. Le solide, représenté figure 41, a la forme générale d'un cube dont les faces seraient remplacées par des pyramides à 4 faces surbaissées. On l'appelle *hexatétraèdre* ou *tétrabishexaèdre*.

Dodécaèdre rhomboïdal. — Lorsque les pôles coïncident avec les milieux mêmes des côtés du triangle trirectangle, c'est-à-dire avec les pôles des axes binaires, on a $p=q$, et la forme est notée

$$\{110\}.$$

Elle est composée de 12 faces perpendiculaires sur les axes binaires.

La projection des pôles est représentée figure 42. Il y a des sommets à 4 faces sur les axes quaternaires, des sommets à trois faces sur les axes ternaires. Toutes les arêtes sont égales, et les faces sont des rhombes égaux. Le solide représenté figure 43 est appellé le *dodécaèdre rhomboïdal.*

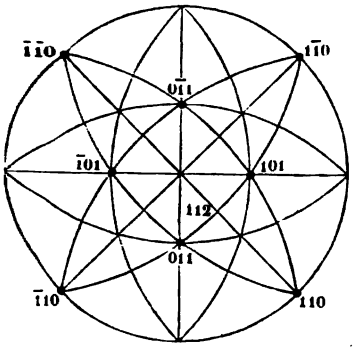


Fig. 42.

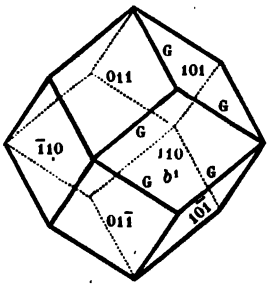


Fig. 43.

L'angle obtus des arêtes est égal au supplément de l'angle de deux diagonales du cube, c'est-à-dire à 180° — 70° 31'7, = 109° 28',3 ou l'angle dont le cosinus est $-\frac{1}{3}$. Il y a trois axes binaires se croisant sous des angles de 60° dans un plan perpendiculaire à un axe ternaire ; il y a donc 6 faces du dodécaèdre rhomboïdal dans une zone perpendiculaire à un axe ternaire, et ces six faces forment entre elles un prisme dont la section droite est un hexagone régulier. Il y a deux axes binaires se croisant sous un angle de 90° dans un plan perpendiculaire à un axe quarternaire ; il y a donc 4 faces du dodécaèdre rhomboïdal dans une zone perpendiculaire à un axe quaternaire, et ces 4 faces forment un prisme dont la section droite est un carré.

Les formes simples du système cubique, que l'on rencontre dans la nature, sont assez peu nombreuses. Les tableaux suivants font connaître quelques-uns des angles que forment entre elles les faces des formes qui se rencontrent le plus habituellement.

TABLEAU DES ANGLES QUE FORMENT LES NORMALES AUX FACES ADJACENTES DES FORMES SIMPLES LES PLUS COMMUNES DU SYSTÈME CUBIQUE

Octaèdre a^1 (fig. 39).		111	$\cos D = \frac{1}{3}$ D = 70° 31′,7.		
Dodécaèdre rhomboïdal b^1 (fig. 43).		110	$\cos G = \frac{1}{2}$. G = 60° D = 90° est l'angle des normales aux deux faces qui se rencontrent par le sommet de leur angle aigu.		
Hexatétraèdres (fig. 41).		210	F = 36°52′,2 .	G = 36°52′2.	
		310	53° 7′,8 .	23°50′5.	
		320	22°37′,2 .	46°11′7.	
		520	46°23′,8 .	30°27′.	
Trapézoèdres (fig. 36).		211	D = 48°11′,5 .	F = 33°33′,4.	
		311	35° 5′,8 .	50°28′7	
Trioctaèdres (fig. 38).		221	D = 38°56′,3 .	G = 27°16.	
		331	26°31′,5 .	37°51′,8.	
Hexoctaèdres (fig. 34).		321	D = 31° 0′,2 .	F = 21°47′,2 . .	G = 21°47′,2.
		431	22°37′,2 .	15°56′,5 . ,	32°12′,2.
		421	25°12′,5 .	35°57′ . .	17°45′,1.
		731	14°57′,7 .	43°12′,8 . .	21°13′,2.
Hémioctaèdre (Tétraèdre), (fig. 82)	x	111	T = 109°28′,3.		
Hémihexatétraèdres (fig. 71).	π	210	D = 53° 7′,8 .	U = 66°25′,3.	
	π	320	67°22′,1 .	62°30′,8.	
	π	430	73°44′,4 .	61°18′,9.	
Hémitrapézoèdres (fig. 83). .	x	211	F = 33°33′,4 .	T = 70°31′,7.	
	x	311	50°28′,7 .	50°28′,7.	
Hémitrioctaèdres (fig. 84). .	x	221	G = 27°16′ .	T = 90°	

Hémihexoctaèdres à faces parallèles (fig. 70).	π	**123**	W=64°37′,3 .	D=30° 0′,3. .	U=38°12′,8.
	π	**124**	51°45′,3. .	25°12′,7. .	48°13′,1.
	π	**135**	29° 3′,5. .	19°27′,8. .	48°55′.
Hémihexoctaèdres à faces inclinées (fig. 81)	x	**321**	F=21°47′,2. .	G=21°47′,2. .	T=69° 4′,5.
	x	**531**	27°39′7. .	27°39′,7. .	57° 7′,3.

TABLEAU DES DISTANCES ANGULAIRES QUI SÉPARENT LES POLES DES FORMES LES PLUS COMMUNES ET LES POLES LES PLUS RAPPROCHÉS DES FORMES {**100**}, {**110**}, {**111**}.

	100	**010**	**001**	**011**	**101**	**110**	**111**
	0	90°	90°	90°	45°	45°	54°44′15″
011	90°	45°	45°	0°	60°	60°	35°15′,85
111	54°44′15″	54°44′15″	54°44′15″	35°15′,85	35°15′,85	35°15′,85	0°
210	26°34′	63°26′	90°0′	71°34′	50°46′	18°26′	39°44′
310	18°26′	61°34′	90°0′	77°5′	47°52′	26°34′	43°5′
320	33°41′	56°19′	90°0′	66°54′	53°58′	1°19′	36°49′
520	21°48′	68°12′	90°0′	74°47′	48°58′	23°12′	41°22′
211	35°16′	65°54′	65°54′	54°44′	30°0′	30°0′	19°28′
311	25°14′	72°27′	72°27′	64°46′	31°29′	31°29′	29°30′
221	70°31′	48°11′	48°11′	19°28′	45°0′	45°0′	15°48′
331	76°44′	46°30′	46°30′	13°16′	49°33′	49°33′	22°0′
321	36°42′	57°41′	74°30′	55°28′	40°54′	19 6′	22°13′
421	29°12′	64°7′	77°24′	62°25′	39°31′	22°13′	28°8′
431	38°20′	55°58′	78°41′	56°15′	46°6′	13°54′	25°4′
731	24°18′	67°1′	82°31′	68°24′	42°34′	22°59′	34°14′

Des formes composées du système cubique. — Nous avons étudié d'une façon complète les formes simples du système cubique, nous allons maintenant nous occuper de quelques-unes des formes composées, c'est-à-dire qui sont dues à la réunion de plusieurs formes simples. De telles formes sont en nombre infini ; nous nous bornerons aux plus remarquables.

Nous commencerons par les formes composées dues à la réunion du cube avec chacune des formes simples. Sans qu'il soit besoin de nous appesantir longtemps sur ce sujet, nous verrons que :

1° les plans de l'hexoctaèdre viennent remplacer par des pointements à 6 faces chacun des angles du cube (fig. 44);

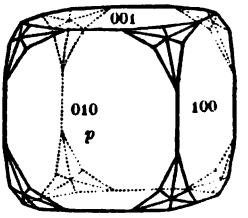


Fig. 44.

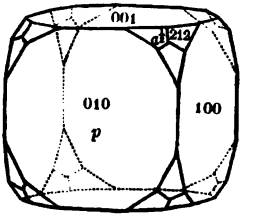


Fig. 45.

2° les plans des trioctaèdres forment à chaque angle des pointements à 3 faces dont les arêtes viennent rencontrer les diagonales des faces du cube (fig. 45);

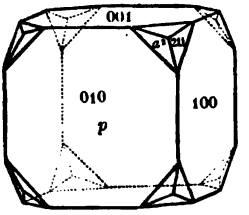


Fig 46.

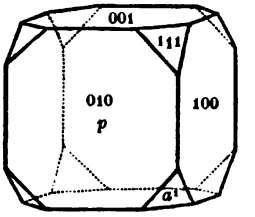


Fig. 47.

3° les plans du trapézoèdre forment à chaque angle des pointements à 3 faces dont les arêtes viennent rencontrer les arêtes du cube (fig. 46);

4° les plans de l'octaèdre tronquent les angles du cube et les rem-

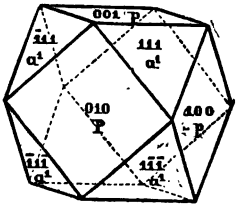


Fig. 48.

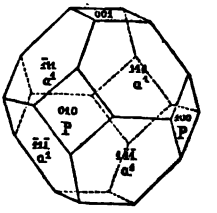


Fig. 49.

placent par des plans également inclinés sur les 3 faces du cube; ce sont ce qu'on appelle *des plans tangents à l'angle* (fig. 47, 48, 49).

Quant aux formes dont les plans sont parallèles aux axes coordonnés ou aux arêtes du cube, nous verrons que :

1° les plans de l'hexatétraèdre viennent former un biseau sur chaque arête, et un pointement à 6 faces sur chaque angle (fig. 50);

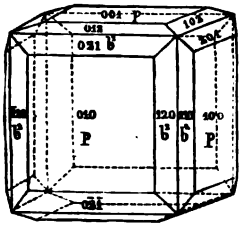


Fig. 50.

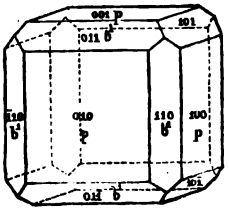


Fig. 51.

2° les plans du dodécaèdre rhomboïdal remplacent chaque arête par un plan également incliné sur les 2 faces adjacentes du cube; c'est un plan *tangent à cette arête* (fig. 51).

Les pôles de l'octaèdre et ceux des trapézoèdres sont situés sur des plans

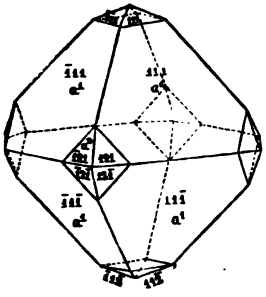


Fig. 52.

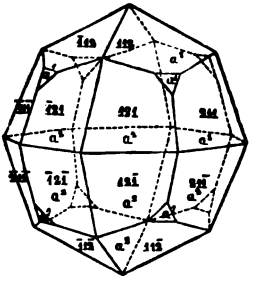


Fig. 53.

de zones communes qui sont les plans de symétrie, et les intersections sont parallèles à celles de l'octaèdre et du cube. Les figures 52 et 53 représentent la coexistence des faces de l'octaèdre $\{111\}$ et du trapézoèdre $\{112\}$.

Les faces de l'octaèdre et du trioctaèdre se rencontrent suivant des parallèles aux arêtes de l'octaèdre. La coexistence de l'octaèdre $\{111\}$ et du trioctaèdre $\{122\}$ est représentée figure 54.

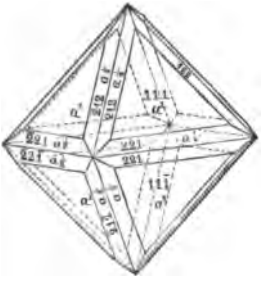


Fig. 54.

La coexistence de l'octaèdre et du dodécaèdre rhomboïdal est représentée figures 55 et 56. On voit que les faces du dodécaèdre rhomboïdal sont

tangentes sur les arêtes de l'octaèdre, c'est-à-dire qu'elles interceptent des longueurs numériques égales sur les deux arêtes adjacentes.

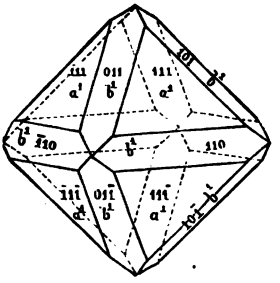


Fig. 55.

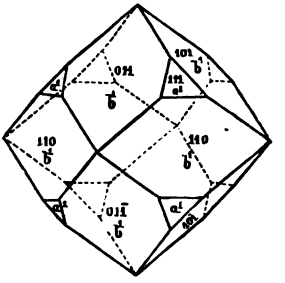


Fig. 56.

La figure 57 représente la coexistence de l'octaèdre et d'un hexatétraèdre; la figure 58 celle de l'octaèdre et d'un hexoctaèdre.

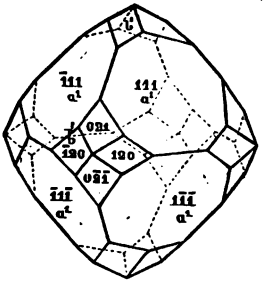


Fig. 57.

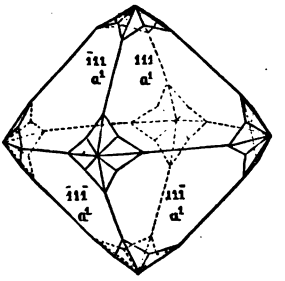


Fig. 58.

Les figures 59 à 65 montrent des formes composées provenant de la

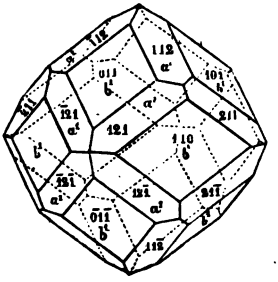


Fig. 59.

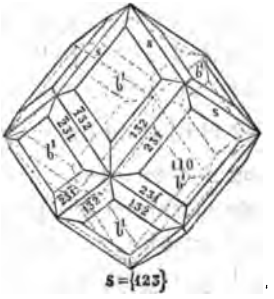


Fig. 60.

coexistence des diverses formes simples avec le dodécaèdre rhomboïdal.

Lorsque la forme qui s'ajoute au dodécaèdre est le trapézoèdre {112}

(que l'on appelle *leucitoèdre* parce que c'est la forme cristalline d'un minéral nommé *leucite*), il est aisé de voir que la zone $[11\bar{1}]$ déterminée par les pôles (101) et (011) rencontre la zone $[1\bar{1}0]$ déterminée par les pôles (001) et (110) en un pôle noté (112) appartenant au leucitoèdre (fig. 42). Les faces du leucitoèdre sont donc parallèles à l'intersection de deux faces adjacentes du dodécaèdre et, à cause de la symétrie, également inclinées sur ces faces; elles sont, en un mot, tangentes sur les arêtes du dodécaèdre. C'est ce qu'on voit sur la figure 59.

Fig. 61.

Il faut remarquer que les hexoctaèdres dont les caractéristiques satisfont à la relation

$$-p-q+r=0$$

et au nombre desquels se trouve, par exemple, l'hexoctaèdre $\{123\}$, ont des pôles compris dans la zone $[11\bar{1}]$. Les faces viennent donc former, deux à deux, des biseaux parallèles aux arêtes du dodécaèdre. C'est ce que montre la figure 60. Dans la figure 61, se trouvent à la fois les faces du dodécaèdre, celles de l'hexoctaèdre $\{123\}$ et celles du leucitoèdre. C'est une combinaison qu'on rencontre dans le grenat.

Les figures 62 et 63 montrent la coexistence du dodécaèdre rhomboïdal et du trapézoèdre. Lorsque le trapézoèdre $\{ppr\}$ est tel que $r > 2p$, ses faces forment un pointement à 4 faces sur les axes quater-

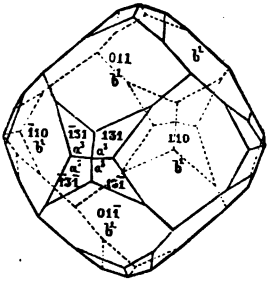


Fig. 62.

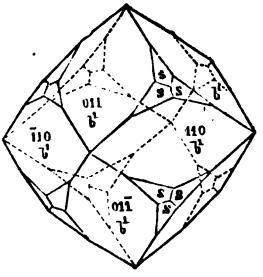


Fig. 63.

naires, comme dans la figure 62. Lorsque $r < 2p$, les faces du trapézoèdre donnent un pointement à trois faces sur les axes ternaires,

comme dans la figure 63. Dans le premier cas, en effet, les pôles du trapézoèdre se placent entre ceux du cube et ceux du leucitoèdre $\{112\}$; et dans le deuxième cas, ils se placent entre ceux du leucitoèdre $\{112\}$ et ceux de l'octaèdre.

Le cristal de la fig. 64 est formé par la combinaison du dodécaèdre

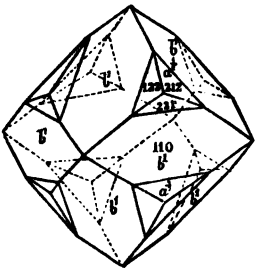


Fig. 64.

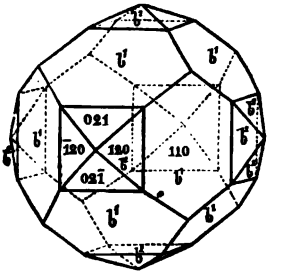


Fig. 65.

et du trioctaèdre $\{122\}$; celui de la figure 65, par la combinaison du dodécaèdre et de l'hexatétraèdre $\{120\}$.

Enfin, dans la figure 66, on a représenté la combinaison du cube, de l'octaèdre et du dodécaèdre rhomboïdal.

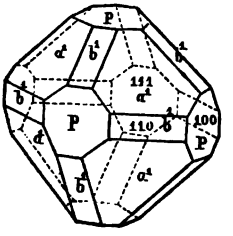


Fig. 66.

Système de notation de Lévy. — On peut définir, non plus un plan réticulaire en particulier, mais la forme simple dont il fait partie, en fixant la manière dont ce plan réticulaire est placé par rapport aux arêtes de la forme primitive, ou, dans le cas actuel, du cube.

Convenons de désigner par la consonne *b* les arêtes du cube, toutes identiques entre elles, et par la voyelle *a* tous les angles aussi identiques entre eux. Une forme simple

$$\{pqr\}$$

est composée de plans interceptant sur les trois arêtes *b*, qui concourent au même angle, des longueurs numériques

$$\frac{1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{1}{r}.$$

On peut représenter la forme simple par le symbole

$$b^{\frac{1}{p}} \quad b^{\frac{1}{q}} \quad b^{\frac{1}{r}},$$

la lettre qui désigne chacune des arêtes étant surmontée d'un exposant qui marque la longueur numérique interceptée sur l'arête.

Lorsque $p = q$, on peut simplifier la notation qui est alors

$$b^{\frac{1}{p}} \quad b^{\frac{1}{p}} \quad b^{\frac{1}{r}}$$

en écrivant simplement la lettre a (qui rappelle que le plan de la forme vient rencontrer les trois arêtes issues d'un angle a), surmontée d'un exposant qui est le rapport des longueurs numériques interceptées sur les arêtes, la longueur qui est répétée deux fois étant placée au numérateur :

$$a^{\frac{p}{r}} = a^{\frac{r}{p}}.$$

Lorsque $\frac{r}{p}$ est plus grand que 1, on a des trapézoèdres

$$a^2 = \left\{112\right\} \text{ (c'est le leucitoèdre)}$$
$$a^3 = \left\{113\right\} \text{ etc.}$$

Lorsque $\frac{r}{p}$ est plus petit que 1, on a des trioctaèdres

$$a^{\frac{1}{2}} = \left\{221\right\}$$
$$a^{\frac{1}{3}} = \left\{331\right\}, \text{ etc.}$$

Lorsque $\frac{r}{p} = 1$, on a l'octaèdre

$$a^1 = \left\{111\right\}.$$

Lorsque les plans de la forme sont parallèles aux arêtes b, leur notation aurait la forme générale

$$b^{\frac{1}{p}} \quad b^{\frac{1}{q}} \quad b^{\frac{1}{0}} = b^{\frac{1}{p}} \quad b^{\frac{1}{q}} \quad b^{\infty}.$$

On simplifie en écrivant la lettre b (qui rappelle que les plans de la forme sont parallèles à une arête b, ou, comme on dit, placés sur une arête b) et la surmontant d'un exposant qui est le rapport des deux longueurs interceptées sur les deux arêtes aboutissant à celle sur laquelle le plan est placé, ou, pour employer le langage consacré, que le plan modifie. La notation sera donc

$$b^{\frac{1}{\frac{p}{q}}} = b^{\frac{q}{p}} = \left\{pq0\right\}.$$

Il est indifférent de placer au numérateur l'une des caractéristiques ou l'autre; on s'arrange toujours pour que $\frac{p}{q}$ soit > 1. Lorsque $\frac{p}{q} = 1$, on a le dodécaèdre rhomboïdal

$$b^1 = \left\{110\right\}.$$

Les faces du cube ne seraient pas comprises dans ce système de notation; on les note p.

Ce système de notation, dû au minéralogiste Lévy, et qui n'est d'ailleurs que celui d'Haüy, légèrement modifié, est très-commode pour rappeler la manière dont les formes simples sont placées par rapport au cube. Cela est d'autant plus important que, très-souvent, la forme dominante, celle qui imprime au cristal son aspect général, est le cube, et que les autres formes simples ne se présentent que comme facettes modifiantes.

Toutes les figures précédentes portent sur les faces la notation Lévy, en même temps que les notations à trois caractéristiques qu'on désigne souvent sous le nom de notations Miller.

Formes mériédriques. — Les formes mériédriques du système terquaternaire ont au moins deux axes de degré supérieur à 2; car, si elles n'en avaient qu'un seul, ou si elles n'en avaient pas, le réseau qui posséderait la symétrie la plus voisine de celle de la forme appartiendrait à l'un des six autres systèmes. Les seuls polyèdres qui, ayant une symétrie égale ou inférieure à celle d'un réseau, peuvent exister avec deux axes de degré supérieur à 2, sont, comme on sait :

1° Ceux dont les axes de symètrie sont exprimés par le symbole

$$3A^4 \quad 4L^3 \quad 6L^2;$$

2° Ceux dont les axes de symétrie sont exprimés par le symbole

$$3A^2 \quad 4L^3.$$

Ainsi toutes les formes mériédriques possèdent les quatre axes ternaires de la forme holoédrique ; quant aux axes quaternaires, ils subsistent toujours comme axes de symétrie, mais ils peuvent devenir simplement binaires.

Il suit de là que les seuls modes de mériédrie que l'on rencontre dans le système cubique sont ceux qui sont représentés par les symboles suivants :

1°	$3A^4$	$4L^3$	$6L^2$	0C	0П	0P
2°	$3A^2$	$4L^3$	$0L^2$	C	3П	0P
3°	$3A^2$	$4L^3$	$0L^2$	0C	0П	6P
4°	$3A^2$	$4L^3$	$0L^2$	0C	0П	0P.

Pour voir quelle est la position des pôles dans chacun de ces modes de mériédrie, on remarque que les pôles situés dans un même quadrant et dans les trois triangles rectangles de même teinte (fig. 33), dérivant de l'un d'entre eux par la supposition que le centre du quadrant est le pôle d'un axe ternaire, ces trois pôles ne se séparent jamais dans la mériédrie. Des quatre quadrants qui se groupent autour de la direction de même signe d'un axe quaternaire, deux quadrants opposés restent encore identiques, si l'axe, cessant d'être quaternaire, reste binaire. Ces deux quadrants restent donc identiques dans toutes les formes mériédriques, puisque les axes quaternaires restent toujours au moins binaires.

On peut donc diviser les huit quadrants en deux groupes : le premier comprend les quadrants

$$xyz \quad \bar{x}\bar{y}z,$$
$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}y\bar{z},$$

et le second comprend les quadrants

$$\bar{x}\bar{y}\bar{z} \quad \bar{x}yz,$$
$$\bar{x}y\bar{z} \quad x\bar{y}z,$$

c'est-à-dire ceux qui sont opposés par le centre aux quatre premiers. Les quatre quadrants d'un même groupe restent toujours identiques entre eux dans les formes mériédriques.

Hémiédrie holoaxe. — Considérons maintenant le premier mode d'hémiédrie qui est le mode holoaxe. Nous réaliserons le genre de symétrie qui le caractérise en prenant dans chaque quadrant les pôles contenus dans les triangles de même nom; la forme obtenue avec les pôles des triangles droits est la forme *droite;* la forme conjuguée obtenue avec les pôles des triangles gauches est la forme *gauche.* Ces deux formes ne sont pas superposables.

La figure 67 représente un hémihexoctaèdre droit; la figure 68, un hémihexoctaèdre gauche.

Ce mode d'hémiédrie n'a pas été, jusqu'ici, observé dans les cristaux

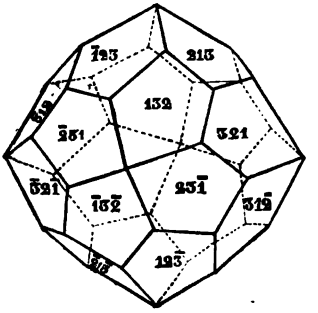


Fig. 67.

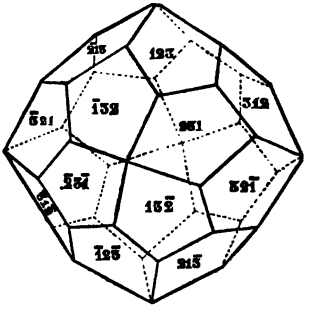


Fig. 68.

naturels. Nous ne nous y arrêterons donc pas, mais nous ferons remarquer qu'il ne peut s'appliquer qu'aux hexoctaèdres; car toutes les autres formes ayant leurs pôles dans des plans de symétrie, les deux formes gauche et droite se confondent alors en une seule qui est la forme holoédrique.

Deuxième mode d'hémiédrie ou *Parahémiédrie.* — Le symbole de la symétrie est :

$$3A^2 \quad 4L^3 \quad 0L^2 \quad C \quad 3\Pi \quad 0P.$$

Nous prendrons dans l'un des quadrants les pôles contenus dans les triangles droits; dans les quadrants identiques en vertu de la symétrie binaire des axes principaux, nous prendrons encore les pôles des triangles droits; mais dans les quatre quadrants opposés par le centre aux quatre premiers, nous prendrons les pôles contenus dans les triangles gauches, qui sont opposés par le centre aux triangles droits des premiers quadrants. En figurant en noir les triangles dont les pôles sont supprimés, en blanc ceux dont les pôles sont conservés, on a donc la figure ci-contre (fig. 69).

La forme hémiédrique la plus générale est un solide à 24 faces qui a des pointements à quatre faces sur les axes quaternaires de l'holoédrie, des pointements à trois faces sur les axes ternaires, et, dans les plans de symétrie principaux qui persistent, des pointements à quatre

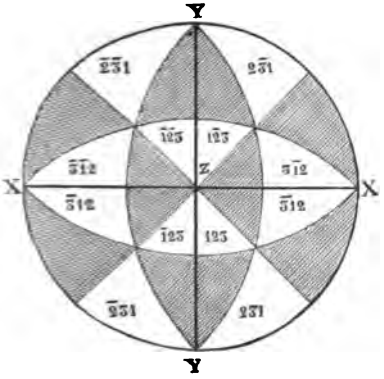


Fig. 69.

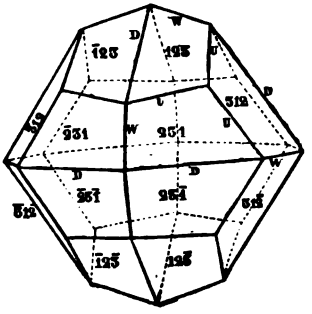


Fig. 70.

faces qui ne sont plus situés sur les axes binaires de la forme holoédrique (fig. 70). Les deux formes conjuguées sont d'ailleurs, comme on le sait, superposables.

L'hémiédrie ne s'applique pas aux formes holoédriques dont les pôles sont situés dans les plans de symétrie perpendiculaires aux axes binaires, ou plutôt, comme on le voit à la simple inspection de la figure, ces formes sont à elles-mêmes leurs hémiédriques. Les cristaux qui présentent ce mode d'hémiédrie pourront donc, sans qu'on puisse y voir une dérogation à la loi de l'hémiédrie, présenter les formes, en apparence holoédriques, du cube, de l'octaèdre, du trapézoèdre, du trioctaèdre et du dodécaèdre rhomboïdal.

L'hémiédrie s'applique, au contraire, aux formes dont les pôles sont situés dans les plans de symétrie principaux, telles que les hexatétraèdres. La forme hémiédrique est alors composée de douze faces qui forment deux à deux des biseaux parallèles aux axes coordonnés ou aux arêtes de cube et des pointements à trois faces sur les axes ternaires. Chaque face étant entourée de cinq autres, comme on le voit aisément sur la projection stéréographique, est un pentagone symétrique par rapport à l'intersection de celui des 3 plans de symétrie qui lui est perpendiculaire. Cette forme, représentée (fig. 71) est appelée *dodécaèdre pentagonal.*

Ce mode d'hémiédrie, qui est un des plus fréquents, prend le nom

d'*hémiédrie parallèle*, ou de *parahémiédrie*, ou encore d'*hémiédrie pentagonale*.

Les figures suivantes montrent les principales combinaisons de for-

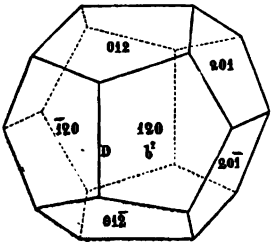


Fig. 71.

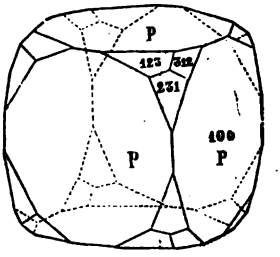


Fig 72.

mes qui se rencontrent dans les cristaux possédant, comme la pyrite jaune, la parahémiédrie.

Figures 72 et 73 : combinaison du cube et d'un hémihexoctaèdre.

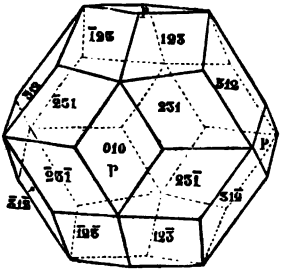


Fig. 73.

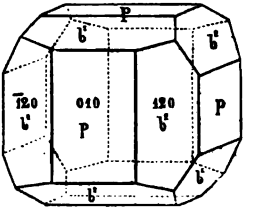


Fig. 74.

Figure 74 : combinaison du dodécaèdre pentagonal et du cube.

Figure 75 : combinaison du dodécaèdre pentagonal et de l'octaèdre;

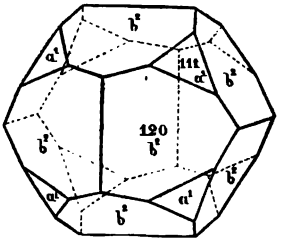


Fig. 75.

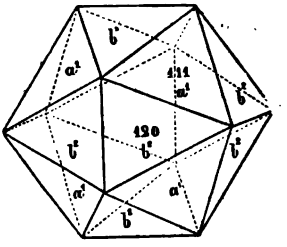


Fig. 76.

lorsque les plans de l'octaèdre sont suffisamment prolongés, comme dans la figure 76, on obtient un solide à vingt faces triangulaires que l'on appelle un *icosaèdre*.

Il peut arriver que les deux formes hémiédriques conjuguées existent en même temps dans le même cristal, bien que celui-ci soit réellement hémiédrique. Ces deux formes sont en effet des formes possibles, et la théorie n'apprend qu'une seule chose, c'est que leur existence simultanée n'est point nécessaire. L'hémiédrie se traduit alors par des différences physiques entre les faces des deux formes; c'est ainsi que ces faces pourront être inégalement brillantes, ou, comme il arrive plus souvent, inégalement développées. On s'apercevra dans ce cas que cette inégalité de développement n'est point due aux circonstances accidentelles de la cristallisation, par ce fait que toutes les faces d'une même forme hémiédrique auront subi à la fois une sorte d'arrêt de développement par rapport à celles de la forme conjuguée. La figure 77 montre la combinaison, sur le même cristal, de deux formes hémiédriques conjuguées dont chacune conduirait à un dodécaèdre pentagonal.

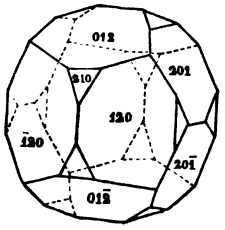


Fig. 77.

La figure 78 représente un cristal de pyrite jaune dans lequel

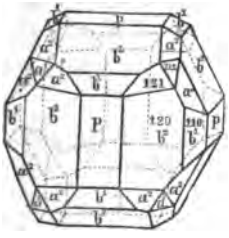


Fig. 78

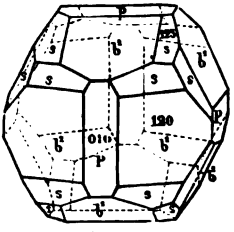


Fig. 79.

coexistent le cube, le dodécaèdre rhomboïdal, l'octaèdre, le leucitoèdre $a^2 = \{112\}$ et le dodécaèdre pentagonal $\frac{1}{2}b^2 = \pi\{120\}$.

La figure 79 représente un autre cristal de pyrite jaune possédant à la fois les faces du cube, du dodécaèdre pentagonal $\frac{1}{2}b^2 = \pi\{120\}$ et de l'hémihexoctaèdre $\pi\{123\}$.

Troisième mode d'hémiédrie ou *Antihémiédrie.* — Le symbole de la symétrie est :

$$3A^2 \quad 4L^3 \quad 0L^2 \quad 0C \quad 0\Pi \quad 6P.$$

Les éléments de symétrie forcent à prendre dans un quadrant où

se trouve un pôle les six pôles de la forme holoédrique : on conserve donc les six pôles de chacun des quatre quadrants identiques entre eux en vertu de la symétrie binaire des axes principaux. Les pôles des quatre autres quadrants sont supprimés. La figure 80, dans laquelle les quadrants hachés sont ceux dont les pôles sont conservés, montre comment les pôles situés au-dessus du plan de projection se projettent dans ce système d'hémiédrie qu'on appelle *hémiédrie inclinée* ou *antihémiédrie*, ou encore *hémiédrie tétraédrique*, par une raison qu'on verra tout à l'heure. Au-dessous du plan de projection, les quadrants conservés se projettent sur les quadrants supprimés de la partie supérieure.

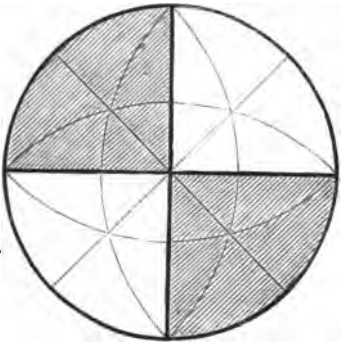


Fig. 80.

L'hémihexoctaèdre possède alors des pointements à six faces placés sur les axes ternaires, mais qui sont différents aux deux extrémités d'un même axe, et des pointements à quatre faces sur les axes quaternaires de la forme holoédrique. La figure 81 représente cette forme hémiédrique qui possède vingt-quatre faces, non parallèles entre elles, deux à deux.

L'hémiédrie s'applique à toutes les formes dont les pôles ne sont

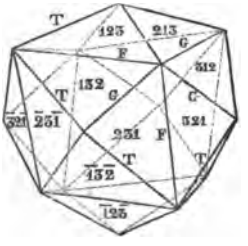


Fig. 81.

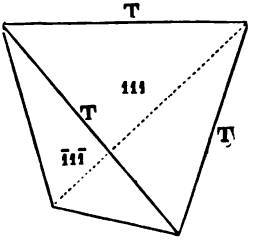


Fig. 82.

pas situés dans les plans de symétrie principaux de la forme holoédrique. Elle ne s'applique ni au cube, ni au dodécaèdre rhomboïdal, ni aux hexatétraèdres.

Lorsque l'hémiédrie s'applique à l'octaèdre, elle donne le tétraèdre régulier (fig. 82).

Appliquée aux trapézoèdres, elle donne la forme (fig. 83) qui repré-

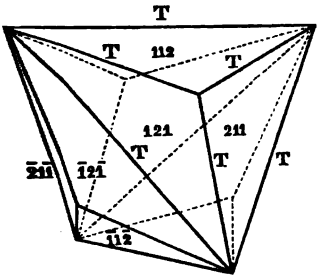


Fig. 83.

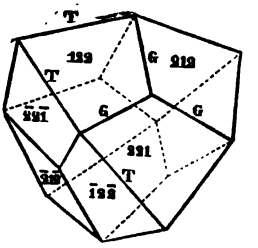


Fig. 84.

sente un tétraèdre dont chaque face serait remplacée par une pyramide trièdre.

Appliquée au trioctaèdre, elle donne le solide de la figure 84.

La figure 85 représente la combinaison du cube et du tétraèdre.

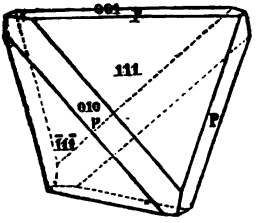


Fig. 85.

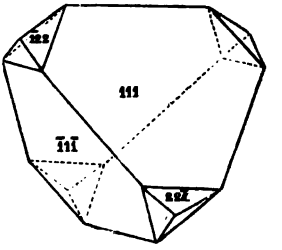


Fig. 86.

La figure 86 représente la combinaison du tétraèdre et d'un hémi-trioctaèdre $\frac{1}{2}a^{\frac{1}{2}} = x\left\{122\right\}$.

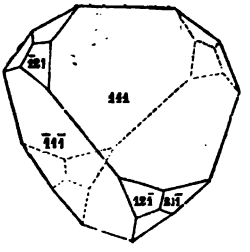


Fig. 87.

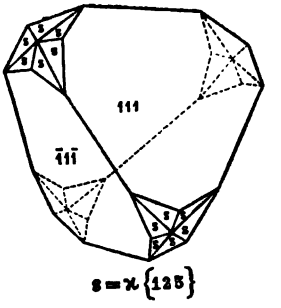


Fig. 88.

La figure 87 représente la combinaison du tétraèdre et d'un hémi-trapézoèdre.

La figure 88 représente la combinaison du tétraèdre et d'un hémihexoctaèdre.

La figure 89 représente la combinaison de deux tétraèdres conjugués; le développement beaucoup moindre des faces de l'un des tétraèdres manifeste l'hémiédrie.

La figure 90 représente un cristal de boracite où se trouve la combi-

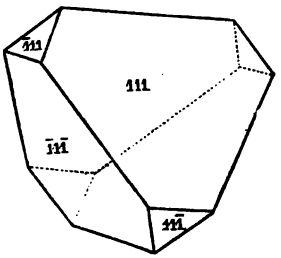


Fig. 89.

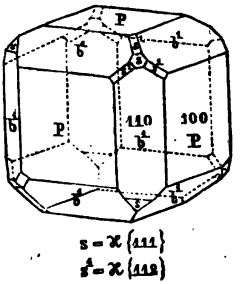


Fig. 90.

naison du cube, du dodécaèdre rhomboïdal, du tétraèdre et de l'hémitrapézoèdre $\frac{1}{2}a^2 = x \left\{ 112 \right\}$.

Quatrième mode de mériédrie ou *Tétartoédrie.* — Le symbole de la symétrie est :

$$3A^2 \quad 4L^3 \quad 0C \quad 0H \quad 0P.$$

Ce symbole montre aisément qu'on arrive à un même mode de tétartoédrie en appliquant l'hémiédrie à l'un quelconque des modes hémiédriques.

Une même forme simple donne d'ailleurs quatre formes conjuguées tétartoédriques. De ces quatre formes il y en a deux qui peuvent être regardées comme étant les deux formes conjuguées hémiédriques d'une forme hémiédrique holoaxe. Ces deux formes sont superposables, puisqu'elles n'ont pas les mêmes axes que celles dont on les suppose dérivées par hémiédrie. Mais les deux formes conjuguées, dont la réunion donnerait la forme parahémiédrique, ont les mêmes axes que celles dont on les suppose dérivées; elles ne sont donc pas superposables, et peuvent être distinguées l'une de l'autre. La tétartoédrie conduit donc à deux solides qui se distinguent entre eux autrement que par leur position dans l'espace.

Dans les figures 91 et 92, les triangles hachés représentent ceux dont

les pôles sont conservés dans une forme tétartoèdrique ; les triangles les plus foncés se rapportent à la partie supérieure du plan de projection, les moins foncés, à la partie inférieure. En conservant la même règle que dans le cas de l'hémiédrie holoaxe, la forme dont les pôles

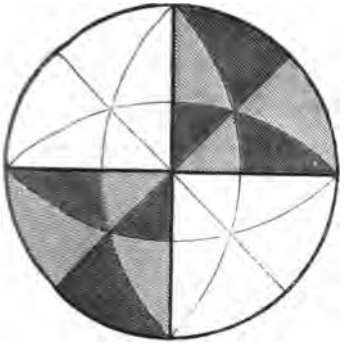


Fig. 91.

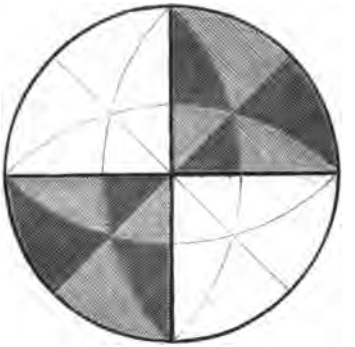


Fig. 92.

sont représentés figure 91 est droite, celle dont les pôles sont représentés figure 92 est gauche.

Il est clair que certaines formes holoédriques, dont les pôles appartiennent à la fois aux triangles conservés et supprimés, ne sont point atteintes par la tétartoèdrie ; telles sont celles du cube et du dodécaèdre rhomboïdal.

Parmi les formes hémiédriques, celles dont les pôles se trouvent dans le même cas ne sont pas non plus soumises à la tétartoèdrie. Telles sont toutes les formes antihémiédriques dont les pôles se trouvent dans les plans de symétrie binaire, comme les tétraèdres, les hémitrapézoèdres et les hémitrioctaèdres. Telles sont encore les formes parahémiédriques dont les pôles se trouvent dans les plans coordonnés, comme les do-

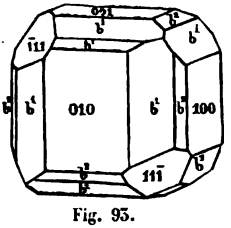


Fig. 93.

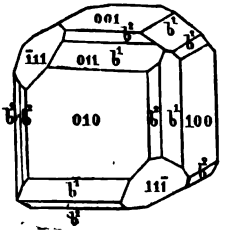


Fig. 94.

décaèdres pentagonaux. Des cristaux tétartoèdriques peuvent donc présenter à la fois les faces du dodécaèdre pentagonal et celles du tétraè-

dre; et réciproquement, lorsque ces deux formes coexistent dans le même cristal, nous sommes avertis que celui-ci est tétartoédrique et peut, par conséquent, présenter deux formes non superposables.

Un exemple célèbre dans la science est fourni par le chlorate de soude, où l'existence de deux formes non superposables, entraînant la polarisation rotatoire, a été démontrée par M. Marbach. La figure 93 représente un cristal droit de chlorate de soude, possédant les faces du cube, du dodécaèdre rhomboïdal, du dodécaèdre pentagonal $\pi \left\{ 210 \right\}$ et enfin du tétraèdre. La figure 94 est un cristal gauche de chlorate de soude montrant les mêmes formes.

CHAPITRE VII

SYSTÈME SÉNAIRE OU HEXAGONAL.

S rhomboédrique (*pro parte*) (Miller). — S. orthohexagonal (Schrauf).

Modes possibles du Réseau. — Le système est caractérisé par la symétrie dont le symbole est

$$A^6\ 3L^2\ 3L'^2\ C\ \Pi\ 3P\ 3P'.$$

Dans un plan réticulaire normal à l'axe sénaire ou axe principal, on voit sans peine que, si l'on suppose l'axe passant par un certain nœud A (fig. 95), et si l'on prend, dans le plan, un autre nœud A_1, le plus voisin possible de A, l'existence de A_1 entraîne celle de 6 nœuds A_1 A_2 . . . A_6, disposés aux sommets d'un hexagone régulier dont A est le centre. Le réseau du plan réticulaire perpendiculaire à l'axe sénaire est donc formé d'hexagones réguliers centrés ou de triangles équilatéraux juxtaposés.

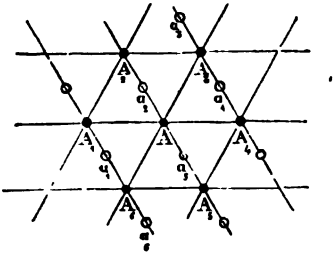


Fig. 95.

Si nous considérons le plan réticulaire contigu, il y a deux cas possibles :

1° Celui où les projections des nœuds de ce plan contigu coïncident avec les nœuds du plan ; il est clair que cette supposition est compatible avec le degré de symétrie de l'axe ;

2° Celui où les projections des nœuds du plan contigu coïncident avec les milieux des côtés ou les centres du parallélogramme géné-

rateur. Ces projections occuperaient alors des positions telles que a_1 a_2 . . . a_6, et il est aisé de voir que dans ce cas l'axe A ne serait plus sénaire, mais simplement binaire.

La seule hypothèse admissible est donc la première, et la maille solide du réseau est nécessairement un prisme droit triéquiangle ou un prisme droit à base rhombe de 60° et 120°, ou enfin un prisme droit hexagonal régulier à bases centrées. L'axe de ce dernier prisme est l'axe sénaire; les diagonales de sa base, les axes binaires de première espèce; les apothèmes, les axes binaires de deuxième espèce.

Systèmes d'axes coordonnés usités. — On pourrait rapporter les cristaux de ce système à l'axe sénaire et à deux diagonales de la base, c'est-à dire deux axes binaires de première espèce. On pourrait aussi substituer aux deux derniers axes, qui sont obliques, une diagonale et l'apothème perpendiculaire, c'est-à-dire deux axes binaires, l'un de première, l'autre de deuxième espèce. Mais, pour faire apparaître la symétrie spéciale du système, il est préférable de prendre, dans le plan de la base du prisme hexagonal, non plus deux, mais trois axes coordonnés qui sont trois axes binaires de même espèce faisant entre eux des angles de 120°.

On a déjà étudié précédemment de semblables systèmes d'axes, et l'on sait que, si p q r s sont les quatre caractéristiques dont la dernière se rapportera à l'axe vertical, on a, entre les trois caractéristiques qui se rapportent aux axes binaires horizontaux, la relation

$$p+q+r=0.$$

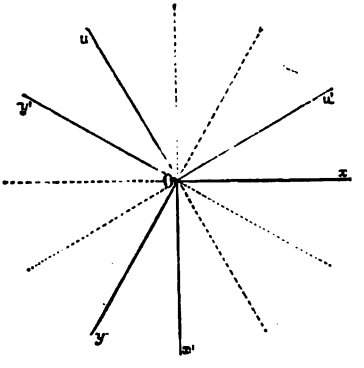


Fig. 96.

On peut d'ailleurs choisir pour les trois axes coordonnés horizontaux, soit les axes binaires de première espèce x, y, u, soit ceux de seconde x', y', u' (fig. 96).

Négligeons pour un moment l'axe auxiliaire des u. Choisissons les axes positifs des x', y', de telle sorte que l'axe des x' soit perpendiculaire à celui des x, et que la partie positive des x' soit située dans l'angle des axes positifs x y ; la partie positive des y' dans l'angle des axes positifs y u, etc. ; l'axe des x' sera déterminé par l'intersection du

plan des xy (001) avec le plan des zx' ($2\bar{1}0$), les caractéristiques de cet axe seront donc $\dot{1}20$. L'axe des y' déterminé par l'intersection du plan (001) avec le plan des zy' ($\bar{1}20$) aura pour caractéristiques $\bar{2}\bar{1}0$; enfin l'axe des u' déterminé par l'intersection du plan (001) avec le plan ($\bar{1}\bar{1}0$) aura pour caractéristiques $1\bar{1}0$.

On aura donc en appelant p, q, r les coefficients d'un plan quelconque par rapport aux premiers axes horizontaux : p', q', r', ceux du même plan par rapport aux nouveaux, et en se rappelant la relation $p+q+r=0$

$$\begin{aligned} p' &= p+2q = q-r \\ q' &= -2p-q = r-p \\ r' &= p-q, \end{aligned}$$

équations symétriques, faciles à former, et sur lesquelles on peut aisément vérifier la relation connue $p'+q'+r'=0$. Il est clair que les équations seraient d'une forme identique, s'il s'agissait de passer des axes binaires de deuxième espèce aux axes binaires de première.

Quant au paramètre a' des nouveaux axes, il est

$$a' = a\sqrt{3},$$

a étant celui des anciens.

Calculs des angles des arêtes et des faces. — Si nous supposons deux faces

$$\mathrm{P},\ (pqrs) \text{ et } \mathrm{P}',\ (p'q'r's')$$

l'angle des normales à ces deux faces sera donné par la formule

$$\cos \mathrm{PP}' = \frac{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}ss' + pp' + qq' + rr'}{\sqrt{\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s^2 + p^2 + q^2 + r^2\right)\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2\right)}}$$

et l'angle des deux arêtes R ($ghkl$), R' ($g'h'k'l'$), est

$$\cos \mathrm{RR}' \frac{ll' + \frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}(gg' + hh' + kk')}{\sqrt{\left[l^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}(g^2 + h^2 + k^2)\right]\left[l'^2 + \frac{1}{2}\frac{a^2}{h^2}(g'^2 + h'^2 + k'^2)\right]}}$$

Formes holoédriques. — Pour suivre plus commodément la dis-

cussion, nous tracerons une projection gnomonique des pôles sur un plan parallèle au plan de symétrie (fig. 97 et 98, pl. II). Les lignes x, y, u, sont les trois axes coordonnés horizontaux du réseau primitif; X et Y sont les axes horizontaux du réseau polaire. Il importe de remarquer que, pour obtenir les trois caractéristiques horizontales d'un pôle quelconque, il faut prendre, sur la projection, les coordonnées numériques de ce pôle par rapport à X et à Y, ce qui donne les deux premières caractéristiques; la troisième s'obtient en prenant, en signe contraire, la somme algébrique des deux premières.

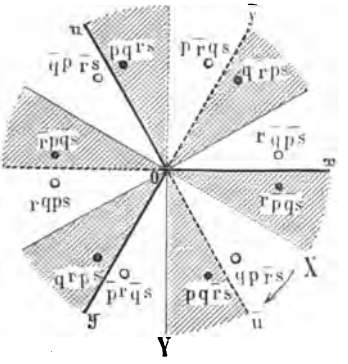


Fig. 97.

Pour tracer la projection gnomonique, il faut connaître les paramètres du réseau polaire. Soit, dans le réseau polaire, H le paramètre e l'axe ternaire et A celui des axes perpendiculaires aux axes de première espèce du réseau primitif; le formules de la page 28 donnent

$$\frac{H}{A} = \frac{a}{h}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

H est la distance du point de vue au plan de projection; A est la distance des deux pôles (0001) et $(10\bar{1}1)$.

Le paramètre A′ des axes de deuxième espèce du réseau polaire est la distance qui sépare sur la bissectrice de XY les pôles (0001) et $(11\bar{2}1)$; on a :

$$A = A'\sqrt{3}, \text{ d'où } \frac{H'}{A} = \frac{1}{2}\frac{a}{h}.$$

Pour éviter toute confusion, nous conviendrons de donner, dans tout ce qui va suivre, aux diverses caractéristiques leurs signes *explicites*.

Un pôle quelconque $(pq\bar{r}s)$ en entraîne d'abord cinq autres situés à la même distance de l'axe sénaire, et venant en superposition lorsqu'on fait tourner le cristal autour de l'axe sénaire d'un angle égal à $\frac{2\pi}{6} = 60°$. Traçons autour de O douze secteurs de 30° et hachons-les de deux en deux (fig. 97). Si $pq\bar{r}s$ se trouve dans un secteur haché, il

en sera de même des cinq autres. Mais les lignes qui séparent les secteurs étant les traces des plans de symétrie, le pôle $(pq\bar{r}s)$ situé dans un secteur haché en entraîne un autre $(qp\bar{r}s)$ situé dans un des secteurs adjacents non hachés : on aura donc encore 6 pôles situés dans les secteurs non hachés.

Nous avons fait usage de la symétrie de l'axe sénaire, et de l'existence des 6 plans de symétrie menés suivant cet axe ; il ne nous reste plus qu'à faire appel à l'existence du plan de symétrie principal pour avoir épuisé les éléments de symétrie, car un axe sénaire, un plan de symétrie perpendiculaire et 6 plans de symétrie menés suivant l'axe sénaire entraînent l'existence d'un centre et de six axes binaires. L'existence du plan de symétrie principal nous donnera 12 pôles placés au-dessous de ce plan et symétriques, par rapport à celui-ci, des 12 pôles supérieurs.

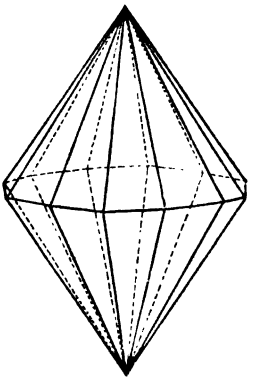


Fig. 99.

La forme la plus générale du système sénaire se compose donc de deux pyramides à douze faces ayant une base commune située dans le plan de symétrie. Cette base n'est pas un dodécagone régulier, mais les sommets de ce dodécagone pris de deux en deux forment un hexagone régulier. Cette forme est ce qu'on appelle le *didodécaèdre* (fig. 99).

Les notations des 24 pôles de la forme sont faciles à obtenir. Il suffit de s'occuper des 12 pôles situés au-dessus du plan de symétrie, car les 12 autres, étant opposés par le centre aux 12 premiers, ont les mêmes notations changées de signe. Il est d'ailleurs inutile de parler de la caractéristique verticale s, qui est la même pour tous les pôles.

Par une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour de l'axe sénaire, dans le sens xy, x vient en coïncidence avec y, etc. : on obtiendra donc les symboles des deux pôles avec lesquels $(pq\bar{r})$ vient successivement en coïncidence, en effectuant les permutations tournantes des 3 lettres p, q, $\bar{r}$; ces symboles seront $(\bar{r}pq)$, $(q\bar{r}p)$.

Par une rotation de $\frac{2\pi}{6}$, x se change en $\bar{u}$, etc., et le pôle $(pq\bar{r})$ vient en coïncidence avec $(\bar{q}r\bar{p})$, lequel par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$ vient

successivement en coïncidence avec les pôles $(\bar{p}\bar{q}r)$ et $(r\bar{p}\bar{q})$, dont les symboles sont obtenus par les permutations tournantes des lettres $\bar{q}$, r, $\bar{p}$.

Les pôles qui se trouvent dans les secteurs hachés de la figure 98 sont donc les suivants :

$$\begin{array}{ll} (pq\bar{r}) & (\bar{q}r\bar{p}) \\ (\bar{r}qp) & (\bar{p}\bar{q}r) \\ (q\bar{r}p) & (r\bar{p}\bar{q}). \end{array}$$

Les 3 pôles écrits l'un au-dessous de l'autre viennent en coïncidence par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$; deux pôles situés sur la même ligne horizontale viennent en coïncidence par des rotations de $\frac{2\pi}{6}$.

Le pôle symétrique de $(pq\bar{r})$, par rapport au plan $z\bar{u}$, est situé dans un secteur non haché. Il a le même u que le premier et n'en diffère que par l'arrangement des x et y : le symbole de ce pôle est donc $(qp\bar{r})$. En raisonnant sur ce pôle comme sur le pôle $(pq\bar{r})$, nous trouverons les symboles des 6 pôles situés dans les secteurs non hachés.

On forme ainsi le tableau suivant des caractéristiques horizontales des 12 pôles supérieurs :

$$\begin{array}{llll} pq\bar{r} & \bar{q}r\bar{p} & qp\bar{r} & \bar{p}r\bar{q} \\ \bar{r}pq & \bar{p}\bar{q}r & \bar{r}qp & \bar{q}\bar{p}r \\ q\bar{r}p & r\bar{p}\bar{q} & p\bar{r}q & r\bar{q}\bar{p}. \end{array}$$

Nous conviendrons, pour désigner la forme, de choisir les caractéristiques du pôle pour lequel, p et q étant positifs, on a $p < q$. C'est le pôle qui est situé dans l'angle $Y\bar{u}$ de la projection gnomonique.

Lorsque le pôle $(pq\bar{r}s)$ est situé dans le plan $z\bar{u}$, on a $p = q$; le symbole de la forme est

$$\left\{ p\, p\, \overline{2p}\, s \right\};$$

tous les pôles sont situés dans les plans coordonnés, et la forme simple ne se compose plus que d'une double pyramide hexagonale dont la base, qui est un hexagone régulier, est dans le plan de sy-

métrie. Les côtés de cet hexagone sont perpendiculaires aux axes binaires de première espèce et parallèles aux axes de deuxième; c'est ce qu'on appelle le *dihexaèdre* ou *isoscéloèdre de seconde espèce* (fig. 100).

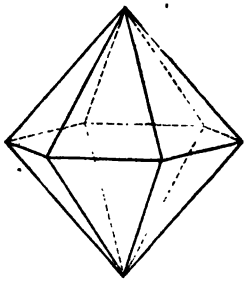


Fig. 100.

Si le pôle $(pq\bar{r}s)$ est placé sur un axe coordonné, Y, par exemple, du réseau polaire, on a $p = 0$; la forme simple est notée $\{0p\bar{q}s\}$; on a encore un dihexaèdre; mais les arêtes de la base sont perpendiculaires aux axes binaires de seconde espèce, et parallèles à ceux de première; c'est le *dihexaèdre ou isoscéloèdre de première espèce.*

Si le pôle coïncide avec le centre même de projection, la forme simple qui est notée $\{0001\}$ se réduit à *deux plans* perpendiculaires à l'axe principal.

Si le pôle $(pq\bar{r}s)$ se trouve dans le plan de symétrie horizontal, sa projection vient se placer à l'infini sur la direction d'un rayon partant de O et passant par un nombre infini de pôles ayant tous pour caractéristiques horizontales p, q, $\bar{r}$. Le pôle situé à l'infini a $s = 0$, et la forme est notée $\{pq\bar{r}0\}$; dans le cas le plus général, cette forme est un *prisme dodécaèdre;* la base en est un dodécagone non régulier, mais dont les sommets, pris de deux en deux, forment un hexagone régulier.

Lorsque $p = q$, les pôles sont placés à l'infini sur les axes de première espèce; la forme est un prisme ayant pour base un hexagone régulier dont les arêtes sont perpendiculaires aux axes de première espèce et parallèles aux axes de seconde; c'est le *prisme hexaèdre de seconde espèce*, noté $\{11\bar{2}0\}$.

Lorsque $p = 0$, les pôles sont placés à l'infini sur les axes de seconde espèce du réseau primitif, la forme est un prisme hexagonal régulier dont les plans sont perpendiculaires aux axes de seconde espèce et parallèles aux axes de première espèce ; c'est le *prisme hexaèdre de première espèce*, noté $\{01\bar{1}0\}$.

Formes composées et système de notations de Lévy. — Nous n'examinerons que les combinaisons des formes simples avec le prisme

hexagonal régulier de première espèce, qui est presque toujours une des formes dominantes des cristaux appartenant à ce système, et celle qui leur imprime leur aspect général.

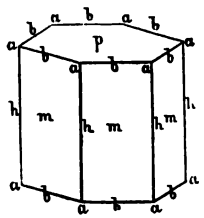


Fig. 101.

Nous remarquons que dans le prisme hexagonal les 12 angles qu'on appellera a sont identiques entre eux, ainsi que les 12 arêtes horizontales qu'on appellera b, et les 6 arêtes verticales qu'on désignera par h; les faces verticales seront appelées m et les bases p (fig. 101).

Un plan quelconque de la forme $\left\{ pq\bar{r}s \right\}$ vient rencontrer les 3 arêtes du prisme, issues d'un des angles a, du même côté de a; placé sur ce prisme, ce plan viendra donc tronquer cet angle en supprimant sur les arêtes b des longueurs numériques représentées par $\frac{1}{p}$ et $\frac{1}{q}$, et sur l'arête h une longueur numérique représentée par $\frac{1}{s}$. En vertu de la *symétrie* par rapport au plan vertical bissecteur de l'angle de la base, il viendra se placer sur le même angle a un autre plan qui, combiné avec le premier, remplacera l'angle par une espèce de biseau dont l'arête inclinée est contenue dans le plan bissecteur (fig. 102).

Lévy, pour noter la forme simple $\left\{ pq\bar{r}s \right\}$, définit la manière dont chaque plan est placé par rapport au prisme primitif en employant le symbole

$$b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} h^{\frac{1}{s}} = \left\{ pq\bar{r}s \right\}.$$

Lorsque $p = q$, les deux plans de chaque biseau se confondent en un seul (fig. 103), et chaque angle a est tronqué par un plan incliné sur l'axe vertical et perpendiculaire sur le plan vertical bissecteur de l'angle de la base. Lévy désigne cet isoscéloèdre de seconde espèce par le symbole

$$a^{\frac{1}{s}} = a^{\frac{s}{p}} = \left\{ pp\overline{2p}s \right\},$$

qui indique que chaque plan est placé symétriquement sur a, que les

longueurs numériques égales, interceptées sur les arêtes b, sont repré-

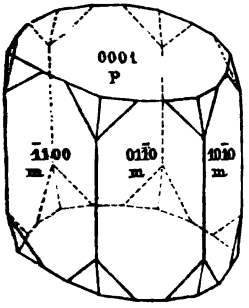


Fig. 102.

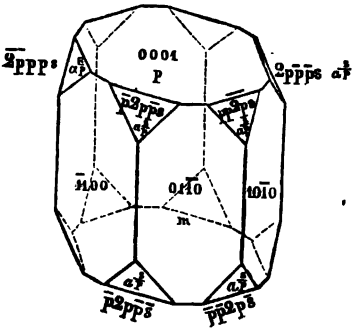


Fig. 103.

sentées par le numérateur $\frac{1}{p}$ de l'exposant de a, le dénominateur $\frac{1}{s}$ étant la longueur numérique interceptée sur l'arête verticale.

Lorsque $p = s$, la forme est encore, comme dans le cas général, un didodécaèdre, mais Lévy en simplifie la notation en se servant du symbole

$$a_{\frac{1}{p}\,\frac{1}{q}} = a_{\frac{q}{p}} = b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} h^{\frac{1}{p}} = \left\{ pq\bar{r}p \right\}.$$

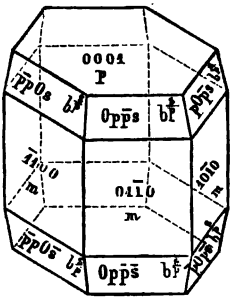


Fig. 104.

Le numérateur de l'*indice* de a est la longueur numérique qui se répète deux fois.

Lorsque $p = 0$, chacun des plans de la forme est parallèle à une arête b, qu'elle vient remplacer par une troncature parallèle (fig. 104). Lévy désigne ces isoscéloèdres de première espèce, placés sur les arêtes b, par le symbole

$$b^{\frac{1}{s}} = b^{\frac{s}{q}} = \left\{ 0qq\bar{s} \right\},$$

dans lequel le numérateur de l'exposant de b est la longueur numérique interceptée sur l'arête horizontale.

Lorsque $s = 0$, les plans de la forme sont parallèles aux arêtes h,

et viennent remplacer chacune d'elles par un biseau à arête vertical symétrique par rapport au plan bissecteur (fig. 105). Lévy désigne ce prismes dodécaèdres par le symbole

$$h^{\frac{1}{\frac{p}{q}}} = h^{\frac{q}{p}} = \left\{ pq\bar{r}0 \right\}.$$

Il est indifférent de placer p ou q au numérateur de l'exposant de h

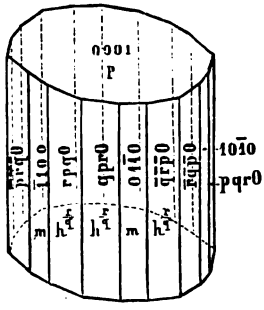


Fig. 105.

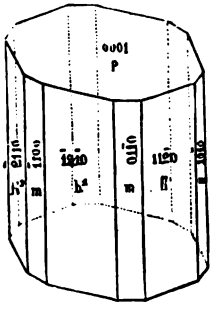


Fig. 106.

cependant, pour éviter la confusion, on convient de prendre toujours cet exposant > 1.

Lorsque $p = q$, les deux plans de chaque biseau se confondent en un seul perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre ou *tangent* à l'arête h (fig. 106). Dans le système de notation de Lévy, cette forme, qui est le prisme hexagonal de deuxième espèce, se trouve désigné par le symbole

$$h^1 = \left\{ 11\bar{2}0 \right\}.$$

Nous avons, dans ce qui précède, montré quelle est la position des diverses formes simples sur le prisme hexagonal de première espèce. Pour voir quelle est la position de ces formes par rapport au prisme hexagonal de deuxième espèce, il suffirait de remarquer que les isoscéloèdres de première espèce sont alors placés symétriquement sur les angles et non plus sur les arêtes du prisme ; qu'au contraire les isoscéloèdres de première espèce sont placés non plus sur les arêtes, mais symétriquement sur les angles.

Formes mériédriques. — La symétrie complète de ce système étant représentée par le symbole

$$A^6\ 3L^2\ 3L'^2\ C\ \Pi\ 3P\ 3P',$$

nous allons rechercher tous les modes de symétrie mériédriques qu'il comporte.

A. — L'AXE SÉNAIRE EST CONSERVÉ.

1° *Hémiédrie holoaxe.* — Si on conserve un axe binaire, il faut les conserver tous ; on ne peut en même temps conserver le centre qui entraînerait tous les plans de symétrie et ramènerait à l'holoèdrie : on n'a donc qu'un seul mode d'hémiédrie qui est l'hémiédrie holoaxe et est caractérisée par le symbole

$$A^6\ 3L^2\ 3L'^2\ 0C\ 0\Pi\ 0P\ 0P'.$$

Au-dessus du plan de symétrie, les 6 pôles des secteurs hachés, de la figure 97, sont conservés, les 6 autres supprimés. Au-dessous du plan de symétrie, on conserve les 6 pôles des secteurs qui se projettent sur les secteurs supérieurs non hachés. Ce genre d'hémiédrie ne peut s'appliquer qu'aux didodécaèdres. Il donne deux formes conjuguées non superposables, dont chacune est formée par deux pyra-

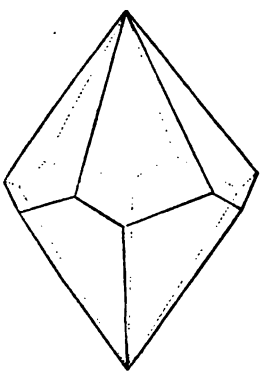


Fig. 107.

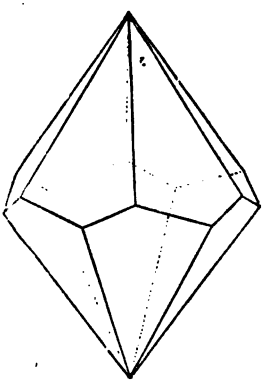


Fig. 108.

mides à 6 faces accolées et se raccordant suivant 12 arêtes en zigzag. C'est le *trapézoèdre hexagonal* de Naumann (fig. 107 et 108). — On ap-

pelle forme gauche celle où l'on conserve le pôle du secteur qui s trouve à gauche de l'observateur et en haut lorsqu'il regarde en fac un axe de *seconde* espèce.

Si l'on supprime un axe binaire, il faut les supprimer tous. Si en outre on supprime le centre, il y a deux cas possibles.

2° Ou bien on conserve les plans de symétrie verticaux (qui doiven rester ou disparaître à la fois), et alors on a une hémiédrie caractérisée par le symbole

$$A^6\ 0L^2\ 0C\ 3P\ 3P'.$$

Cette hémiédrie conserve tous les pôles supérieurs et supprime tous les inférieurs ; le cristal n'est pas terminé de la même façon aux deux extrémités de l'axe sénaire. L'hémiédrie ne s'applique pas aux formes parallèles à cet axe.

3° Ou bien on ne conserve pas les plans de symétrie, et l'on obtient une tétartoédrie caractérisée par le symbole

$$A^6\ 0L^2\ 0C\ 0P.$$

Ce serait une hémiérie de l'hémiédrie précédente. Les pôles inférieurs sont encore tous supprimés et l'on ne conserve que la moitié des pôles supérieurs. L'hémiédrie ne s'applique qu'aux didodécaèdres. Comme elle est holoaxe par rapport au système précédent, cette hémiédrie donnerait des formes conjuguées non superposables et permettrait par conséquent de distinguer des cristaux droits et des cristaux gauches.

4° *Parahémiédrie.* — Si en conservant l'axe sénaire et supprimant les axes binaires on conserve le centre, on est obligé de supprimer les plans de symétrie verticaux dont la présence, combinée avec celle du centre, forcerait à rétablir les axes binaires. Le seul mode hémiédrique possible est donc caractérisé par le symbole

$$A^6\ 0L^2\ C\ \Pi.$$

Les 6 pôles des secteurs de même teinte (fig. 97) sont conservés au-dessus du plan de symétrie ; les 6 pôles conservés au-dessous sont les symétriques des premiers. La forme la plus générale est donnée par deux pyramides hexagonales accolées suivant une base commune dans le plan de symétrie ; cette base commune est un hexagone régulier dont

les côtés ne sont plus ni parallèles ni perpendiculaires aux axes binaires. Lorsque les pôles sont dans le plan de symétrie principal, la forme hémiédrique est un prisme hexagonal dont la base régulière est tournée dissymétriquement par rapport aux axes binaires. Cette hémiédrie, que Naumann appelle *pyramidale*, ne s'applique pas aux formes dont les pôles sont situés dans les plans de symétrie.

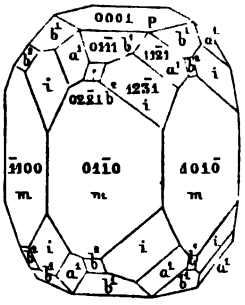


Fig. 109.

L'*apatite*, dans les cristaux naturels, offre un exemple de ce genre d'hémiédrie. La figure 109 montre un cristal complexe d'apatite qui possède les formes simples suivantes :

$$p = \{0001\};$$

$$m = \{01\bar{1}0\} \text{ Prime hexadère de 1re espèce.}$$

$$\left.\begin{array}{l} b^1 = \{01\bar{1}1\} \\ b^{\frac{1}{2}} = \{02\bar{2}1\} \end{array}\right\} \text{ Isoscéloèdres de 1re espèce.}$$

$$a^1 = \{11\bar{2}1\} \text{ Isoscéloèdre de 2e espèce.}$$

$$i = \frac{1}{2}\{b^1 b^{\frac{1}{2}} h^1\} = \pi\{12\bar{3}1\} \text{ Didodécaèdre parahémiédrique.}$$

B. — L'AXE SÉNAIRE DEVIENT TERNAIRE.

Supposons maintenant qu'on diminue de moitié l'indice de l'axe sénaire. Les combinaisons possibles sont les quatre combinaisons hémiédriques :

$$\left\{\begin{array}{l} A^3\ 3L^2\ C\ 3P \\ A^3\ 3L'^2\ C\ 3P' \\ A^3\ 3L^2\ 0C\ \Pi\ 3P' \\ A^3\ 3L'^2\ 0C\ \Pi\ 3P. \end{array}\right.$$

ou les 5 combinaisons tétartoédriques :

$$\left\{\begin{array}{l} A^3\ 3L^2\ 0C\ 0P \\ A^3\ 3L'^2\ 0C\ 0P \\ A^3\ 0L^2\ 0C\ 3P \\ A^3\ 0L^2\ 0C\ 3P' \end{array}\right.$$

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ \Pi.$$

ou enfin la combinaison hémitétartoédrique :

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 0P.$$

Parmi les combinaisons hémiédriques, les deux premières doivent être rejetées comme possédant exactement la symétrie du système ternaire. Mais il faut noter avec soin qu'il résulte de cette discussion que les formes du système ternaire peuvent être considérées comme des formes hémiédriques du système sénaire. C'est pour cette raison que beaucoup de cristallographes confondent en un seul les systèmes ternaire et sénaire. La rigueur des principes s'oppose à cette confusion.

Parmi les combinaisons tétartoédriques, les quatre premières sont des hémiédries du système ternaire : il ne reste donc à étudier que la cinquième.

Enfin la combinaison hémitétartoédrique est une tétartoédrie du système ternaire.

Parmi les combinaisons mériédriques dont l'axe principal est ternaire, il n'y a donc que deux combinaisons hémiédriques et une combinaison tétartoédrique qui appartiennent exclusivement au système sénaire.

5° Les deux combinaisons hémiédriques

$$A^3\ 3L^2\ 0C\ \Pi\ 3P'$$
$$A^3\ 3L'^2\ 0C\ \Pi\ 3P$$

ne donnent en réalité qu'un même mode d'hémiédrie s'appliquant respectivement à chacune des deux espèces d'axes binaires.

Si ce sont des axes de première espèce qui sont conservés, on conserve au-dessus du plan de symétrie les pôles de deux secteurs hachés et non hachés de la figure 97, se juxtaposant suivant la direction *positive* d'un axe binaire de première espèce ; on supprime ceux des deux secteurs qui se juxtaposent suivant la direction *négative* d'un axe binaire de première espèce. Au-dessous du plan de symétrie on conserve les pôles symétriques de ceux qui sont conservés au-dessus. La figure 110, dans laquelle les secteurs hachés représentent ceux dont les pôles sont conservés au-dessus du plan de symétrie, montre la projection des pôles dans ce genre d'hémiédrie.

La forme la plus générale est constituée par deux pyramides à 6 fa-

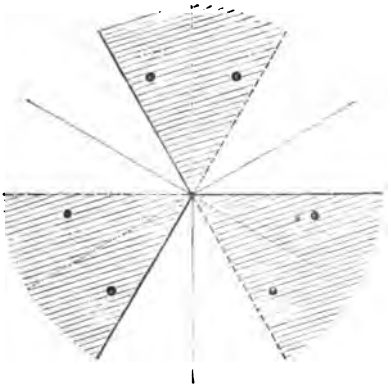


Fig. 110.

ces ayant pour base commune un hexagone non régulier. Les sommets de cet hexagone, pris de trois en trois, forment un triangle équilatéral, dont les côtés ne sont pas placés symétriquement par rapport aux axes binaires (fig. 111).

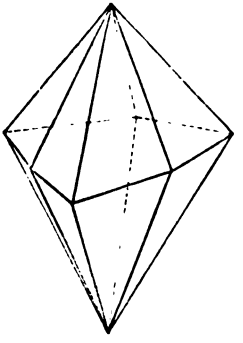


Fig. 111.

Lorsque la forme est parallèle, on a un prisme hexagone dont la base est analogue à celle des doubles pyramides précédentes.

Ce genre d'hémiédrie ne s'applique pas aux formes holoédriques dont les pôles sont situés dans les plans de symétrie de seconde espèce.

6° La tétartoédrie caractérisée par le symbole

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ \Pi$$

prend au-dessus du plan de symétrie les 3 pôles situés du même côté des trois directions de même signe appartenant à trois axes binaires de même espèce, et au-dessous du plan de symétrie les 3 pôles symétriques du premier. La forme la plus générale est donnée par deux pyramides à trois faces ayant dans le plan de symétrie une base commune, qui est un triangle équilatéral (fig. 112).

Pour les formes dont les pôles sont situés dans les plans de symé-trie, cette tétartoédrie n'est plus qu'une hémiédrie.

Des six modes mériédriques qui peuvent se rencontrer dans le sys-

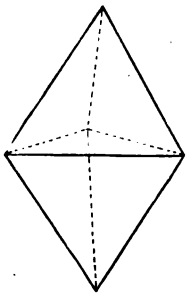


Fig. 112.

tème sénaire, on n'en a jusqu'ici observé qu'un seul, celui que nous avons appelé *parahémiédrie*.

CHAPITRE VIII

SYSTÈME TERNAIRE OU RHOMBOÉDRIQUE

Syst. hexagonal avec hémiédrie rhomboédrique (Naumann, etc.); Dreigliedriges Syst. (Quenstedt); Sechsgliedriges Syst. (Weiss); Quatrième Système Crist. (Dufrénoy).

La symétrie du système est indiquée par le symbole

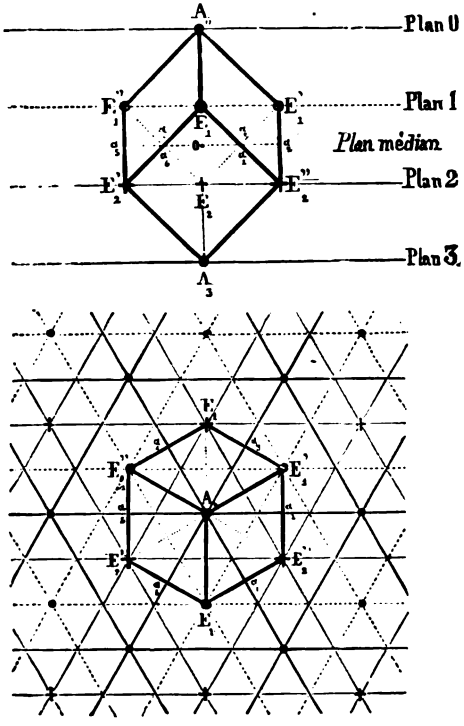
$$A^3\ 3L^2\ C\ 3P.$$

Dans un plan réticulaire normal à l'axe ternaire, le réseau est figuré par des triangles équilatéraux juxtaposés dont les directions sont celles des axes binaires (fig. 114). La trace, sur ce plan, d'un axe ternaire, peut, dans ce système, coïncider avec un sommet ou un centre de ces triangles. Soit 4 plans superposés, 0, 1, 2, 3 ; A_0 étant un des nœuds du réseau 0, on considère l'axe ternaire passant en A_0. Les triangles du plan 1 ont les côtés dirigés comme ceux du plan 0, mais les nœuds ne peuvent venir se projeter sur ceux de ce plan, car alors l'axe serait non plus ternaire, mais sénaire. Il faut donc que A_0 coïncide avec la projection du centre d'un des triangles du plan 1, et ce triangle ne peut occuper que l'une des deux positions $E_1\ E_1'\ E_1''$ ou $E_2\ E_2'\ E_2''$; on supposera qu'il occupe la première. Les nœuds du plan 2 ne peuvent se projeter ni sur ceux du plan 1, ni sur ceux du plan 0, car dans l'une et l'autre hypothèse, l'axe serait sénaire; les triangles du plan 2 viennent donc prendre l'orientation $E_2\ E_2'\ E_2''$. Quant au plan 3, on voit aisément que les nœuds ne pouvant coïncider ni avec ceux du plan 2, ni avec ceux du plan 1, coïncident avec ceux du plan 0.

En joignant à A_0 les trois nœuds E_1, E_1', E_1''; à A_3 les trois nœuds E_2, E_2', E_2'' et en traçant l'hexagone en zigzag $E_1 E_2'' E_1' E_2 E_1'' E_2'$, on

forme un parallélipipède dont toutes les arêtes, également inclinées su l'axe ternaire A_0 A_3, sont égales entre elles; toutes les faces sont de rhombes égaux, sont également inclinées sur l'axe-ternaire, et formen entre elles des angles égaux ou supplémentaires. Ce parallélipipède qui est la maille du système, puisque tous ses sommets sont de

Fig. 113.



nœuds, et qu'il ne contient aucun nœud dans son intérieur, est ce qu'on appelle un *rhomboèdre*.

La figure 113 montre les projections de ce rhomboèdre sur un plan perpendiculaire à l'axe ternaire et sur un plan passant par l'axe ternaire et par un des axes binaires. La figure 114 en est une perspective.

On peut distinguer dans un rhomboèdre : 1° trois arêtes culminantes supérieures aboutissant en A_0 et dont les extrémités forment un triangle équilatéral situé dans un plan qui coupe normalement, au tiers de sa longueur à partir de A_0, la ligne A_0 A_3 dont la longueur est le paramètre

de l'axe ternaire; 2° trois arêtes culminantes inférieures aboutissant en A_3 et dont les extrémités forment aussi un triangle équilatéral dans un plan qui coupe normalement, au tiers de sa longueur à partir de A_3, la longueur $A_0 A_3$; 3° enfin six arêtes latérales formant une sorte d'hexagone en zigzag $E_1 E_2''$...., dont la projection, sur un plan perpendiculaire à l'axe ternaire, est un hexagone régulier, normal aux axes binaires, et ayant pour rayons les projections des arêtes culminantes.

Si l'on coupe le rhomboèdre par un plan médian passant par le centre

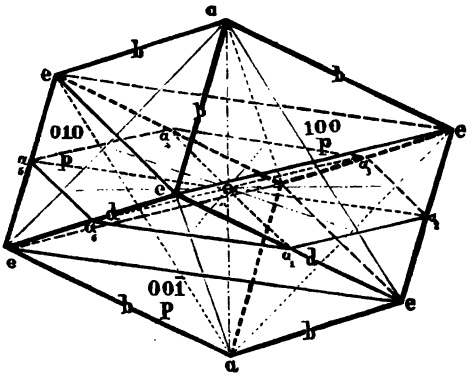


Fig. 114.

et normal à l'axe ternaire, l'intersection est un hexagone régulier $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$...., dont les rayons sont les axes binaires du réseau.

Le cube peut être considéré comme un cas particulier du rhomboèdre dans lequel l'angle que forment les faces entre elles est égal à 90°.

Système d'axes coordonnés adopté. — On peut prendre, comme dans le système sénaire, l'axe principal ternaire comme axe des z, et les 3 axes binaires comme axes horizontaux. On aura une notation à 4 caractéristiques identique à celle qui a déjà été étudiée dans l'examen du système précédent.

On peut aussi prendre 3 axes coordonnés obliques également inclinés les uns sur les autres et qui sont les 3 arêtes du rhomboèdre formant le parallélipipède générateur du système réticulaire.

Les formules de transformation qui permettront de passer de l'un de ces systèmes d'axes à l'autre sont faciles à établir.

Projetons en effet sur sa base, que l'on placera dans le plan du tableau, l'hémisphère ayant pour axe l'axe ternaire. Soient x, y, z, (fig. 115) les points où 3 parallèles aux arêtes du rhomboèdre partant

du centre de la sphère viennent rencontrer la sphère. Les plans ve caux dont les traces sur le plan de la figure sont $z_1\,x_1$, $z_1\,y_1$, $z_1\,u_1$, s les plans de symétrie; les axes binaires x_1, y_1, u_1 sont les bissectri des angles formés par les droites z_1x, z_1y, z_1z. On suppose qu'en gardant en face la partie positive de l'axe des x, on a à droite l' positif des x_1.

Appelons g, h, k les coordonnées numériques d'un point prises

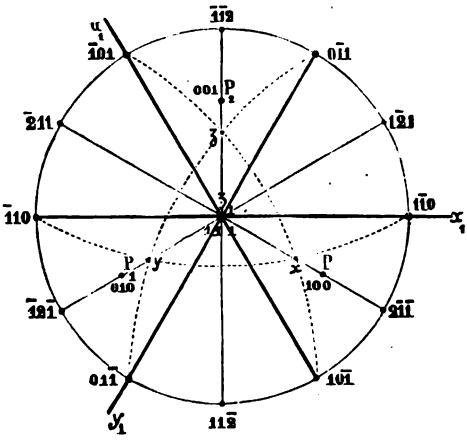


Fig. 115.

rapport aux 3 arêtes du rhomboèdre comme axes coordonnés, p, q, r, s les coordonnées numériques du même point prises par r port aux 4 axes des x_1, des y_1, des u_1 et des z_1. Ces derniers axes ét parallèles aux intersections des faces (111), (11$\bar{2}$), ($\bar{2}$11), (1$\bar{2}$1), caractéristiques de

$$\begin{array}{lll} x_1 & \text{sont} & 1\bar{1}0 \\ y_1 & \text{--} & 01\bar{1} \\ u_1 & \text{—} & \bar{1}01 \\ z_1 & \text{—} & 111. \end{array}$$

Les formules de transformation pour passer des x, y, z aux x_1 y sont donc

$$\begin{aligned} s &= g + h + k \\ p &= g - h \\ q &= h - k, \end{aligned}$$

et, en vertu de la relation $p + q + r = 0$,

$$r = k - g.$$

Quant aux paramètres des nouveaux axes, ils se tirent des formules générales. En appelant a le paramètre de l'axe binaire horizontal, h celui de l'axe ternaire, et b celui des arêtes rhomboédriques, on obtient les expressions

$$a = b\sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos xy}$$
$$h = b\sqrt{3}\,\sqrt{1+2\cos xy}$$

ou

$$\lambda = \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2} = \frac{1-\cos xy}{1+2\cos xy}.$$

Entre l'angle plan xy et l'angle dièdre du rhomboèdre, la trigonométrie sphérique donne la relation

$$\cos\xi = -\cos^2\xi + \sin^2\xi\,\cos xy,$$

ou encore

$$\cos xy = \frac{\cos\xi}{1-\cos\xi}.$$

On peut donc écrire

$$\lambda = \frac{3}{2}\frac{a^2}{d^2} = \frac{1-2\cos\xi}{1+\cos\xi} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin\frac{3}{2}(\pi-\xi)}{\sin^3\frac{1}{2}(\pi-\xi)},$$

d'où

$$\cos\xi = \frac{1-\lambda}{2+\lambda}.$$

Si l'on voulait, inversement, passer des axes x_1, y_1, u_1, z_1 aux axes x, y, z, on aurait les formules de transformation

$$g = s + p - r$$
$$h = s + q - p$$
$$k = s + r - q.$$

Calcul des angles des arêtes et des faces. — *Lorsque les arêtes du rhomboèdre sont les 3 axes coordonnés*, on tire des formules générales, pour l'expression de l'angle R R′ de deux arêtes $(g\,h\,k)$ et $(g'\,h'\,k)$:

$$RR' = \frac{gg' + hh' + kk' + \cos xy\,(gh' + g'h + gk' + g'k + hk' + h'k)}{\sqrt{\left\{g^2 + h^2 + k^2 + 2\cos xy\,(gh + gk + hk)\right\}\left\{g'^2 + h'^2 + k'^2 + 2\cos xy\,(g'h' + g'k' + h'k'\right\}}},$$

et en remarquant que

$$gh' + g'h + \text{etc.} = (g + h + k)(g' + h' + k') - (gg' + hh' + kk'),$$

on peut écrire symboliquement

$$\cos RR' = \frac{\Sigma gg' + \cos xy\,(\Sigma g \times \Sigma g' - \Sigma gg')}{\sqrt{(\Sigma g^2 + 2\cos xy\,\Sigma gh)\,(\Sigma g'^2 + 2\cos xy\,\Sigma g'h')}}.$$

Quant à l'angle P P′ des deux normales aux deux plans $(p\,q\,r)$ $(p'q'r')$, on a :

$$\cos PP' = \frac{\Sigma pp' - \cos\xi\,(\Sigma p \times \Sigma p' - \Sigma pp')}{\sqrt{\Sigma p^2 - 2\cos\xi\,\Sigma pq)(\Sigma p'^2 - 2\cos\xi\,\Sigma p'q')}}$$

$$\text{tang}\,PP' = D\sin\xi\,\frac{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 + r\cos\xi\,(uv + uw + vw)}}{\Sigma pp' - \cos\xi\,(\Sigma p \times \Sigma p' - \Sigma pp')}$$

expression dans laquelle D, u, v, w ont la signification indiqu page 23.

Lorsque l'axe ternaire et les trois axes binaires sont les axes coordo nés, on déduit des formules générales à 4 caractéristiques pour l'a gle RR′ de deux arêtes $[ghkl]$ et $[g'h'k'l']$:

$$\cos RR' = \frac{ll' + \frac{5}{6}\frac{a^2}{h^2}(gg' + hh' + kk')}{\sqrt{\left\{l^2 + \frac{5}{6}\frac{a^2}{h^2}(g^2 + h^2 + k^2)\right\}\left\{l'^2 + \frac{5}{6}\frac{a^2}{h^2}(g'^2 + h'^2 + k'^2)\right\}}}$$

et pour l'angle PP′ des normales aux deux plans $(pqrs)$ et $(p'q'r's')$:

$$\cos PP' = \frac{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}ss' + pp' + qq' + rr'}{\sqrt{\left\{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s^2 + p^2 + q^2 + r^2\right\}\left\{\frac{5}{2}\frac{a^2}{h^2}s'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2\right\}}},$$

Formes holoédriques. — Projetons le cristal gnomoniqueme sur le plan perpendiculaire à l'axe principal (fig. 116 et 120). aura dans ce plan trois axes binaires ox_1, oy_1, ou_1 disposés com les axes binaires de première espèce du système sénaire, puis tr droites ox, oy, oz disposées comme les axes binaires de deuxiè espèce du système sénaire, mais qui seront ici les traces des tr

plans de symétrie, et les projections des trois axes coordonnés de l'espace lorsque ces axes coordonnés sont les arêtes du rhomboèdre primitif.

Hachons de deux en deux les secteurs de 60° compris entre un axe binaire positif et un axe binaire négatif; nous distinguerons ainsi trois secteurs non hachés et trois secteurs hachés. Trois secteurs de même teinte viennent mutuellement en coïncidence lorsqu'on fait tourner le cristal de 120° autour de l'axe ternaire; ils sont donc identiques ou de même espèce. Les secteurs hachés que l'on rencontre en partant d'un axe binaire positif et tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, seront appelés *secteurs directs*; les trois autres seront les *secteurs inverses*.

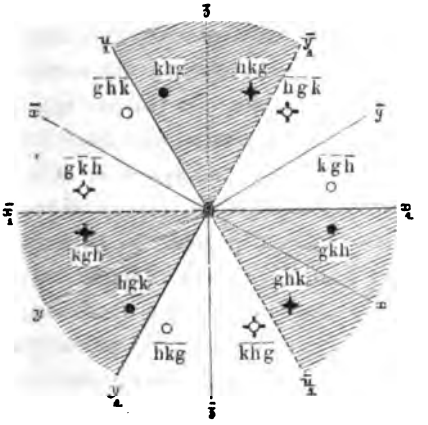


Fig. 116.

Soit dans un des secteurs, que nous supposerons haché, pour fixer les idées, un pôle (*ghk*); il y en aura nécessairement deux autres avec lesquels celui-ci viendra coïncider par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$; on en obtiendra les symboles en effectuant les permutations tournantes de *ghk*.

Le plan de symétrie qui divise en deux parties égales le secteur direct où se trouve (*ghk*), entraîne, dans le même secteur, l'existence d'un pôle, symétrique du premier et qui, ayant le même x, sera noté (*gkh*). Ce nouveau pôle sera nécessairement accompagné de deux autres avec lesquels il peut coïncider par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$. On a donc,

au-dessus du plan médian, six pôles ayant respectivement pour symboles

ghk . . . . . *gkh*
kgh . . . . . *hgk*
hkg . . . . . *khg*.

Les trois pôles de la même colonne verticale se superposent par des rotations de 120°; les pôles situés en regard sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan de symétrie vertical. Les symboles de ces six pôles sont les six permutations des lettres ghk.

Au-dessous du plan médian, on aurait six autres pôles symétriques des six premiers par rapport au centre, et dont les symboles seraient les précédents changés de signe. Sur la figure 116 on a marqué, par de petits cercles, les projections des pôles inférieurs au plan médian, avec leurs symboles. Dans cette figure, on a marqué d'un même signe les pôles qui viennent en coïncidence mutuelle par des rotations de 120°.

Dans la discussion précédente, nous avons épuisé la symétrie du réseau, car nous avons fait successivement appel à l'existence de l'axe ternaire, à celle des trois plans de symétrie, et à celle du centre. L'existence des trois axes binaires est une conséquence nécessaire de celle des éléments de symétrie précédents. La forme la plus générale du système ternaire a donc 12 pôles et 12 seulement.

Nous conviendrons, pour éviter toute confusion, de désigner une forme par le symbole de celui des 12 pôles qui est situé dans le secteur de 60° compris entre la trace du plan de symétrie sur laquelle se projette Ox, et celle du plan de symétrie sur laquelle se projette $O\bar{z}$. Avec cette convention, la forme étant représentée par le symbole $\{g\,h\,k\}$, dans lequel g, h et k sont des quantités algébriques, on a les inégalités algébriques

$$g > h > k.$$

Dans cette forme simple, les six faces correspondant aux six pôles de l'hémisphère supérieur, viennent concourir en un même point de l'axe ternaire; les six autres faces correspondant aux six pôles de l'hémisphère inférieur viennent concourir aussi en un même point de l'axe ternaire symétrique du premier par rapport au centre, et la forme simple la plus générale se trouve ainsi donnée par la réunion de deux pyramides hexagonales accolées. Mais comme le plan perpendiculaire à l'axe ternaire et passant par le centre n'est pas un plan de symétrie, ces deux pyramides ne se raccordent pas en général suivant un hexagone

situé dans ce plan. L'hexagone de raccord est nécessairement gauche, et comme les côtés sont deux à deux symétriques par rapport aux trois plans de symétrie passant par l'axe ternaire, cet hexagone est disposé en zigzag comme celui que forment les arêtes latérales du rhomboèdre. Ce solide remarquable dont toutes les faces sont des triangles scalènes, est ce que l'on nomme un *scalénoèdre* (fig. 117). Nous allons examiner les cas particuliers qui peuvent se présenter et modifier la figure du solide.

Si les pôles se placent sur les plans verticaux qui contiennent les axes binaires, ils reviennent en coïncidence après une rotation de 60° autour de l'axe principal qui devient, pour la forme simple considérée, un axe sénaire. Le plan principal devient un plan de symétrie et l'hexagone en zigzag est un hexagone plan. La forme simple est constituée par

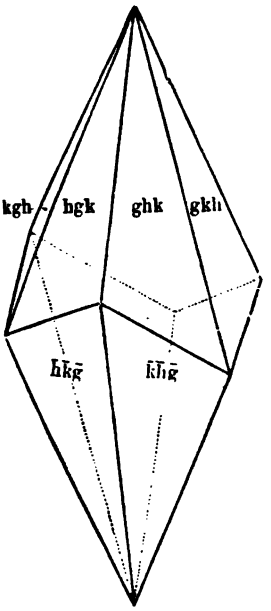


Fig. 117.

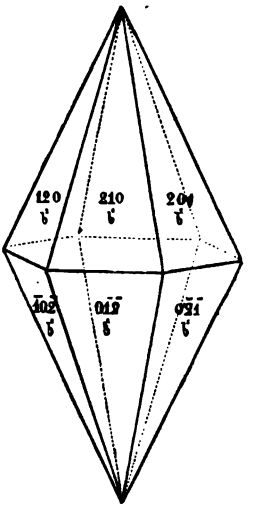


Fig. 118.

deux pyramides hexagonales accolées par la base; elle est limitée par des triangles tous égaux entre eux et isoscèles. Elle prend le nom d'*isoscéloèdre* (fig. 118). La condition pour que la forme simple soit un isoscéloèdre, exprime que les pôles sont situés dans l'un des plans verticaux qui comprennent les axes binaires. Or, il est aisé de voir que le plan de zone $z_1\ \bar{u}_1$ passant par les pôles (111) et $(10\bar{1})$, a pour carac-

téristiques $12\bar{1}$. La condition pour que le pôle (*ghk*) soit contenu dans ce plan est donc :

$$g - 2h + k = 0.$$

C'est ainsi que la forme simple $\{210\}$ est un isoscéloèdre.

Lorsque les pôles sont situés dans les plans de symétrie, les six pôles d'un hémisphère se réduisent à trois, et la forme simple est limitée, non plus par 12 faces, mais par 6. Le solide ayant ses faces parallèles deux à deux est un parallélipipède. Les trois faces qui se rencontrent sur l'axe ternaire peuvent venir en superposition ; les angles plans, et par conséquent les angles dièdres du solide sont égaux entre eux. Ce solide est donc un *rhomboèdre* (fig. 119).

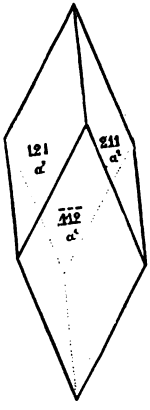


Fig. 119.

Les caractéristiques d'un plan de symétrie, celui des x, par exemple, étant $01\bar{1}$, la condition pour que le pôle *ghk* appartienne à une forme rhomboédrique est

$$h - k = 0.$$

La forme simple $\{211\}$ est donc un rhomboèdre.

Les 6 pôles d'un même hémisphère se trouvent toujours dans un même plan perpendiculaire à l'axe ternaire. Lorsque ce plan est tangent à la sphère, les 6 pôles se réduisent à un seul, dont la notation est (111) ou $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, et la forme simple se réduit à deux plans parallèles perpendiculaires à l'axe ternaire.

Lorsque le plan passe par le centre de la sphère, les pôles se trouvent dans le plan de zone [111]; la condition pour que ce cas se réalise est donc :

$$g + h + k = 0.$$

Tous les plans de la forme sont alors parallèles à l'axe ternaire, et elle devient :

1° Dans le cas général, un prisme à 12 faces, dont la section droite est un dodécagone non régulier c'est le *prisme dodécaèdre*.

2° Un prisme à 6 faces, dont la section droite est un hexagone régulier, dans deux cas particuliers :

a. Lorsque les pôles sont situés dans les plans de symétrie, la notation est $(2\bar{1}\bar{1})$, et les axes binaires passent par les sommets de la section droite ; c'est le *prisme hexagonal de première espèce*.

b. Lorsque les pôles sont situés dans les plans verticaux qui comprennent les axes binaires ; le symbole est $(10\bar{1})$, et les axes binaires sont les apothèmes de la section droite ; c'est le *prisme hexagonal de seconde espèce*.

Telles sont toutes les formes simples que l'on peut rencontrer dans le système ternaire ou rhomboédrique.

Toute la discussion précédente aurait pu être faite, plus aisément peut-être, en se servant de la notation à 4 caractéristiques. Les symboles des pôles supérieurs de la forme la plus générale s'obtiendraient alors en prenant dans le tableau des pôles de la forme la plus générale du système sénaire, ceux de la première colonne verticale par exemple, c'est-à-dire ceux qui sont formés par les permutations tournantes de $p\,q\,\bar{r}$, puis ceux de la troisième colonne, c'est-à-dire ceux qui sont formés par les permutations tournantes de $\bar{p}\;r\;\bar{q}$. Le tableau des pôles supérieurs de la forme ternaire est ainsi, en négligeant la caractéristique verticale s qui est la même pour tous :

$$\begin{array}{ll} p\,q\,\bar{r} & \bar{p}\,r\,\bar{q} \\ \bar{r}\,p\,q & \bar{q}\,\bar{p}\,r \\ q\,\bar{r}\,p & r\,\bar{q}\,\bar{p}. \end{array}$$

Les pôles écrits sur la même colonne verticale viennent en coïncidence mutuelle par des rotations de $\frac{2\pi}{3}$; les pôles placés en face l'un de l'autre sont symétriques par rapport aux plans de symétrie verticaux.

On convient de désigner la forme par le symbole de celui de ses pôles pour lequel les deux premières caractéristiques sont positives, c'est-à-dire de celui qui est situé dans l'angle X Y.

Il est aisé de voir que les isoscéloèdres ont pour symbole $\{pp\overline{2p}s\}$; les rhomboèdres, $\{0p\bar{p}s\}$ ou $\{p0\bar{p}s\}$; les prismes dodécagonaux, $\{pq\bar{r}0\}$; le prisme hexagonal de deuxième espèce est, comme dans le système sénaire, noté $\{1120\}$ et celui de première espèce $\{10\bar{1}0\}$.

Formes directes et inverses. — Formes birhomboédriques. — Lorsque le pôle (ghk) d'une face supérieure d'une forme simple tombe dans un secteur direct, les 6 pôles des faces supérieures tombent tous dans des secteurs directs ; on dit alors que la forme est *directe*. Dans le cas contraire, la forme est *inverse*. Le secteur de 60° compris entre deux plans de symétrie x et $\bar{z}$ (fig. 116) et dans lequel est situé le pôle (ghk) dont les caractéristiques satisfont aux inégalités algébriques $g > h > k$, est bisséqué par un axe binaire $\bar{u}_1$. Les pôles situés sur $\bar{u}_1$ appartiennent à des isoscéloèdres, pour lesquels on a $g + k = 2h$. Lorsqu'on passe d'un point de cet axe $\bar{u}_1$, au demi secteur direct adjacent, en suivant une parallèle à $Y\bar{Y}$, g reste le même tandis que algébriquement k augmente et h diminue ; les caractéristiques de tous les pôles contenus dans le demi secteur direct, et qui appartiennent à des formes directes, satisfont donc à l'inégalité algébrique $g + k > 2h$. Les caractéristiques de tous les pôles contenus dans le demi secteur inverse adjacent à $\bar{u}_1$, satisfont au contraire à l'inégalité algébrique $g + k < 2h$. Les faces des rhomboèdres directs sont inclinées dans le même sens que celles du rhomboèdre primitif ; les faces des rhomboèdres inverses sont inclinées en sens inverse. On peut dire encore que les arêtes des rhomboèdres directs sont inclinées comme celles du primitif, et les arêtes des rhomboèdres inverses, comme les diagonales des faces du primitif. Dans les scalénoèdres directs, les arêtes les moins saillantes sont inclinées comme les arêtes du primitif ; c'est le contraire pour les scalénoèdres inverses.

Si l'on donne au cristal, autour de l'axe ternaire, une rotation de $\frac{2\pi}{6}$, les pôles d'une forme directe $\{ghk\}$ viennent coïncider avec les pôles d'une forme inverse $\{g'h'k'\}$. Les deux formes ainsi obtenues, qu'on appelle souvent formes *birhomboédriques*, ne sont évidemment que les deux formes conjuguées hémiédriques d'un cristal à symétrie hexagonale, dont le cristal ternaire peut toujours, comme on sait, être considéré comme dérivé.

Lorsqu'on emploie la notation à 4 caractéristiques, il est clair que si les pôles supérieurs d'une forme ternaire sont ceux des 1re et 3e colonnes du tableau des pôles de la forme sénaire, les pôles supérieurs de la forme birhomboédrique seront ceux des 2e et 4e colonnes. La forme directe a l'un de ses pôles situé dans l'angle $X\bar{u}$; la forme inverse a l'un

de ses pôles situé dans l'angle Yu. Si une forme directe a pour symbole $\{pq\bar{r}s\}$ on a $p > q$; la forme birhomboédrique ou inverse de celle-là est notée $\{qp\bar{r}s\}$.

Il faut remarquer que, suivant nos conventions, les deux premières caractéristiques du symbole d'une forme étant toujours positives, la première sera *plus grande* que la seconde pour les formes *directes*, et *plus petite* pour les formes *inverses*.

Il est maintenant facile de chercher quel est, dans le système de notation à 3 caractéristiques, le symbole $\{g'h'k'\}$ de la forme birhomboédrique de la forme $\{ghk\}$. Si, en effet, cette dernière forme est notée $\{pq\bar{r}s\}$, on a :

$$\begin{aligned} s &= g + h + k \\ p &= g - h \\ q &= h - k \\ -r &= k - g. \end{aligned}$$

Mais la forme $\{g'h'k\}$ est notée $\{qp\bar{r}s\}$; on a donc :

$$\begin{aligned} s &= g' + h' + k' = g + h + k \\ q &= g' - h' = h - k \\ p &= h' - k' = k - g \\ -r &= k' - g' = k - g. \end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément, en multipliant g', h', k', par le facteur commun 3 ;

$$\begin{aligned} g' &= 2(g + h) - k \\ h' &= 2(g + k) - h \\ k' &= 2(h + k) - g. \end{aligned}$$

Comme application de ces formules, on peut voir que le rhomboèdre primitif $\{100\}$ a pour forme birhomboédrique $\{22\bar{1}\}$. Ces deux formes coexistent souvent, comme il arrive pour le quartz, et donnent alors au cristal une apparence hexagonale.

Projection gnomonique des pôles. — Les figures 120 et 120bis (pl. III) montrent la projection gnomonique des pôles d'un cristal appartenant au système rhomboédrique. Le plan de projection est perpendiculaire à l'axe ternaire. Pour dessiner cette projection, on commence par tracer un trian-

gle équilatéral, dont les sommets représentent les projections des pôles du rhomboèdre primitif. Le réseau parallélogrammique construit sur ces trois points donne tous les nœuds du réseau polaire qui se trouvent dans le plan de projection supposé contigu du nœud pris pour point de vue. Les distances respectives de chacun des nœuds aux trois côtés du triangle (001) (010) (100) ou XYZ représentent les projections des coor-

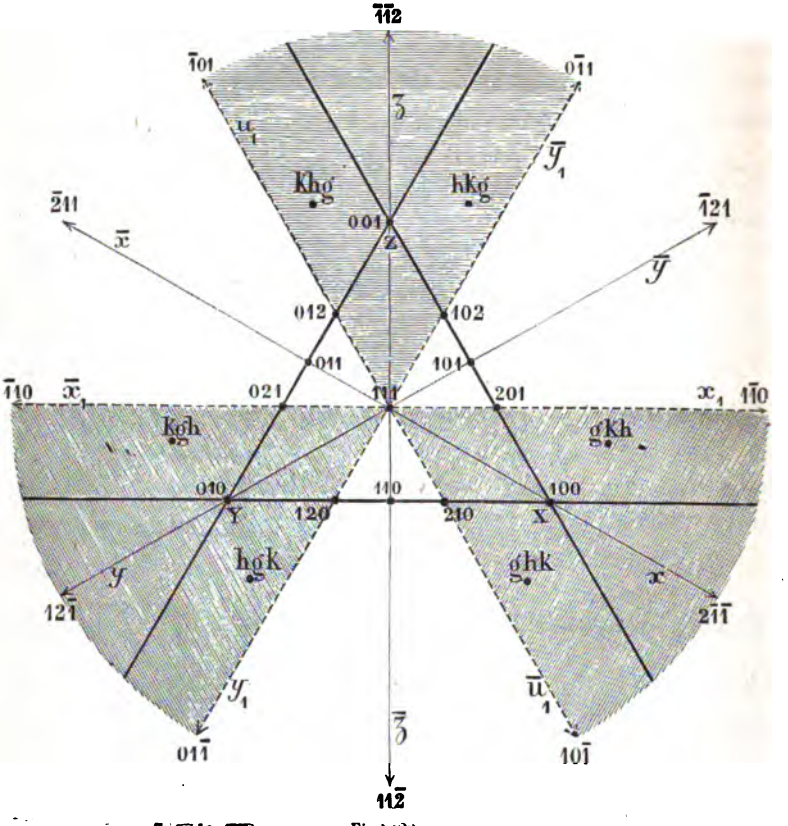


Fig. 120.

données du nœud prises par rapport aux trois arêtes du rhomboèdre; ces trois directions faisant des angles égaux sur le plan de projection, le rapport des longueurs des projections est en effet le même que celui des coordonnées de l'espace. Pour trouver les caractéristiques d'un pôle quelconque, dont la position est connue sur la projection gnomonique, il suffit donc de chercher les distances de ce pôle aux trois côtés du triangle; les rapports de ces distances sont les caractéristiques du pôle.

Le symbole (111) caractérise le système des plans réticulaires du réseau polaire parallèles au plan médian. Or on sait (voir page 17) que, pour qu'un pôle (ghk) soit contenu dans celui de ces plans qui est séparé du plan médian par un nombre de strates égal à C, la condition est

$$g+h+k=C.$$

Si l'on désigne chacun de ces plans par le nombre C qui lui convient, on peut dire que le plan 0 ou le plan qui passe pour l'origine comprend tous les pôles pour lesquels la somme des caractéristiques est nulle; le plan 1, tous ceux pour lesquels cette somme est égale à 1; etc.

Les projections des nœuds du plan 2 forment un réseau dont le côté de la maille est $\frac{1}{2}$ de celui de la maille du plan 1, et en général les projections du nœud du plan n forment un réseau dont le côté de la maille est égal à $\frac{1}{n}$ de celui de la maille du plan 1.

Pour placer sur la projection un pôle $\{ghk\}$, dont les caractéristiques sont connues, il faut donc chercher, en faisant la somme algébrique $g+h+k=n$, quel est le numéro d'ordre du plan réticulaire, normal à l'axe ternaire, dont le pôle fait partie. Il ne reste plus alors qu'à choisir un point tel qu'il soit à une distance $\frac{gp}{n}$ de la ligne ZY, et $\frac{hp}{n}$ de la ligne ZX; p étant la hauteur du triangle équilatéral formé par les trois pôles X, Y, Z. Ainsi le pôle ($42\bar{3}$) est dans le plan réticulaire n° 3; il se trouvera donc à une distance $\frac{4p}{3}$ de la ligne ZY, $\frac{2p}{3}$ de la ligne ZX, et $-p$ de la ligne XY.

Au lieu de prendre pour coordonnées les distances d'un pôle aux trois côtés du triangle, on peut d'ailleurs prendre les longueurs comptées sur les parallèles aux côtés, qui sont évidemment dans le même rapport.

Cette projection donne lieu à des remarques intéressantes.

Les côtés du triangle équilatéral, que nous appellerons fondamental, et dont les sommets sont les pôles du rhomboèdre primitif, représentent les traces des plans coordonnés du réseau polaire. Si l'on

considère un de ces côtés prolongé, celui, par exemple, qui passe p Z et Y et représente la trace du plan des YZ, tous les pôles situé par rapport à cette droite, du même côté que l'autre sommet auront positive la caractéristique relative aux X, c'est-à-dire g; to les pôles situés de l'autre côté de la droite auront le g négatif. Il en se de même pour les deux autres côtés du triangle.

On en déduit :

1° Que tous les pôles situés dans l'intérieur du triangle fondament ont les trois caractéristiques positives ;

2° Que tous les pôles situés dans l'espace compris entre un côté les prolongements des deux autres ont une caractéristique négative c'est celle qui se rapporte à l'axe correspondant au sommet oppos du triangle ;

3° Que les pôles situés dans l'espace angulaire compris entre deu côtés prolongés ont deux caractéristiques négatives ; ce sont celles qu correspondent aux deux sommets opposés du triangle ;

4° Tous les pôles situés sur les droites servant de côtés au triangl fondamental ont une caractéristique nulle : c'est celle qui correspon au sommet opposé du triangle.

La figure 98 (pl. II), qui représente la projection gnomonique de pôles du système sénaire, peut être considérée également comme une projection des pôles du système ternaire, où les pôles des deux formes birhomboédriques ont trouvé place.

Les figures 115 et 121 (pl. VIII) représentent la projection stéréographique des pôles d'un cristal rhomboédrique sur le plan principal.

Si l'on considère les trois grands cercles de zone passant par les pôles P_1, P_2, P_3 du rhomboèdre primitif, on peut faire les remarques suivantes, qui sont la traduction de celles que nous avons faites pour la projection gnomonique.

Dans l'intérieur du triangle $P_1 P_2 P_3$, les trois coefficients sont positifs.

Les pôles situés au-dessus du grand cercle P_1P_2 (c'est-à-dire situés par rapport à ce grand cercle du même côté que le pôle supérieur de l'axe ternaire.)	ont la caractéristique relative à Z positive.	
Les pôles situés au-dessus du grand cercle P_2P_3	— X —	
— P_1P_3	— Y —	

Dans l'intérieur des petits triangles tels que $x_1 P_1 \bar{u}_1$, deux des coefficients sont négatifs, celui qui est positif se rapportant à l'axe contenu dans le plan de symétrie qui traverse le triangle.

Dans le reste de l'hémisphère supérieur, c'est-à-dire dans les quadrilatères sphériques tels que $\bar{u}_1 P_1 P_2 y_1$, il n'y a qu'un coefficient négatif se rapportant à l'axe contenu dans le plan de symétrie qui traverse le quadrilatère.

Chacun des grands cercles tels que $P_1 P_2$ étant parallèle à un axe coordonné, les pôles qui se trouvent sur ces grands cercles ont une caractéristique égale à 0; c'est celle qui se rapporte à l'axe contenu dans le plan de symétrie qui coupe le grand cercle normalement.

Formes composées et symboles de Lévy. — Nous allons étudier la manière dont les diverses formes simples viennent se placer sur le rhomboèdre primitif.

Nous remarquons d'abord qu'une face quelconque telle que $(g\bar{h}k)$ coupe la direction positive des x, la direction négative des y, la direction positive des z; si nous prenons dans le rhomboèdre l'angle dont partent des arêtes parallèles à $\bar{x}$, y, $\bar{z}$, la face rencontre les trois directions formées par le prolongement des arêtes et, lorsqu'on la fait mouvoir parallèlement à elle-même, elle vient couper les trois arêtes du rhomboèdre issues de l'angle considéré; elle vient se placer sur cet angle.

Or, dans le rhomboèdre, du sommet supérieur a partent trois directions positives; de chacun des trois angles supérieurs e partent deux directions positives et une négative; de chacun des trois angles inférieurs e, deux directions positives et une négative.

On en conclut que lorsque les faces supérieures d'une forme ont trois caractéristiques positives, elles sont placées sur les angles a; lorsqu'elles ont deux caractéristiques positives et une négative, elles sont placées sur les angles e supérieurs; et enfin lorsqu'elles ont une caractéristique positive et une négative, elles sont placées sur les angles e inférieurs.

Supposons d'abord positives les trois caractéristiques du pôle dont on emprunte le symbole pour en faire celui de la forme Sur un angle a, et de chaque côté d'un plan de symétrie, viennent se placer deux plans formant un biseau incliné (fig. 122). L'angle a est remplacé par un pointement scalénoédrique à six faces

Chaque plan intercepte sur les arêtes b des longueurs numé-

riques $\frac{1}{g}, \frac{1}{h}, \frac{1}{k}$; le symbole de la forme dans le mode de notation employé par Lévy est $b^{\frac{1}{k}}\, b^{\frac{1}{h}}\, b^{\frac{1}{g}}$.

La forme est directe ou inverse suivant que $g+k>$ ou $<2h$. Les

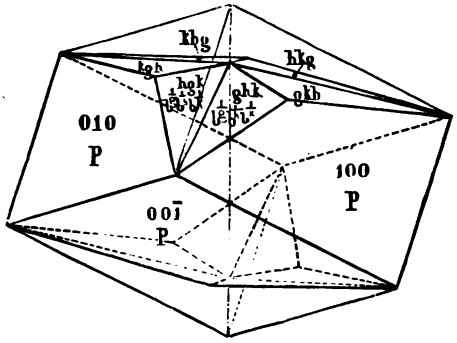


Fig. 122.

pôles toujours compris dans l'intérieur du triangle fondamental XYZ sont compris, dans un cas, dans les secteurs directs ; dans l'autre, dans les secteurs inverses.

Lorsque $g+k=2h$, les pôles sont placés sur les axes binaires et les parallèles aux côtés du triangle menées par le centre ; la forme est un isoscéloèdre qui ne présente rien de particulier quant à la manière dont il se place sur le rhomboèdre.

Lorsque $g=h$, les deux plans du scalénoèdre qui forment biseau au-dessus d'une arête du rhomboèdre se confondent en un seul ; la forme devient un rhomboèdre inverse dont chaque plan tronque une arête b (fig. 123). Cette forme, dans le système de convention de Lévy, est noté $a^{\frac{1}{g}}_{\frac{1}{k}} = a^{\frac{k}{g}}$; on a toujours $k<g$. Les pôles sont situés sur les médianes du triangle entre le centre et le côté.

Lorsque $h=k$, ce sont les deux plans du scalénoèdre formant biseau au-dessus d'une face du rhomboèdre qui se confondent ; on a encore un rhomboèdre, mais il est direct et chaque plan vient tronquer pour ainsi dire le sommet culminant d'une face du rhomboèdre (fig. 124). Ces rhomboèdres sont notés par Lévy $a^{\frac{g}{k}}$; $g>h$. Les pôles sont placés sur la médiane du triangle entre le centre et le sommet.

Lorsque $g=h=k$, les trois plans du rhomboèdre a^m se confondent

en un seul, perpendiculaire à l'axe ternaire, qui sera noté a^1 et dont le pôle coïncide avec le centre de la projection.

Si les deux plans a^1 sont assez développés pour passer par les extré-

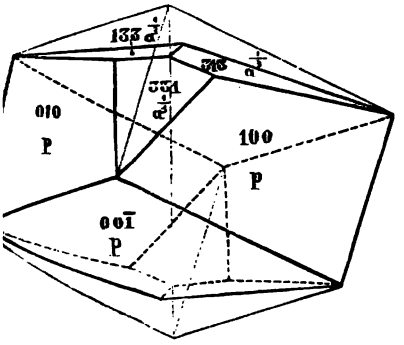


Fig. 123.

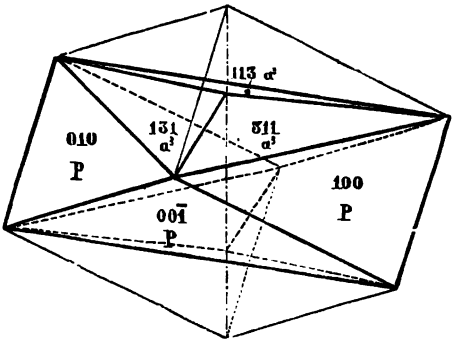


Fig. 124.

mités des arêtes b, ils forment, avec ce qui reste des faces p, une sorte d'octaèdre que l'on rencontre assez fréquemment dans certaines substances (fig. 125). Si les deux faces a^1 sont encore plus développées, le cristal prend la forme d'une lame à contour hexagonal limitée latéralement par des faces qui vont converger alternativement vers le haut et

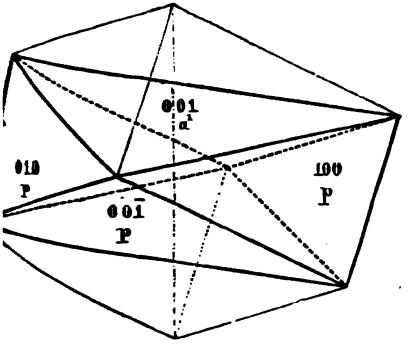


Fig. 125.

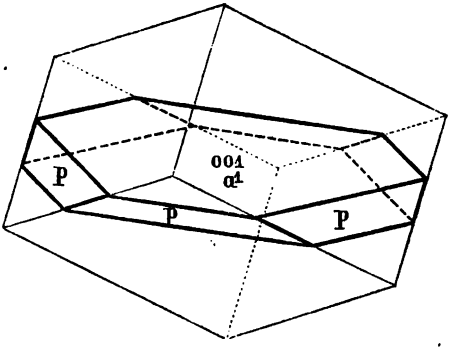


Fig. 126.

vers le bas (figs 126). Cette forme est fréquente dans l'oligiste, le mica, etc.

Lorsque $k = 0$, chaque plan de la forme est parallèle à une arête b; chaque arête b est remplacée par un biseau dont l'arête est parallèle à b (fig. 127). La forme est notée par Lévy $b^{\frac{g}{h}}$; elle est directe ou inverse suivant que $g >$ ou $< 2h$. Elle devient un isoscéloèdre lors-

que $g = 2h$; les pôles se confondent alors avec les points qui divis les côtés en trois par égales ; cet isoscéloè est noté b^2. Si $g = h$, forme (110) est un rho boèdre tronquant chaq arête b (fig. 127); elle notée par Lévy b^1. Ce face b^1 fait zone avec p tous les a^m. Les pôles so placés au milieu des côt du triangle.

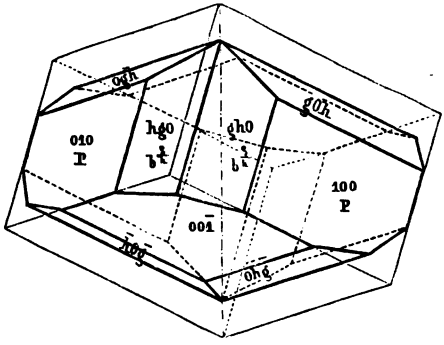


Fig. 127.

Lorsque la forme e notée $\{ghk\}$, le pôle sup rieur (ghk) vient se place sur un angle e supérieu Deux plans symétrique viennent former sur cha cun des angles e supé rieurs un biseau dont l'a rête va rencontrer la parti supérieure de l'axe ter naire (fig. 129). La form

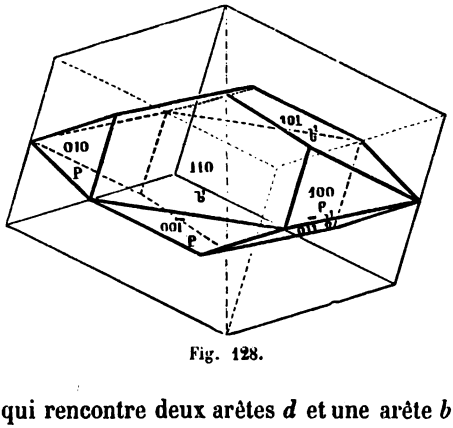


Fig. 128.

qui rencontre deux arêtes d et une arête b, est notée par Lévy $b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$ quand elle est directe, c'est-à-dire quand $g - k > 2h$, et $d^{\frac{1}{g}}\ d^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{k}}$ quand elle est inverse.

Lorsque $g - k = 2h$, on a un isoscéloèdre.

On sait que les pôles sont toujours situés dans l'espace compris entre un côté du triangle et le prolongement des deux autres.

Si $g + h - k = 0$, les plans de tous les biseaux deviennent verticaux ; on a alors un prisme dodécagone dont les faces viennent remplacer chaque arête d par des troncatures en forme de biseaux verticaux (fig. 130). Il n'y a pas lieu dans ce cas de distinguer des formes directes et inverses, car les pôles supérieurs et les pôles inférieurs se trouvant dans le plan médian, il y a un pôle dans chacun des secteurs de 30°, direct ou inverse.

Lorsque $g = h$, les longueurs numériques interceptées sur les arêtes d sont égales ; les deux plans placés sur l'angle supérieur e se confondent en un seul symétriquement placé ; chaque angle e est

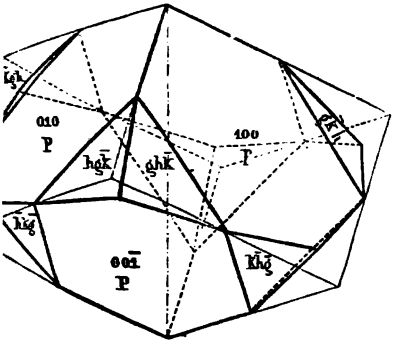


Fig. 129.

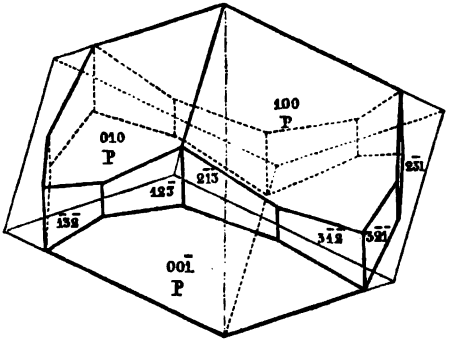


Fig. 130.

tronqué par un plan (fig. 131) ; les troncatures des angles supérieurs rencontrent l'axe ternaire en haut, celles des angles inférieurs le rencontrent en bas. Avec les conventions de Lévy, cette forme qui est un

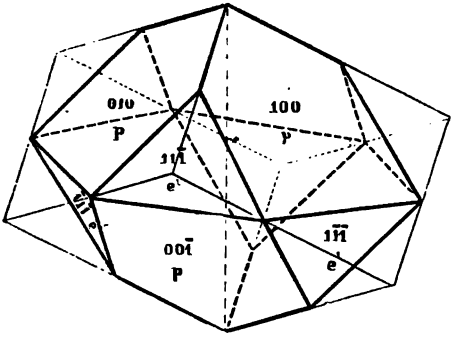


Fig. 131.

rhomboèdre inverse est notée $g^{\frac{g}{k}}$; $\frac{k}{g} < 2$. Les pôles sont placés sur le prolongement de la médiane du triangle fondamental. Partant du pôle $(110) = b^1$, ils vont jusqu'au pôle $(11\bar{2})$ situé à l'infini. La forme $\left\{ 11\bar{2} \right\} = e^3$ tronque tous les angles e par des plans verticaux (fig. 132 et 133) ; c'est, comme on le sait, le prisme hexagonal de première espèce dont les faces sont perpendiculaires aux plans de symétrie.

Lorsque $h = 0$, chacun des plans de la forme $\{g0\bar{k}\}$ est parallèl une arête d ; sur chacune de celles-ci viennent se placer deux pla convergeant l'un en haut, l'autre en bas de l'axe ternaire. Ces d

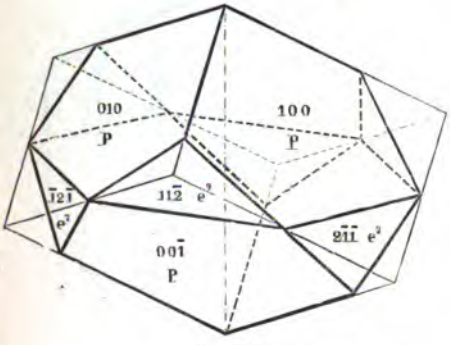


Fig. 132.

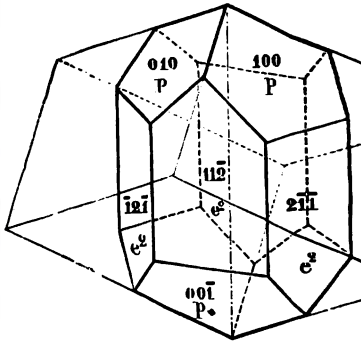


Fig. 133.

plans forment un biseau dont l'arête est parallèle à d (fig. 134 et 13 Ces scalénoèdres sont tous directs ; l'hexagone en zig-zag est, pour to parallèle à celui du rhomboèdre primitif ; on les appelle *métastatiqu*

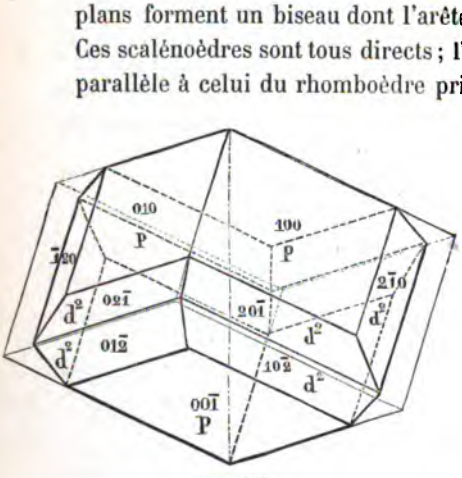


Fig. 134.

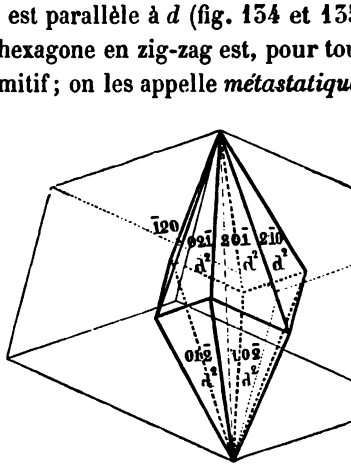


Fig. 135.

Ils sont notés par Lévy $d^{\frac{g}{k}}$. Les pôles en sont placés sur le prolong ment des côtés du triangle fondamental. Partant du pôle p qu' pourrait noter d^{∞}, puisque $k = 0$, ils vont jusqu'au pôle $(10\bar{1})$ situé l'infini.

La forme $\{10\bar{1}\} = d^1$ est celle pour laquelle les deux plans du bise placés sur une arête d se confondent en un seul perpendiculaire à l'a binaire et par conséquent vertical. Les plans de cette face remplaçe

chaque arête *d* par une troncature verticale, tangente sur *d* (fig. 136). On sait que c'est le prisme hexagonal de seconde espèce. Les pôles se trouvent à l'infini sur le prolongement des côtés du triangle, ou, ce qui est la même chose, à l'infini sur les axes binaires.

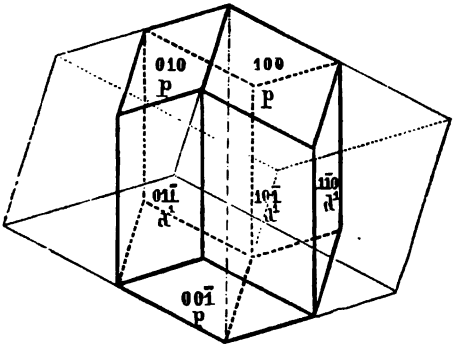


Fig. 136.

Lorsque les deux caractéristiques *h* et *k* sont négatives, la face $(g\bar{h}\bar{k})$, dont le symbole sert à désigner la forme, est placée sur l'angle inférieur *e* de droite. Sur cet angle sont placés deux plans symétriques formant un biseau dont l'arête va rencontrer l'axe ternaire en haut. Le scalénoèdre est toujours direct et noté par Lévy $b^{\frac{1}{\bar{g}}}\, d^{\frac{1}{\bar{h}}}\, d^{\frac{1}{\bar{k}}}$. Les pôles se trouvent dans l'angle formé par le prolongement des côtés.

Lorsque $h = k$, les deux plans du scalénoèdre placés sur un même *e* se confondent en un seul; les angles *e* sont tronqués par des plans perpendiculaires aux plans de symétrie. Contrairement à ce qui a lieu pour

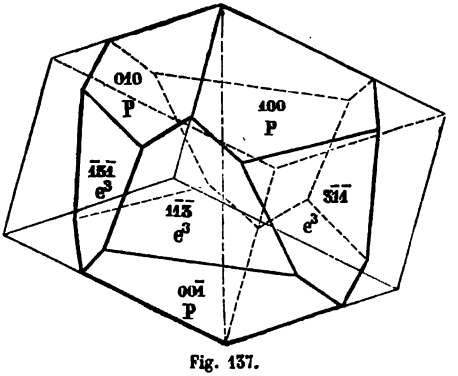


Fig. 137.

les rhomboèdres inverses $\{gg\bar{k}\}$, les troncatures placées sur les angles inférieurs vont rencontrer l'axe ternaire en haut et *vice versâ* (fig. 137),

La forme est un rhomboèdre direct noté $e^{\frac{g}{h}}$; $\frac{g}{h} > 2$. Les pôles sont situ sur le prolongement de la médiane du triangle, du côté du somme

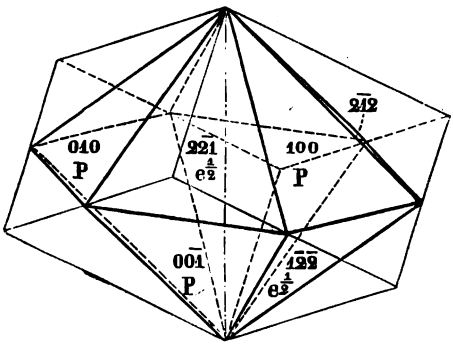


Fig. 138.

Partant du pôle p que l'on pourrait noter e^{∞}, puisque dans ce cas $h = 0$, ils vont jusqu'au pôle e^2 placé à l'infini et qui nous ramène au prisme hexagonal de première espèce.

Lorsque deux formes birhomboédriques sont combinées, elles donnent une forme composée, d'apparence hexagonale. Tel est le cas pour la combinaison des deux rhomboèdres p et $e^{\frac{1}{2}}$ qui forme un pseudo-iscéloèdre habituel aux cristaux de quarz (fig. 138).

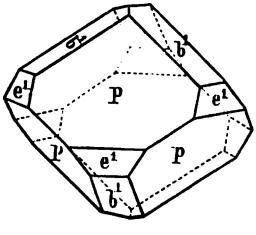


Fig. 139.

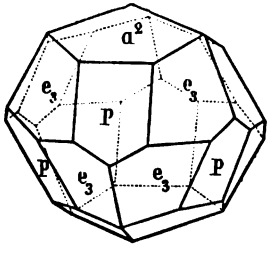


Fig. 140.

La figure 139 montre la combinaison du rhomboèdre primitif $p = \{100\}$, du rhomboèdre direct $a^2 = \{211\}$ et de l'isoscéloèdre $e_3 = \{311\}$. Cette combinaison est fréquente dans l'oligiste.

La figure 140 montre la combinaison du rhomboèdre primitif

$p = \{100\}$ et des rhomboèdres inverses $b^1 = \{110\}$ et $e^1 = \{11\bar{1}\}$. Elle se rencontre dans la chabasie.

La figure 141 est une combinaison du scalénoèdre métastatique

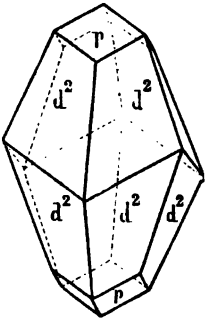


Fig. 141.

$d^2 = \{20\bar{1}\}$ et du rhomboèdre primitif $p = \{100\}$, fréquente dans la calcite.

Le tableau suivant résume la discussion qui vient d'être faite.

	NOTATION MILLER.	OBSERVATIONS.	NOTATION LÉVY.	SITUATION DES POLES SUPÉRIEURS DANS LA PROJECTION GNOMONIQUE
MODIFICATIONS SUR LES ANGLES CULMINANTS a.				
Pôles supérieurs se projetant dans l'intérieur du triangle fondamental dont les sommets sont les trois pôles (100), (010), (001) des faces culminantes supérieures du rhomboèdre primitif p. Les trois caractéristiques de Miller sont positives.				
Scalénoèdres.	$\{ghk\}$	$g > h > k$	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	»
Isoscéloèdres	»	$g + k = 2h$	»	Sur les axes binaires, c'est-à-dire sur les parallèles aux côtés du triangle menées par le centre.
Scalénoèdres. directs. . . .	»	$g + k > 2h$	»	Dans les angles des axes binaires qui comprennent les sommets du triangle.
Inverses. . .	»	$g + k < 2h$		Dans les angles des axes binaires qui comprennent les milieux des côtés.
Rhomboèdres	»	»	»	Sur les médianes du triangle.
Directs. . . .	$\{ghh\}$	»	$a^{\frac{g}{h}}$	Sur la partie des médianes comprise entre un sommet et le centre.
Inverses. . .	$\{ggk\}$	»	$a^{\frac{k}{g}}$	Sur la partie des médianes comprise entre le centre et un côté.
Plans	$\{111\}$	»	a^1	Au centre du triangle.
MODIFICATIONS SUR LES ARÊTES CULMINANTES b.				
Pôles se projetant sur les côtés du triangle fondamental.				
Scalénoèdres.	$\{gh0\}$	»	$b^{\frac{g}{h}}$	»
Directs. . . .	»	$g > 2h$	»	Sur le tiers du côté pris à partir du sommet.
Inverses. . .	»	$g < 2h$	»	Sur le tiers médian de chaque côté.
Isoscéloèdre.	$\{210\}$	»	b^2	Sur les points qui marquent la division de chaque côté en trois parties égales.
Rhomboèdre inverse . . .	$\{110\}$	»	b^1	Au milieu de chaque coté.

	NOTATION MILLER.	OBSERVATIONS.	NOTATION LÉVY.	SITUATION DES POLES SUPÉRIEURS DANS LA PROJECTION GNOMONIQUE.
		MODIFICATIONS SUR LES ANGLES LATÉRAUX e.		
A. Une seule des caractéristiques de Miller est négative pour les pôles supérieurs. Pôles se projetant entre un côté du triangle fondamental et les prolongements des deux autres. Formes *directes* quand les pôles se projettent entre le prolongement d'un côté et la parallèle à ce côté, menée par le centre.				
Scalénoèdres.	$\{gh\bar{k}\}$	»		»
Directs. . . .	»	$g-k>2h$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	Entre le prolongement d'un côté et l'axe binaire parallèle.
Inverses. . .	»	$g-k<2h$	$d^{\frac{1}{g}}\ d^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{k}}$	Dans l'angle formé par les deux axes binaires parallèles aux prolongements des côtés.
Scalénoèdres.	$\{gh\bar{h}\}$	»	$e^{\frac{g}{h}}$	Sur une parallèle à l'un des cotés menée par le sommet opposé du tri^{le}.
Directs. . . .	»	$g-h>2$	»	De $p=e_\infty$ à e_3
Inverses . . .	»	$g-h<2$	»	De e_3 à $d_1=e^0$
Prisme dodécagonal. . .	$\{k-h,h,\bar{k}\}$	$k-h>h$ ou $k>2h$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{k-h}}$	A l'infini sur le rayon partant du centre et parallèle à la droite menée par le pôle (100) et le pôle $(0h\bar{k})$.
Prisme hexagonal de 1re espèce	$\{11\bar{2}\}$	»	e^2	A l'infini sur le prolongement des médianes. (Projection des plans de symétrie).
Rhomboèdres inverses . . .	$\{gg\bar{k}\}$	$2g-k>0$ ou $k<2g$	$e^{\frac{k}{g}}$	Sur le prolongement des médianes du triangle. De $b^1=e^0$ à e^2
B. Deux des caractéristiques de Miller se rapportant aux pôles supérieurs sont négatives. Pôles se projetant dans l'espace angulaire compris entre les prolongements des deux côtés. Formes toujours directes.				
Scalénoèdres directs. . . .	$\{g\bar{h}\bar{k}\}$	»	$b^{\frac{1}{g}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{k}}$	»
Rhomboèdres directs	$\{g\bar{h}\bar{h}\}$	»	$e^{\frac{g}{h}}$	Sur le prolongement des médianes du triangle. De $p=e^\infty$ à e^2.
		MODIFICATIONS SUR LES ARÊTES LATÉRALES d.		
Pôles se projetant sur les prolongements des côtés du triangle.				
Scalénoèdres métastatiques.	$\{g0\bar{k}\}$	»	$d^{\frac{k}{g}}$	De $p=d^\infty$ à d^1,
Prisme hexagonal de 2e espèce.	$\{10\bar{1}\}$	»	d^1	A l'infini sur les axes binaires ou sur le prolongement des côtés qui sont parallèles.

Formes mériédriques. — Le symbole de la symétrie du système rhomboédrique est

$$A^3\ 3L^2\ C\ 3P.$$

On obtiendra les formes mériédriques en supprimant autant d'éléments de symétrie qu'il est possible de le faire sans tomber sur un mode de symétrie propre à l'un des autres systèmes cristallins. On remarque d'abord que les axes binaires seront ou tous conservés ou tous supprimés ; car si l'on conserve l'axe ternaire, l'existence d'un seul des axes binaires entraîne celle des deux autres. On pourrait, il est vrai, en supprimant l'axe ternaire, ne conserver que l'un des axes binaires, mais il faudrait alors, ou supprimer les trois plans de symétrie ou n'en conserver qu'un seul qui serait nécessairement perpendiculaire à l'axe binaire (car autrement le plan de symétrie ferait encore retrouver les trois axes binaires). Or, dans l'un et l'autre cas, on aurait un mode de symétrie du système binaire. La même remarque s'applique aux plans de symétrie.

Il suit de là que l'axe ternaire doit toujours persister, car si l'on conserve les trois axes binaires ou les trois plans de symétrie, l'existence de l'axe ternaire est forcée ; et si on les supprime, la suppression de l'axe ternaire ramène à un mode de symétrie propre au système anorthique.

On conclut donc de cette discussion que les seuls modes mériédriques du système ternaire sont compris dans les quatre symboles suivants :

1° $A^3\ 3L^2\ 0C\ 0P$
2° $A^3\ 0L^2\ C\ 0P$
3° $A^3\ 0L^2\ 0C\ 3P$
4° $A^3\ 0L^2\ 0C\ 0P.$

Le *premier mode de mériédrie* ou *hémiédrie holoaxe* est caractérisé par le symbole

$$A^3\ 3L^2\ 0C\ 0P.$$

Des deux pôles situés dans un même secteur de 60°, direct ou inverse, on n'en conserve qu'un. Il ne reste plus au-dessus du plan principal que trois pôles qui seront, par exemple, ceux qui avoisinent les parties positives des axes binaires ; au-dessous, il ne reste encore que trois pôles qui sont symétriques des premiers par rapport aux axes binaires. Les symboles des pôles supérieurs conservés sont ceux qui

composent une des colonnes du tableau des pôles de la forme holoédrique; les symboles des pôles inférieurs conservés sont ceux des pôles supérieurs supprimés, mais changés de signe. Si l'on projette ortho-

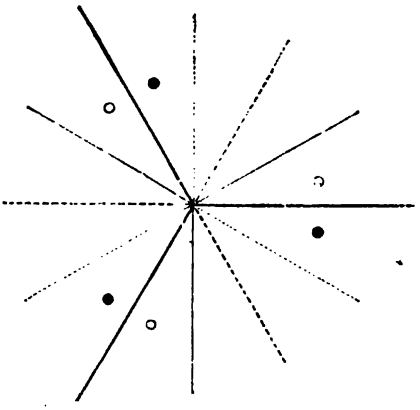


Fig. 142.

gonalement les pôles sur le plan principal, on a la projection (fig. 142), où les points noirs désignent les projections des pôles supérieurs, et les points blancs celles des pôles inférieurs. La forme la plus générale est

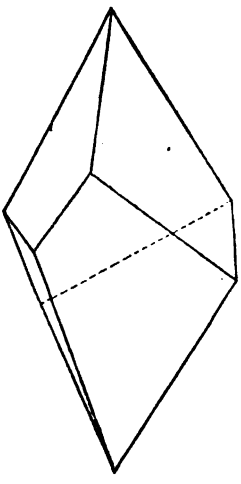


Fig. 143.

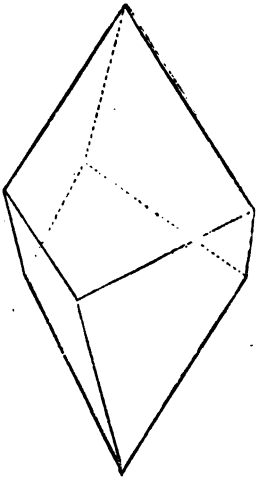


Fig. 144.

donc celle de deux pyramides à trois faces qui viennent se raccorder suivant un hexagone en zigzag, dont les arêtes sont perpendiculaires en leurs milieux sur les axes binaires (fig. 143 et 144).

Les deux formes hémiédriques conjuguées ne sont pas superposables. On appelle formes hémiédriques droites, celles pour lesquelles, de deux pôles supérieurs de la forme holoédrique placés dans le même secteur de 60°, celui-là est conservé qui est à droite en regardant la tranche du plan de symétrie. Cela revient à dire que, dans les figures ci-contre, la forme droite est celle dans laquelle en regardant une face supérieure, l'arête de l'hexagone en zigzag la moins inclinée est située à droite de l'observateur.

L'hémiédrie peut s'appliquer aux isoscéloèdres, et donne deux pyramides trièdres accolées suivant une base commune qui est un triangle équilatéral situé dans le plan principal. Les deux formes conjuguées sont alors superposables.

L'hémiédrie peut encore s'appliquer aux prismes dodécaèdres qui se transforment en prismes hexagonaux non réguliers ; les deux formes conjuguées sont encore superposables.

Les prismes hexagonaux de la première espèce donnent deux prismes superposables, dont la base est un triangle équilatéral.

Les rhomboèdres et les prismes hexagonaux de deuxième espèce sont à eux-mêmes leurs hémiédriques.

En partant de la convention faite, il est aisé, à l'inspection d'une forme hémiédrique holoaxe, de voir si elle est droite ou gauche. On sait bien, en outre, que cette hémiédrie de la forme dévoile une dissymétrie spéciale de l'édifice, et que celui-ci est alors tellement disposé que son image ne lui est pas superposable. Mais il est impossible de savoir si un édifice qui possède une telle dissymétrie portera exclusivement des formes du genre de celles que nous avons nommées droites, ou s'il pourra porter à la fois des formes droites et des formes gauches. La théorie est muette à cet égard ; c'est à l'observation seule à nous éclairer.

Malheureusement les observations de ces phénomènes sont nécessairement fort limitées, car on ne connaît que le quartz qui présente nettement l'hémiédrie holoaxe ternaire, et l'étude cristallographique du quartz est singulièrement compliquée par des phénomènes de groupement très-habituels à cette substance et sur lesquels nous reviendrons plus tard.

Quoi qu'il en soit, l'observation a montré que, parmi les cristaux de quartz, les uns ne montrent à peu près que des formes *directes droites*, et les autres que des formes *directes gauches*. Les premiers sont appelés cristaux *droits*, ils dévient à droite le plan de polarisation ; les

autres sont appelés cristaux gauches, ils dévient à gauche le plan de polarisation; toutefois les droits montrent très-rarement, et à l'état de petites facettes tout-à-fait subordonnées, des formes *inverses gauches*. Il est d'ailleurs à remarquer que l'observateur qui regarde un plan de symétrie bisséquant un secteur direct, a à sa *droite* et le pôle de la face *directe droite* et celui de la face *inverse gauche*.

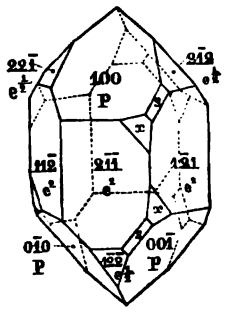


Fig. 145.

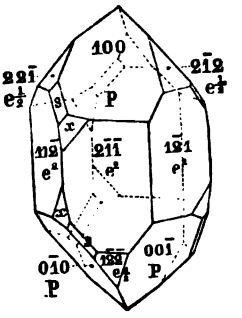


Fig. 146.

Réciproquement les cristaux gauches ont très-rarement, et à l'état de facettes très-subordonnées, des formes *inverses droites*.

Il résulte de ce qui précède que les cristaux de quartz dont la forme dominante est le prisme $e^2 = \{2\bar{1}\bar{1}\}$ surmonté des deux rhomboèdres conjugués $p = \{100\}$ et $e^{\frac{1}{2}} = \{22\bar{1}\}$, portent des facettes hémiédriques qui, pour l'observateur regardant une face p, sont à droite lorsque le cristal est droit, à gauche lorsque le cristal est gauche.

La figure 145 représente un cristal de quartz droit qui porte l'hémiisocéloèdre droit $s = \lambda_d \{41\bar{2}\}$, et l'hémiscalénoèdre droit $x = \lambda_d \{4\bar{1}\bar{2}\}$. La figure 146, représente un cristal de quartz gauche qui porte les formes conjuguées des précédentes.

Le *deuxième mode d'hémiédrie* ou *parahémiédrie*, défini par le symbole

$$A^3\ 0L^2\ C\ 0P,$$

conserve à la partie supérieure 3 pôles, et à la partie inférieure 3 autres pôles symétriques du premier par rapport au centre.

En employant le même système de représentation que précédemment, les projections des 6 pôles ont la disposition ci-contre (fig. 147).

Les symboles des pôles supérieurs conservés sont ceux qui com sent une colonne verticale du tableau; les mêmes symboles changés signe donnent ceux des pôles inférieurs conservés.

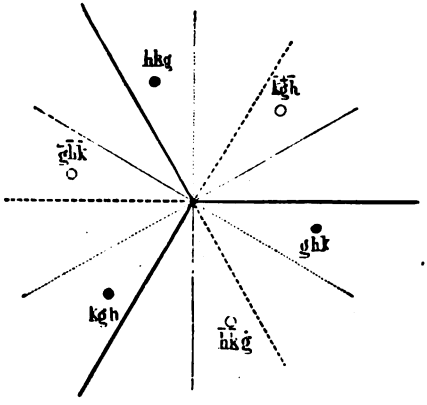


Fig. 147.

La forme la plus générale est un rhomboèdre, dont les plans diag naux ne sont plus les plans de symétrie du cristal.

La forme hémiédrique est à faces parallèles, elle est notée $\pi\{gh\,k\}$.

Les prismes dodécagonaux donnent des prismes hexagonaux régulier

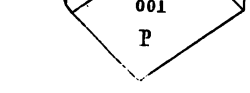


Fig. 148.

dont les plans sont placés dissymétriquement par rapport aux ax binaires et aux plans de symétrie.

L'hémiédrie ne s'applique ni aux prismes hexagonaux, ni aux rhom boèdres.

Le dioptase est un exemple de ce genre d'hémiédrie à faces parallèle La figure 148 montre un cristal de dioptase qui présente les combina

sons du rhomboèdre $p = \{100\}$, du prisme $d^1 = \{10\bar{1}\}$ et de l'hémiscalénoèdre $\frac{1}{2} d^3 = \pi \{30\bar{1}\}$.

Le *troisième mode d'hémiédrie*, ou *antihémiédrie*

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 3P$$

conserve au-dessus du plan principal les 6 pôles de la forme holoédrique (fig. 149) et supprime les 6 pôles placés au-dessous. Le cristal est donc terminé d'une manière différente aux deux extrémités de l'axe ternaire.

La forme hémiédrique à faces non parallèles est notée $\times \{ghk\}$.

Ce mode d'hémiédrie s'applique à toutes les formes fermées, ainsi qu'aux deux plans parallèles $\{111\}$, aux prismes dodécagonaux qui sont transformés en prismes hexagonaux non réguliers, et au prisme hexagonal de première espèce $\{11\bar{2}\}$ qui est transformé en un prisme ayant pour base un triangle équilatère. Ce mode d'hémiédrie ne s'ap-

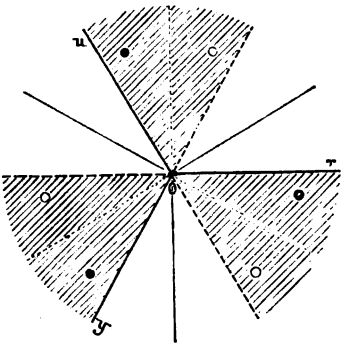


Fig. 149.

plique pas, au contraire, au prisme hexagonal de deuxième espèce $\{101\}$.

La tourmaline présente ce mode d'hémiédrie, qui s'accompagne de propriétés physiques spéciales à chacune des deux extrémités du cristal.

La figure 150 montre un cristal de tourmaline possédant le prisme $\{10\bar{1}\} = d^1$, l'hémiprisme $\times \{11\bar{2}\} = \frac{1}{2} e^2$, l'hémirhomboèdre $\times \{101\} = \frac{1}{2} b^1$, l'hémirhomboèdre $\times \{11\bar{1}\} = \frac{1}{2} e^1$. Les faces du rhomboèdre $\{100\} = p$ se

répètent en haut et en bas, contrairement à la règle ; il faut suppose

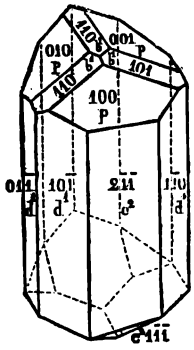


Fig. 150.

que cette anomalie est due à la coexistence des deux formes conju guées hémiédriques $\times\{100\}$.

Enfin, le *quatrième mode de mériédrie*

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 0P$$

conduit à une tétartoédrie. Il ne reste plus que 3 pôles à la partie supérieure, les pôles situés au-dessous du plan médian étant supprimés.

On ne connait pas de substances présentant cette tétartoédrie.

CHAPITRE IX

SYSTÈME QUATERNAIRE OU QUADRATIQUE

Syt. tétragonal (Naumann) ; Viergliedriges Syst. (Rammelsberg) ; Syst. pyramidal (Miller, Schrauf, etc.) ; Syst. du prisme droit à base carrée, deuxième Syst. cr. (Duffrénoy, etc.) ; Dimetric Syst. (Dana).

Le symbole de la symétrie complète du système est

$$A^4\ 2L^2\ 2L'^2\ C\ \Pi\ 2P\ 2P'.$$

Deux axes binaires de même espèce sont à angle droit ; deux autres axes binaires d'espèce différente font avec les premiers des angles de 45°.

Dans un plan perpendiculaire à l'axe quaternaire, la maille plane est un carré. Les projections des nœuds du plan contigu peuvent coïncider avec les nœuds du plan considéré, et la maille solide du réseau est alors un *prisme droit à base carrée.*

Les projections des nœuds du plan contigu peuvent coïncider avec les centres des mailles du plan considéré, et la maille solide du réseau est un *prisme droit centré à base carrée.*

Les projections des nœuds du plan contigu peuvent enfin coïncider avec les milieux des côtés de la maille du plan considéré. Un nœud vient, par exemple, se projeter en A_1 (fig. 151) ; mais la présence du plan de symétrie mené suivant $A_0B'_0$, entraîne un autre sommet en a_1 et la maille du plan contigu devient $A_1a_1B_1a'_1$. Celle du plan considéré doit être identique, et, aux nœuds primitifs du plan, il

faut en ajouter d'autres qui centreront les mailles. Il est alors aisé de voir que la maille solide du réseau est encore un prisme, dont la base

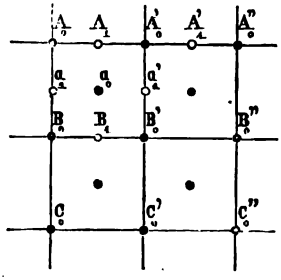


Fig. 151

est $a_0 B_0 a_1 B_0'$ et qui a un nœud B_1 au centre. Cette maille est donc encore un prisme droit centré à base carrée.

Il n'y a en résumé que deux modes possibles du réseau pour le système quadratique :

1° Celui qui a pour maille solide un prisme droit à base carrée ;

2° Celui qui a pour maille solide un prisme droit centré à base carrée.

Systèmes d'axes coordonnés. — On prend toujours pour axes coordonnés l'axe quadratique que l'on place verticalement, et qui est l'axe des z, et deux axes binaires qui sont les axes des x et des y. Mais les axes horizontaux, sont tantôt les axes binaires perpendiculaires aux côtés du carré de la base, c'est-à-dire les axes de première espèce L; tantôt les axes binaires parallèles aux diagonales du carré de la base, c'est-à-dire les axes binaires de deuxième espèce L'.

Il est aisé d'ailleurs, de passer d'un système d'axes à l'autre. Soit xy les axes binaires de première espèce, $x'y'$ ceux de deuxième espèce. Soit a le paramètre des axes binaires de première espèce, a' celui des axes binaires de deuxième, c le paramètre de l'axe vertical. On a :

$$a' = a\sqrt{2}.$$

Si une face est notée (pqr) dans le premier système, et $(p'q'r')$ dans le second, on aura :

$$\begin{array}{ll} p' = p + q & p = p' - q' \\ q' = -p + q & q = p' + q' \\ r' = r & r = 2r', \end{array}$$

en convenant de prendre pour axe des x' positifs la bissectrice de l'angle xy, et pour axe des y' positifs, la bissectrice de l'angle $y\bar{x}$.

Calcul des angles, des arêtes et des faces. — On déduit des formules générales, que deux arêtes dont les notations sont $[ghk]$ et $[g'h'k']$ font entre elles un angle RR′ dont le cosinus est donné par l'expression

$$\cos RR' = \frac{(gg' + hh')a^2 + kk'c^2}{\sqrt{[(g^2 + h^2)a^2 + k^2c^2][(g'^2 + h'^2)a^2 + k'^2c^2]}}.$$

Les normales à deux plans, dont les notations sont (pqr) et $(p'q'r')$, font entre elles un angle PP′, dont le cosinus est donné par l'expression

$$\cos PP' = \frac{(pp' + qq')A^2 + rr'C^2}{\sqrt{[p^2 + q^2)A^2 + r^2C^2][(p'^2 + q'^2) + r'^2C^2]}}.$$

en posant

$$A = \frac{1}{a} \text{ et } C = \frac{1}{c}.$$

On peut encore écrire en posant $\lambda = \frac{a^2}{c^2} = \frac{A^2}{C^2}$

$$\cos RR' = \frac{\lambda(gg' + hh') + kk'}{\sqrt{[\lambda(g^2 + h^2) + k^2][\lambda(g'^2 + h'^2) + k'^2]}}$$

$$\cos PP' = \frac{pp' + qq' + \lambda rr'}{\sqrt{[p^2 + q^2 + \lambda r^2][p'^2 + q'^2 + \lambda r'^2)}}$$

et

$$\operatorname{tg} PP' = \frac{D\sqrt{\lambda(u^2 + v^2) + w^2}}{pp' + qq' + \lambda rr'}$$

u, v, w étant les caractéristiques de la zone définie par P et P′; D étant le plus grand commun diviseur par lequel il faut diviser les binômes formés avec les caractéristiques de P et de P′ pour obtenir u, v, w (Voir page 23).

Formes simples. — Projetons gnomoniquement les pôles sur plan de symétrie principal qui est celui des xy (fig. 152 et 153).

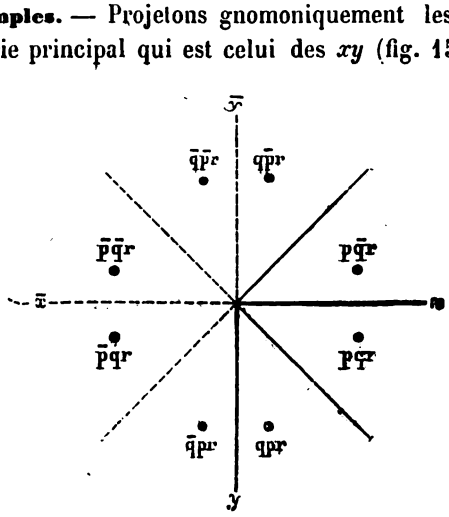


Fig. 152.

plan de projection est divisé en 8 secteurs de 45° par les axes binaire de première espèce x, y, et par ceux de deuxième espèce x' y'.

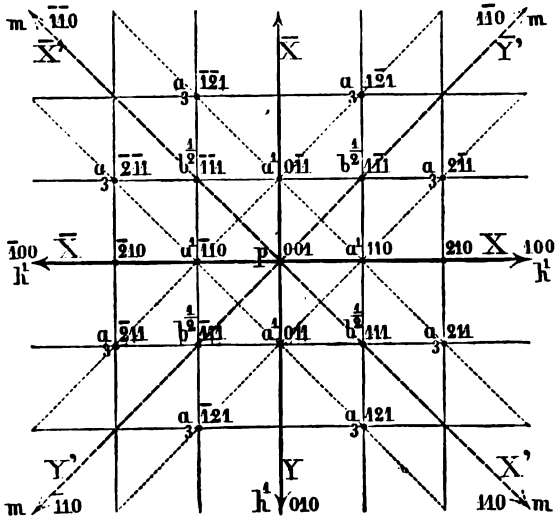


Fig. 153.

Un pôle (pqr) étant placé au-dessus du plan de projection dans l'un de ces 8 secteurs, le secteur xx' par exemple, la forme simple en aura

3 autres qui seront ceux avec lesquels (pqr) peut venir en coïncidence par des rotations de $\frac{2\pi}{4}$ autour de l'axe principal. Faisons abstract la caractéristique r qui est la même pour tous les pôles, il est aisé d trouver les caractéristiques horizontales de ces quatre pôles. Si nous tournons autour de l'axe principal dans le sens des aiguilles d'une montre, nous rencontrerons : après un quart de tour, qui change x en y, et y en $\bar{x}$, le pôle $\bar{q}p$; après un demi tour, qui change $\bar{x}$ en x et y en $\bar{y}$, le pôle $\overline{pq}$, qui est, sur la projection, opposé par le centre au pôle pq; après trois quarts de tour, nous rencontrerons un pôle qui, sur la projection, est l'opposé du pôle $\bar{q}p$, c'est-à-dire le pôle $\bar{q}p$.

Le pôle pq a d'ailleurs un symétrique par rapport au plan bissecteur de xy; ce pôle qp, en entraîne, par suite de la symétrie quadratique de l'axe principal, trois autres dont on trouverait les caractéristiques en suivant une marche analogue à la précédente.

Il y a donc, au-dessus du plan de symétrie principal 8 pôles situés respectivement dans l'un des 8 secteurs de 45° formés par les 4 axes binaires. Les caractéristiques horizontales de ces pôles sont comprises dans le tableau suivant :

pq $\bar{p}\bar{q}$	qp $\bar{q}\bar{p}$
$\bar{q}p$ $\bar{q}p$	$\overline{pq}$ $\overline{pq}$.

Les 4 pôles d'une même colonne verticale viennent en coïncidence mutuelle par des rotations successives de $\frac{2\pi}{4}$; chaque colonne verticale est partagée, par une ligne horizontale, en deux parties dont chacune comprend deux pôles coïncidant par une rotation de $\frac{2\pi}{2}$; les pôles en regard sur une même ligne horizontale sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan de symétrie de deuxième espèce; les pôles qui se correspondent en croix comme pq et $\overline{pq}$, $\bar{q}\bar{p}$ et $\bar{q}p$, sont symétriques l'un de l'autre par rapport à un plan de symétrie de première espèce.

Au-dessous du plan de symétrie principal, se trouvent 8 autres pôles

symétriques des 8 premiers par rapport au centre, et ayant les mêmes symboles changés de signe.

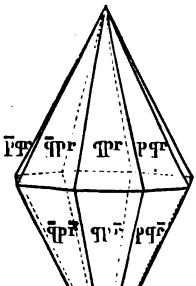


Fig. 154.

En faisant appel à l'axe quaternaire, aux plans de symétrie verticaux et au centre, nous avons évidemment épuisé les éléments de symétrie desquels les autres dépendent; la forme la plus générale a donc 16 pôles ou 16 faces et 16 seulement. Ces faces forment deux pyramides octogones se raccordant dans le plan de symétrie principal suivant une base commune qui est un octogone non régulier dont les sommets pris de deux en deux forment un carré. C'est le *dioctaèdre* (fig. 154).

Si la caractéristique r, relative à l'axe vertical est nulle, la forme

$$\{pq0\}$$

est composée de 8 faces parallèles à l'axe vertical, et dont les pôles sont situés à l'infini sur les directions des rayons vecteurs partant du centre de projection et passant par les pôles de la forme $\{pqr\}$. Ces huit plans forment un *prisme octogone*, dont la section droite est un octogone de même forme que celui qui sert de base aux pyramides du dioctaèdre.

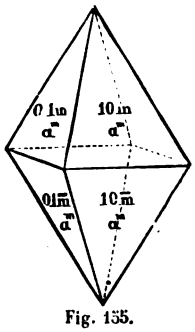


Fig. 155.

Si le pôle (pqr) est placé sur un plan de symétrie de première espèce, une des caractéristiques horizontales est nulle, et la forme

$$\{p0r\}$$

se compose de deux pyramides à 4 faces se raccordant dans le plan de symétrie suivant une base qui est un carré, dit de première espèce, dont les arêtes sont perpendiculaires aux axes binaires de première espèce. C'est un *octaèdre quadratique de seconde espèce* (fig. 155).

Si les pôles, restant toujours dans les plans coordonnés, sont à l'infini sur les axes des x et des y, l'octaèdre se transforme en un prisme

$$\{100\}$$

t la section droite est un carré, dont les faces sont perpendiculaires axes binaires de première espèce et qui est le *prisme de seconde ece*.

i les pôles coïncident avec le centre de projection, la forme se réduit *eux plans parallèles*

$$\{001\}.$$

Si les pôles tombent dans les plans de symétrie de deuxième espèce, deux caractéristiques horizontales sont égales, et la forme

$$\{ppr\}$$

un *octaèdre quadratique de première espèce*, formé de deux pyramides faces, dont les côtés de la base carrée sont perpendiculaires aux axes naires de deuxième espèce.

Lorsqu'en outre $r=0$, on a *le prisme carré de première espèce*

$$\{110\}$$

nt les faces sont perpendiculaires aux axes binaires de deuxième pèce.

Formes composées et système de notations de Lévy. — Nous udierons seulement les combinaisons des diverses formes simples ec l'un des prismes carrés de première ou de deuxième espèce. Supsons qu'il s'agisse du prisme carré de première espèce $\{110\}$; nous n désignons tous les sommets, identiques entre eux, par la lettre a ig. 156); toutes les arêtes de la base sont ppelées b; toutes les arêtes perpendicuires à la base, h. Les faces perpendiulaires à la base seront appelées m; les ases, p.

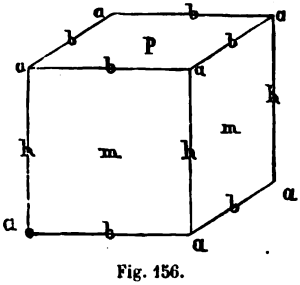


Fig. 156.

On convient de placer toujours, dans es figures qui représentent la perspecive des cristaux, les arêtes h verticales, t la base p horizontale présentant n avant un de ses angles saillants.

De chaque sommet supérieur du prisme partent 3 arêtes; l'une vertiale est parallèle à la direction $-z$, les deux autres horizontales sont arallèles à 2 des 4 directions $\pm x'$, et $\pm y'$.

Une des faces d'un dioctaèdre, notée (pqr) dans le système des a de première espèce et ($p'q'r'$) dans celui des axes de deuxième espè

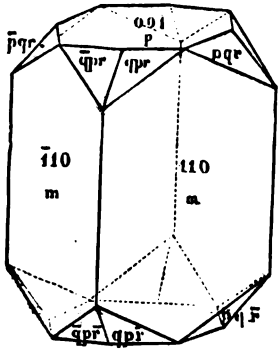


Fig. 157.

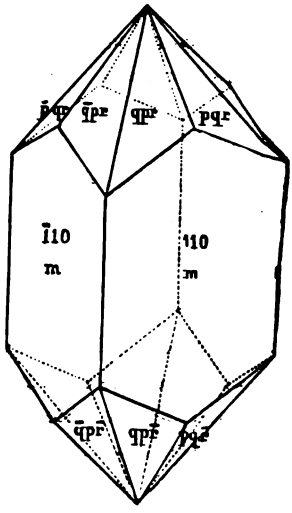


Fig. 158.

vient rencontrer, d'un même côté du point a, les 3 arêtes issues d'u certain sommet du prisme facile à déterminer, car les directions de

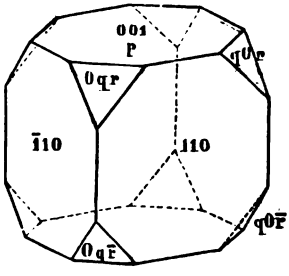


Fig. 159.

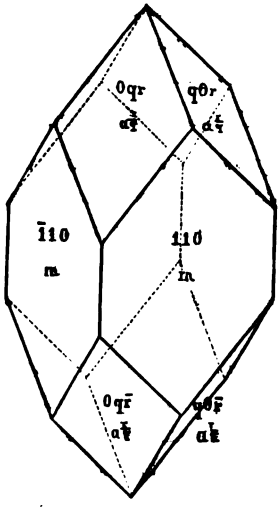


Fig. 160.

arêtes partant de ce sommet doivent avoir des signes contraires à ceux des caractéristiques p',q',r. Les longueurs numériques interceptées par

e face sur les arêtes horizontales sont $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{q'}$, et sur l'arête verti-

e, $\frac{1}{r}$.

cause de la symétrie par rapport aux plans bissecteurs des dièdres ticaux du prisme, il y a 2 plans venant se placer sur chaque sommet est remplacé par une sorte de biseau incliné (fig. 157 et 158).

Lévy rappelle cette position des faces du dioctaèdre en désignant te forme par le symbole

$$b^{\frac{1}{p'}}\, b^{\frac{1}{q'}}\, h^{\frac{1}{r}}.$$

La notation est simplifiée lorsque $p'=r$ ou $p+q=r$; on se sert alors symbole

$$a_{\substack{\frac{1}{p}\\ \frac{1}{q}}} = a_{\frac{q'}{p}}.$$

Il est aisé de voir que les pôles de cette forme sont situés sur le olongement des côtés du carré dont les sommets sont (101), (011), 01), $(0\bar{1}1)$, (fig. 153).

Lorsque $p'=q'$ ou $p=0$, les deux plans du biseau incliné se con- ndent en un seul perpendiculaire sur le plan de symétrie. Chaque gle a est tronqué par un plan incliné formant une troncature symé- ique (fig. 159 et 160). Lévy désigne ces octaèdres de deuxième espèce r le symbole

$$a^{\substack{\frac{1}{p}\\ \frac{1}{r}}} = a^{\frac{r}{q}} = \left\{ 0qr \right\}.$$

Lorsque $q'=0$ ou $p=q$, les faces de la forme sont parallèles aux rêtes horizontales; chacune de ces arêtes est remplacée par une tron- ature parallèle (fig. 161 et 163). Lévy note ces formes modifiant les rête b par le symbole

$$b^{\substack{\frac{1}{p}\\ \frac{1}{q}}} = b^{\frac{r}{pp}} = \left\{ ppr \right\}.$$

Lorsque $r = 0$, toutes les faces sont parallèles à l'axe quaterna

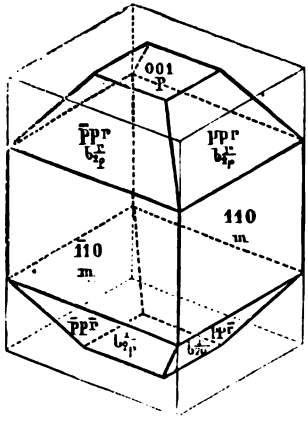


Fig. 161.

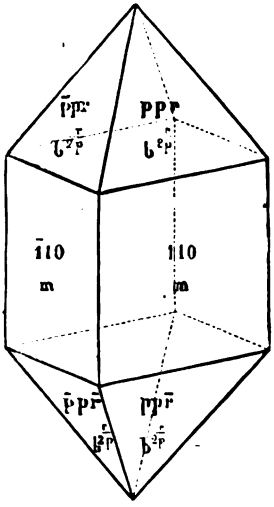


Fig. 162.

ou aux arêtes verticales; chacune de ces arêtes est remplacée par u biseau vertical (fig. 163). Lévy désigne cette forme par le symbole

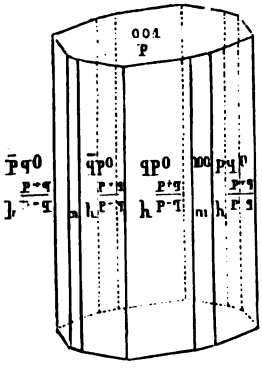


Fig. 163.

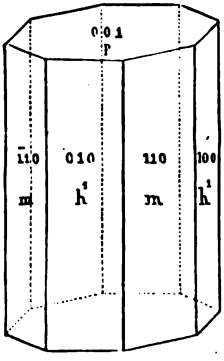


Fig. 164.

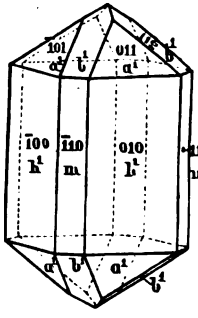


Fig. 165.

$$h^{\frac{q}{p}} = h^{\frac{p+q}{p-q}} = \left\{pq0\right\}.$$

Les deux plans de chaque biseau se confondent en un seul perpendiculaire au plan bissecteur du dièdre ou tangent sur l'arête h (fig. 164).

and $p' = q'$ ou $p = 0$. La forme, qui est le prisme de deuxième espèce, trouve, dans la notation Lévy, désigné par le symbole

$$h^1 = \{101\}.$$

Il est clair que si on prenait comme forme dominante le prisme de uxième espèce h^1, les formes de première espèce seraient placés sur prisme comme les formes de deuxième espèce sont placés sur le isme m, et réciproquement.

On ne peut distinguer les formes de première espèce de celles de uxième que lorsqu'elles viennent en combinaison, comme il arrive uvent. Ainsi la fig. 165 montre la combinaison des prismes de prc- ière et de deuxième espèce, et des octaèdres de première et de euxième espèce. Les figures 166 et 167 montrent la combinaison

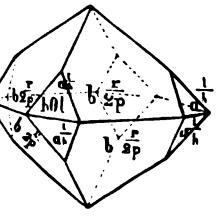


Fig. 166.

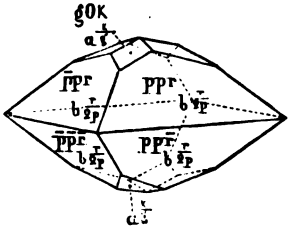


Fig. 167.

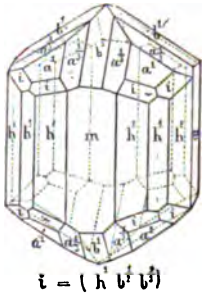


Fig. 168.

'un octaèdre de première espèce et d'un octaèdre de deuxième.

La figure 168 représente un cristal de rutile formé par la combi- aison des deux prismes m et h^1 ; de l'octaèdre de deuxième espèce $a^1 =$ $101\}$, de l'octaèdre de première espèce $b^{\frac{1}{2}} = \{111\}$, du dioctaèdre $\{313\}$ ui se trouve dans la zone (111), (101) ou $[10\bar{1}]$, du dioctaèdre $\{231\}$, et nfin du prisme octogone $h^2 = \{120\}$, dont les faces forment zone avec es faces de $\{111\}$ et celles de $\{231\}$.

Formes mériédriques. — En conservant la symétrie quadratique de 'axe principal, on n'obtient que les cinq combinaisons suivantes, nalogues à celles qui ont été trouvées dans le cas où la symétrie de 'axe principal est ternaire :

Holoédrie		A⁴	2L²	2L'²	C	Π	2P 2P'
Mériédrie	1°	A⁴	2L²	2L'²	0C	0Π	0P 0P'
	2°	A⁴	0L²	2L'²	C	Π	0P 0P'
	3°	A⁴	0L²	0L'²	0C	0Π	2P 2P'
	4°	A⁴	0L²	0L'²	0C	0Π	0P 0P'

Il ne reste plus qu'à affaiblir le degré de symétrie de l'axe quadratique et à le supposer égal à 2. Il faudra en même temps supprimer deux des quatre axes binaires, et ce seront nécessairement deux axes binaires de même espèce, car deux axes binaires situés dans un même plan sont nécessairement perpendiculaires. Si l'on conservait en même temps le centre, il y aurait trois plans de symétrie, Π et 2P, et le mode de symétrie rentrerait dans celui du système ternaire, dont

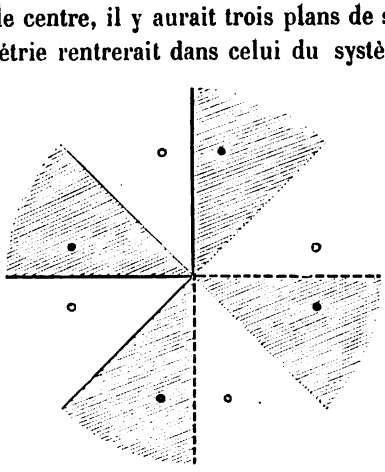


Fig. 169.

il ne serait qu'un cas particulier caractérisé par l'égalité des paramètres de deux des axes binaires. Le centre étant supprimé, Π et 2P le sont également, et par conséquent le seul élément de symétrie qui puisse être conservé est 2P'; il suffit donc d'ajouter aux cinq modes de symétrie précédents ceux qui sont caractérisés par l'un des deux symboles suivants :

5°	A²	2L²	0C	0Π	0P	2P'
6°	A²	2L'²	0C	0Π	2P	0P'

Les 1er 2e 3e 5e et 6e modes des mériédries donnent des formes hémiédriques; le 4e, des formes tétartoédriques.

Le *premier mode* étant holoaxe donne deux formes conjuguées non superposables. Les pôles supérieurs, au nombre de quatre sont situés dans les secteurs de 45°, pris de deux en deux. Les pôles inférieurs,

si au nombre de quatre, se projettent dans les quatre autres sec-
rs de 45° (fig. 169). Les pôles supérieurs sont ceux de l'une des deux
onnes verticales du tableau de la page 151 ; les pôles inférieurs sont
x de l'autre colonne changés de signe. La forme est *droite* lorsque en
ardant en face un axe binaire de première espèce, le pôle supérieur
servé est situé à droite; les pôles supérieurs conservés sont ceux de
première colonne du tableau lorsque $p > q$. La forme est *gauche*
s le cas contraire. La forme la plus générale est celle de deux pyra-
les à quatre faces à base carrée, mais dont la base n'est pas tournée
la même façon, et se raccordent suivant un octogone en zigzag

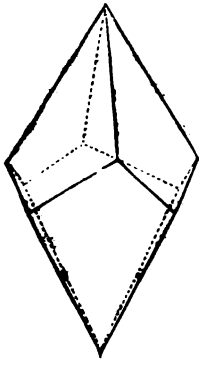


Fig. 170.

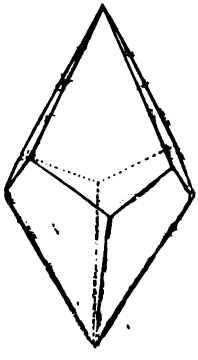


Fig. 171.

g. 170 et 171). Ce mode d'hémiédrie ne peut pas s'appliquer aux for-
es dont les pôles sont situés dans les plans de symétrie. Il ne convient
onc qu'aux dioctaèdres.

Le *deuxième mode*

$$A^4\ OL^2\ OL'^2\ C\ \pi\ OP\ OP'.$$

st une *parahémiédrie;* il donne deux formes conjugées superposa-
les. Les pôles supérieurs sont les mêmes que dans le mode précé-
ent, mais les pôles inférieurs sont projetés sur les pôles supérieurs
'hémiédrie est à faces parallèles; on la note $\pi \{ghk\}$. Les dioctaèdres
ont transformés en octaèdres à base carrée, dont ni les arêtes ni les
iagonales de la base ne sont perpendiculaires aux axes de symé-
rie binaire. Les prismes octogones sont transformés en prismes carrés,
ont la section droite présente la même dissymétrie. Les octaèdres et
es prismes carrés ne sont pas soumis à cette hémiédrie.

La figure 172 représente un cristal de molybdate de plomb

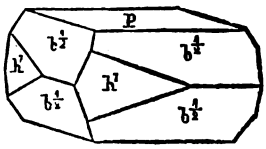


Fig. 172.

montre la coexistence de la base $p = \{001\}$ de l'octaèdre $a^1 = \{1$ et de l'hémiprisme octogone $i = \frac{1}{2} h^7 = \pi \{430\}$.

Le *troisième mode*

$$A^4\ 0L^2\ 0L'^2\ 0C\ 0\Pi\ 2P\ 2P'$$

conduit à prendre les huit pôles supérieurs en supprimant les h pôles inférieurs. Le cristal est alors terminé d'une façon différente a deux extrémités de l'axe quaternaire. On ne connaît aucune substan possédant cette hémiédrie.

Le *quatrième mode* est une *tétartoédrie* qui prendrait quatre des h pôles supérieurs de l'hémiédrie précédente. Il conduirait à des form non superposables, mais il ne s'est pas rencontré jusqu'ici dans l cristaux.

Le *cinquième mode*

$$A^2\ 2L^2\ 0C\ 0\Pi\ 0P\ 2P'$$

est une *antihémiédrie*. Les quatre pôles supérieurs conservés sont situ

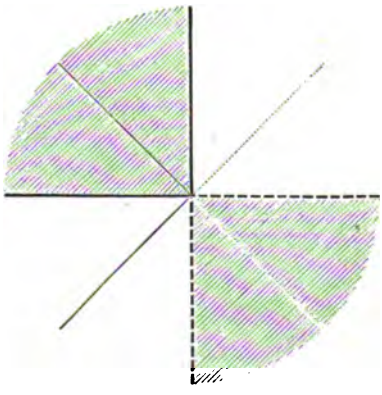


Fig. 173.

dans deux quadrants opposés formés par les axes binaires de premièr espèce x et y (fig. 173); ils se trouvent dans le tableau de la page 15

-dessus de la ligne horizontale qui le partage en deux parties. Les ıtre pôles inférieurs conservés se projettent dans les quadrants des es supprimés en haut; ce sont ceux dont les symboles se trouvent s le tableau au-dessous de la ligne horizontale, mais changés de signe. a forme hémiédrique n'a pas de faces parallèles; on la note $hk\}$. Les octaèdres de deuxième espèce a^m ne sont pas soumis à cette

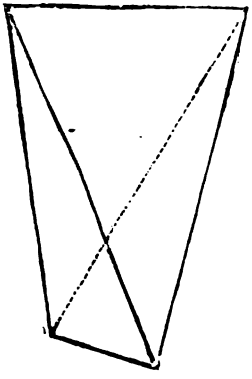


Fig. 174.

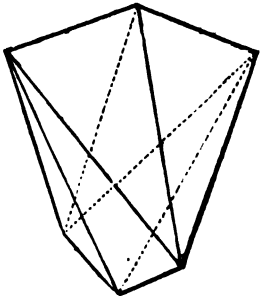


Fig. 175.

émiédrie, mais les octaèdres de première espèce b^m sont transformés ar elle en des tétraèdres non réguliers qu'on nomme des *sphénoèdres* ig. 174). Les dioctaèdres sont transformés en des solides à huit faces

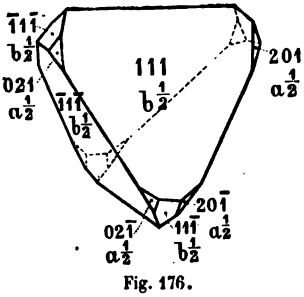


Fig. 176.

qui sont des espèces de tétraèdres dont les faces sont remplacées par des espèces de biseaux (fig. 175). Les prismes octogones ne sont pas soumis à cette hémiédrie.

Le *sixième mode* ne diffère du cinquième qu'en ce que les plans de symétrie de première espèce, et non plus ceux de seconde sont conservés. Les pôles supérieurs conservés sont situés dans deux quadrants

opposés formés par les axes binaires de deuxième espèce x' et y' se trouvent ainsi, sur le tableau de la page 151, dans deux quadr opposés formés par les lignes horizontale et verticale. L'hémiédrie s plique aux octaèdres de deuxième espèce, et non plus aux octaè de première.

La fig. 176 représente un cristal de cuivre pyriteux, formé pa combinaison des deux tétraèdres conjugués $\frac{1}{2}\, b^{\frac{1}{2}} = \times \left\{111\right\}$, et de l taèdre de deuxième espèce $a^{\frac{1}{2}} = \left\{210\right\}$.

La figure 177 représente un autre cristal de cuivre pyriteux formé

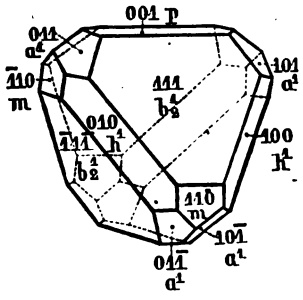


Fig. 777.

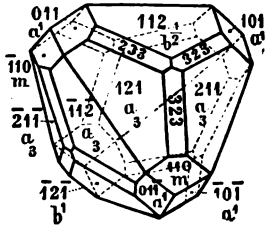


Fig. 778.

la combinaison de l'hémioctaèdre de première espèce $\frac{1}{2}\, b^{\frac{1}{2}} = \times \left\{111\right.$ des prismes de première et de seconde espèce $h^1 = \left\{100\right\}$ et $m = \left\{11\right.$ et de l'octaèdre de deuxième espèce $a^1 = \left\{101\right\}$.

La figure 178 représente un troisième cristal de cuivre pyriteux forn par la combinaison de l'hémioctaèdre $\frac{1}{2}\, b^1 = \times \left\{112\right\}$, des hémidio taèdres $\frac{1}{2}\, a_3 = \times \left\{211\right\}$ et $\frac{1}{2}\, i = \times \left\{323\right\}$, du prisme de première espè $m = \left\{110\right\}$, et de l'octaèdre de deuxième espèce $a^1 = \left\{101\right\}$.

CHAPITRE X

SYSTÈME TERBINAIRE OU ORTHORHOMBIQUE

hombique. (Naumann). — S. orthoclinique. (Frankenheim). — Zweigliedriges system. Rammelsberg). — S. orthogonal (Schrauf). — S. prismatique. (Miller). — S. du risme droit rectangulaire ou 3e syst. (Dufrénoy).

Des modes possibles du réseau. — Le symbole de la symétrie du seau est

$$L^2\ L'^2\ L''^2\ C\ P\ P'\ P''.$$

La maille parallélogrammique d'un des plans de symétrie P étant ymétrique par rapport à P′ et P″, est nécessairement ou un rectangle ont les côtés sont parallèles à L′ et à L″, ou un rhombe dont les iagonales sont parallèles aux mêmes directions.

Supposons d'abord que la maille du plan P est un rectangle.

Les nœuds du plan P peuvent coïncider avec les projections des œuds du plan contigu, et la maille solide du réseau est un *prisme ectangulaire droit*. C'est le premier mode ou *mode hexaédral rectanulaire*.

Les projections des nœuds du plan contigu peuvent coïncider avec es centres des rectangles du plan P, et la maille solide du réseau est n *prisme rectangulaire droit centré*. Si on mène les plans diagonaux le ces prismes rectangulaires, on voit qu'on peut encore considérer la naille solide comme formée par un *prisme rhomboïdal droit ou orhorhombique, à faces centrées*. C'est le second mode ou mode *octaédral ectangulaire* (fig. 179).

Les projections des nœuds du plan contigu peuvent coïncider avec les milieux des côtés du rectangle (fig. 180). La maille du réseau peut alors être regardée comme formée par un *prisme rectangulaire droit*

dont deux des faces latérales sont centrées. Si l'on considère le plan r
culaire vertical $A_0\ A''_0$ mené par des faces centrées, le réseau pl

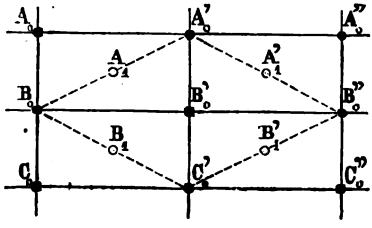


Fig. 179.

figure des rectangles centrés (fig. 181) ou des rhombes tels
$A_1\ A_2\ A_3\ A'_2$. Dans deux plans réticulaires contigus, parallèles au p

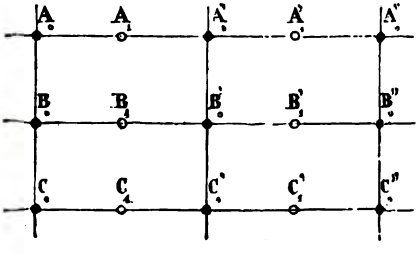


Fig. 180.

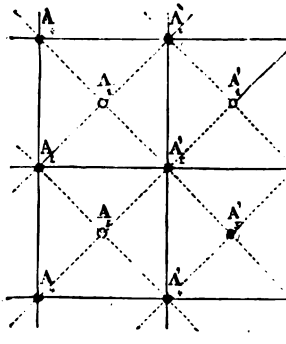


Fig. 181.

vertical $A_0\ A'_0$, les nœuds se projettent sur les mêmes points. La mail
solide du réseau peut donc encore être regardée comme formée p
un *prisme rhomboïdal droit.* C'est le troisième mode ou mode *hexaédr*
rhombique.

Supposons maintenant que la maille du plan P est un rhombe.

Si les nœuds du plan P coïncident avec les projections des nœuds d
plan contigu, on retombe sur le mode *hexaédral rhombique.*

Si les projections des nœuds coïncident avec les centres des rhomb
(fig. 182), la maille solide est un prisme *rhombique centré.* Si on mèn
les plans verticaux passant par les diagonales du rhombe de la base,
est aisé de voir que la maille peut encore être considérée comm

ıée par un *prisme rectangulaire à faces centrées*. C'est le quatrième le ou mode *octaédral rhombique*.

ne resterait plus qu'une supposition à faire, c'est que les projections

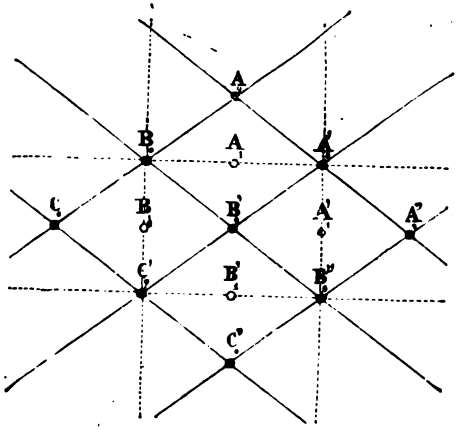


Fig. 182.

nœuds du plan contigu coïncident avec les milieux des côtés du mbe, mais il est aisé de voir que la supposition est inadmissible,

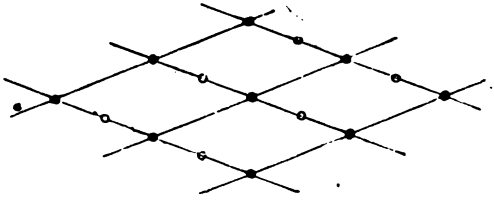


Fig. 183.

les plans verticaux passant par les diagonales du rhombe ne seraient s alors des plans de symétrie (fig. 183).

l n'y a donc que quatre modes possibles pour l'arrangement des uds du réseau dans le système terbinaire, et ces quatre modes peu- ıt être regardés comme ayant pour forme primitive ou pour maille ide, soit un prisme rectangulaire droit, soit un prisme orthorhom- ue.

Systèmes d'axes coordonnés. — Il résulte de ce qui précède qu'on ıt adopter pour système d'axes coordonnés, ou les trois arêtes du prisme ctangulaire, c'est-à-dire les trois axes binaires, ou les trois arêtes du sme orthorhombique.

Appelons a, b, c, les trois paramètres des axes binaires x, a étant supposé plus grand que b; et soit a' le paramètre commun axes des x' et des y' parallèles aux côtés de la base du prisme rhoïdal droit. Si nous convenons que l'axe positif des x' est la gonale du rectangle construit sur $+a$ et $+b$, et l'axe positif de celle du rectangle construit sur $-a$ et $+b$, les caractéristiques $(p'$ relatives aux axes $x'y'z'$ seront reliées aux caractéristiques $(pq\,r)$ tives aux axes xyz par les équations suivantes :

$$p'=p+q \qquad p=p'-q'$$
$$q'=-p+q \qquad q=p'+q'$$
$$r'=r \qquad r=2r'.$$

On a en même temps

$$a'=\sqrt{a^2+b^2} \qquad c'=c.$$

Toutefois il est important de remarquer que, lorsque la mai solide est un prisme rectangle, les côtés du rhombe ne sont pas rangées conjuguées, puisque le parallélogramme construit sur ces cô contient un nœud au centre. Réciproquement, si la maille solide un prisme orthorhombique, les axes binaires ne sont pas deux rangé conjuguées.

Calcul des angles, des arêtes et des faces. — *Avec les trois a binaires pour axes coordonnés*, on tire aisément des formules général les expressions suivantes pour l'angle RR′ de deux rangées $[gh$ $[g'h'k']$ et pour l'angle PP′ formé par les normales à deux plans $(pq$ $(p'q'r')$:

$$\cos RR'=\frac{gg'a^2+hh'b^2+kk'c^2}{\sqrt{(g^2a^2+h^2b^2+k^2c^2)\,(g'^2a^2+h'^2b^2+k'^2c^2)}}$$

$$\cos PP'=\frac{pp'A^2+qq'B^2+rr'C^2}{\sqrt{(p^2A^2+q^2B^2+r^2C^2)\,(p'^2A^2+q'^2B^2+r'^2C^2)}}$$

$$\operatorname{tg} PP'=\frac{D\sqrt{u^2B^2C^2+v^2A^2C^2+w^2A^2B^2}}{pp'A^2+qq'B^2+rr'C^2}.$$

Dans ces formules on a :

$$A=\frac{1}{a} \quad B=\frac{1}{b} \quad C=\frac{1}{c}.$$

Quant à D, u, v, w, ils ont la signification indiquée page 25.

renant *pour axes coordonnés les arêtes du prisme orthorhombique*, t :

$$\frac{(gg' + hh')\,a'^2 + kk'c'^2 - (gh' + g'h)\,a'^2 \cos x'y'}{\sqrt{\left\{(g^2+h^2)a'^2 + k^2c'^2 - 2gha'^2\cos x'y'\right\}\left\{(g'^2+h'^2)a'^2 + k'^2c'^2 - 2g'h'a'^2\cos x'y'\right\}}}$$

ant l'angle obtus de la base du prisme rhomboïdal droit; a' et c' ramètres des axes.

$$\frac{(pp' + qq')A'^2 + rr'C'^2 + (pq' + p'q)\,A'^2 \cos x'y'}{\sqrt{\left\{(p^2+q^2)\,A'^2 + r^2C'^2 + 2pq\,A'^2\cos x'y'\right\}\left\{(p'^2+q'^2)A'^2 + r'^2C'^2 + 2p'q'A'^2\cos x'y'\right\}}}$$

le dans laquelle il faut faire

$$A' = \frac{1}{a'} \quad C' = \frac{1}{c'} \sin x'y'$$

mes simples. — Choisissons les trois axes binaires comme axes onnés, projetons gnomoniquement (fig. 184) les pôles sur un plan

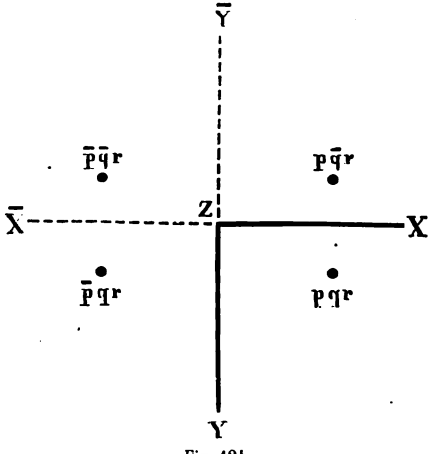


Fig. 184.

endiculaire à l'axe vertical des Z et cherchons les pôles d'une même e simple situés au-dessus du plan des XY. Nous verrons qu'un quelconque (pqr) entraîne l'existence du pôle ($\bar{p}\bar{q}r$), à cause de la étrie binaire de l'axe Z. Le plan ZX étant un plan de symétrie, l'exis- e de (pqr) entraîne celle de ($p\bar{q}r$) qui nécessite à son tour celle

de (pqr). On a ainsi, au-dessus du plan XY, quatre pôles qui aur leurs symétriques au-dessous, puisque le plan XY est un plan de sy trie.

En faisant appel à l'existence de l'axe binaire Z, et à celle des pl de symétrie XZ et XY, nous avons épuisé la symétrie du système, ca serait aisé de voir que tous les autres éléments de symétrie se déduis de ceux-là. La forme simple holoédrique la plus générale du systè terbinaire possède donc 8 faces et 8 faces seulement. Cette forme sim est évidemment un octaèdre dont les 6 sommets sont situés sur les a binaires, et dont les arêtes, contenues dans les plans de symétrie, f ment un rhombe dans chacun de ces plans. On dor à cette forme le nom d'*octaèdre droit à base rhom* (fig. 185).

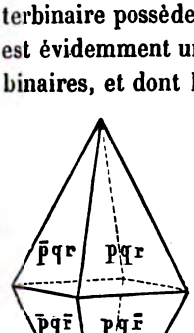


Fig. 185.

A chaque sommet d'une semblable figure, vienne se réunir 4 faces. Les faces opposées deux à deux, elles étaient suffisamment prolongées, formerai deux biseaux dont les arêtes seraient parallèles a deux axes binaires qui coupent à angle droit cel sur lequel se trouve placé le sommet. Les angles d dres de ces deux biseaux, qui viennent en coïnciden mutuelle par une rotation autour de ce dernier a binaire, sont égaux entre eux. Nous désignerons p 2α, 2β, 2γ les angles dièdres des biseaux correspondant respectiveme aux sommets tracés sur les axes a, b, c. Dans la projection gnomoniqu la longueur de la droite, qui joint le centre Z de la projection au pô (pqr), est égale à $c.tang.\gamma$

Les 4 plans de l'octaèdre, placés au-dessus du plan horizontal XY fo ment une pyramide quadrangulaire à base rhombe. Naumann appel *brachypyramides* les formes octaédriques pour lesquelles, p étant pl grand que q, la base de la pyramide est plus allongée, dans le sens l'axe minimum Y, que le rhombe dn prisme primitif. Les formes oct driques pour lesquelles $p < q$ sont les *macropyramides*. Lorsque $p =$ la base de la pyramide est le rhombe du prisme primitif, Nauma désigne ces formes, notées $\{ppr\}$ sous le nom de *protopyramides*. L'o taèdre $\{111\}$ est la *protopyramide fondamentale;* elle a pour axes l 3 paramètres a, b, c.

Si $q = 0$, les deux pôles (pqr) et $(p\bar{q}r)$ se confondent et les 8 faces l'octaèdre se réduisent à 4; ces 4 faces forment un *prisme dro*

}, dont la section droite est un rhombe et dont les arêtes sont pa-
es à l'axe des Y. Les formes simples $\{0qr\}$ sont des prismes ana-
s dont les arêtes sont parallèles à l'axe des X. Enfin, les formes
les $\{pq0\}$ sont des prismes dont les arêtes sont parallèles à l'axe
.

s deux plans des formes $\{p0r\}$ qui sont situés au dessus de XY,
ent une sorte de toit ou de dôme dont l'arête est parallèle à l'axe
mum; Naumann appelle ces formes des *brachydomes*. Les formes
} sont des *macrodomes*. Les formes $\{pq0\}$ sont pour Naumann des
ıyprismes lorsque $p > q$, et des *macroprismes* lorsque $p < q$.
en même temps que $p = 0$, on a $q = r$, la forme $\{011\}$ est un
ne dont les faces sont parallèles à celles de l'un des trois prismes
orhombiques que l'on peut considérer comme primitifs. Les formes
} et $\{110\}$ sont respectivement parallèles à celles des deux autres
mes. La forme $\{110\}$ est pour Naumann le *protoprisme*.

enfin $p = 0$ et $q = 0$, la forme $\{001\}$ se réduit à *deux plans* per-
liculaires à l'axe des Z; la forme $\{010\}$ se réduit à deux plans
endiculaires à l'axe des Y, et la forme $\{100\}$ à deux plans perpen-
laires à l'axe des X. Ces trois systèmes de plans parallèles sont les
s du prisme rectangulaire droit primitif.

aumann appelle *bases* les plans $\{001\}$; les plans $\{010\}$ et $\{100\}$
des *pinacoïdes*. Les plans $\{100\}$ parallèles à l'axe le plus court
des *brachypinacoïdes*, et les plans $\{010\}$ parallèles à l'axe le plus
sont des *macropinacoïdes*.

ormes composées. — Plaçons d'abord les formes simples sur le
me rhomboïdal droit, qui est très-fréquemment la forme domi-
te des cristaux de ce système, et que l'on prend ordinairement
r la forme primitive du réseau. On convient de placer ce prisme de
on que les arêtes latérales soient verticales, et que l'angle obtus
rhombe soit tourné vers l'observateur (fig. 186). Les angles solides
respondant aux angles obtus du rhombe de la base sont notés *a;*
sont au nombre de 4, identiques entre eux. Les angles solides

correspondant aux angles aigus du rhombe sont notés *e;* ils sont au

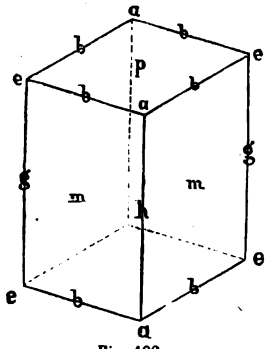


Fig. 186.

au nombre de 4, identiques entre eux. L arêtes horizontales du rhombe, toutes *ide* tiques entre elles, soit comme opposées par centre, soit comme symétriques, sont app lées *b;* parmi les arêtes verticales, il y à distinguer les arêtes latérales qui abo tissent aux angles *e*, et qu'on appelle *g*, les arêtes verticales aboutissant aux angl *a*, que l'on appelle *h*.

Pour suivre la discussion, il est bon d'a voir sous les yeux la projection gnomoniqu du réseau polaire sur le plan des XY (fig. 187 et fig. 187 *bis*, pl. II

L'axe X ayant un paramètre $A = \frac{1}{a}$ et l'axe Y un paramètre $B = \frac{1}{b}$

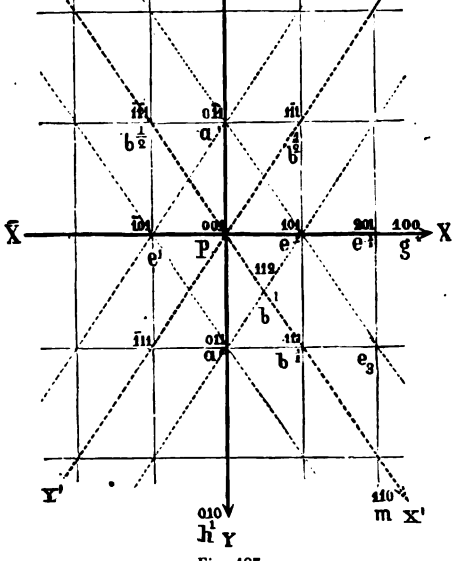


Fig. 187.

on a A < B puisque, par convention, on suppose $a > b$ en prenant pour axe des x la grande diagonale de la base du rhombe.

Ces paramètres étant donnés, il est aisé de construire la projection.

ons les droites qui passent par les extrémités des paramètres axes X, Y; elles formeront par leurs intersections mutuelles hombe semblable au rhombe de la base du prisme primitif. Me-, par le centre, des parallèles $X'X''$, $Y'Y''$ aux côtés de ce rhombe, représenteront des plans de zone normaux aux faces du prisme itif.

est clair que tous les pôles qui tomberont dans les angles obtus $''$ et $Y'OX''$, c'est-à-dire pour lesquels on aura $p > q$ correspondront

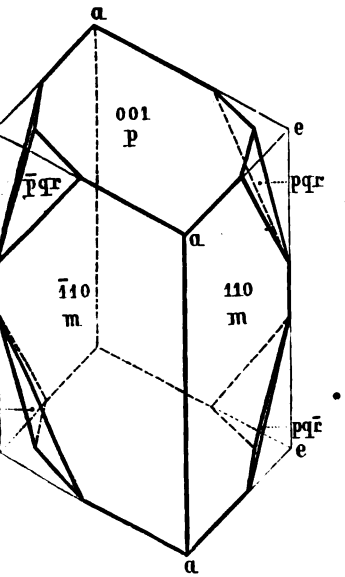


Fig. 188.

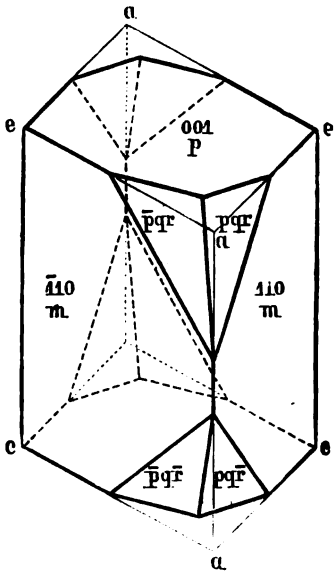


Fig. 189.

es faces qui viendront rencontrer les arêtes issues d'un angle e, ou , en d'autres termes, modifieront les angles e; tous les pôles qui beront dans les angles aigus $X'OY'$, $X''OY''$, c'est-à-dire pour les-ls $p<q$, correspondront à des faces qui modifieront les angles a; s les pôles situés sur les droites $X'X''$, $Y'Y''$, c'est-à-dire pour les-ls $p = q$ correspondront à des faces parallèles à l'intersection de base p du prisme et d'une face latérale m, c'est-à-dire placées sur arêtes b.

La forme $\{pqr\}$ donnera donc des biseaux inclinés placés sur les gles e quand $p>q$ (fig. 188) et sur les angles a quand $p<q$ (fig. 9). Lorsque $p = q$, les faces sont placées sur les arêtes b, qu'elles

remplacent par des plans, tous également inclinés sur la base (fig. 190

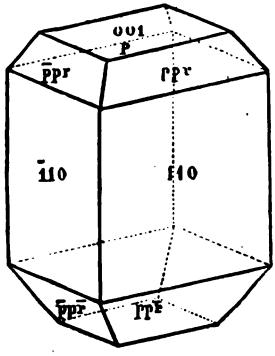


Fig. 190.

Lorsque $q = 0$, les pôles se trouvent placés sur X et les plans de l forme simple tronquent les angles e suivant des plans qui, prolongé suffisamment, viendraient former au-dessus du cristal un biseau ou *dôm*

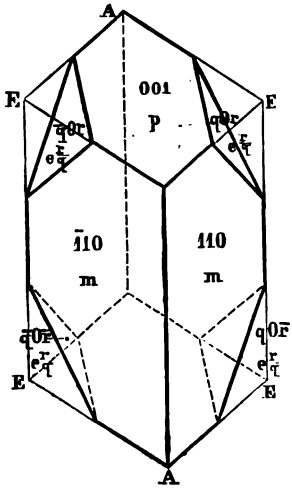


Fig. 192.

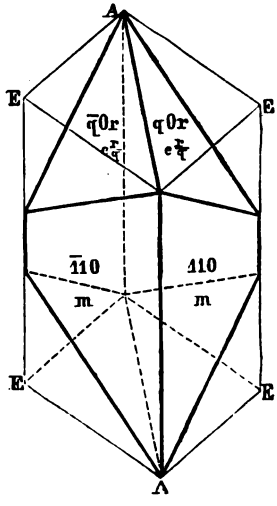


Fig. 193.

dont l'arête serait parallèle à la petite diagonale du rhombe de la base (fig. 191 et 192).

Lorsque $p = 0$, les pôles de la forme $\{0qr\}$ sont placés sur l'axe Y, et les faces viennent tronquer les angles e en produisant des dômes

es arêtes sont parallèles à la grande diagonale de la base 93 et 194).

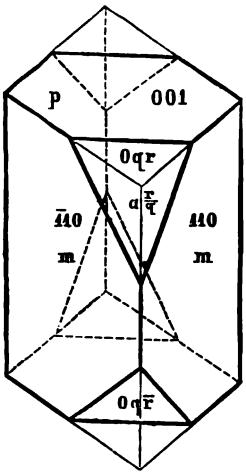


Fig. 193.

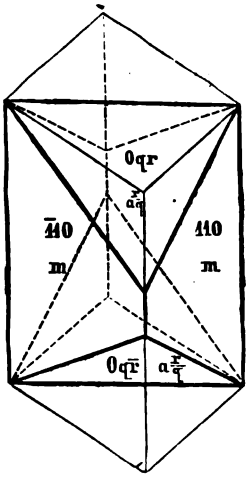


Fig. 194.

sque $r = 0$ on a des plans placés sur les arêtes verticales qui ent former un biseau sur les arêtes g quand $p > q$ (fig. 195) et sur êtes h quand $p < q$ (fig. 196).

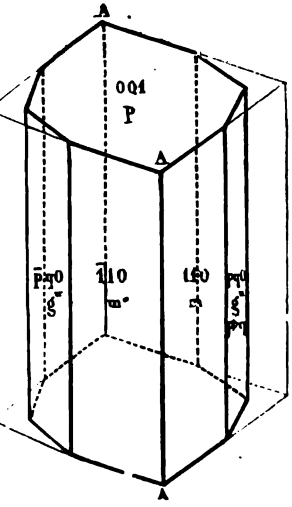


Fig. 195.

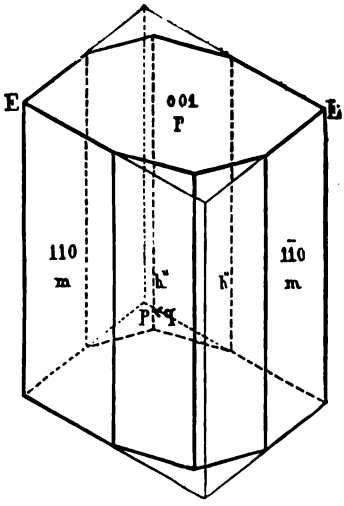


Fig. 196.

orsque $r = 0$ et $q = 0$, la forme $\{100\}$ donne deux plans tangents

sur les arêtes g, ou perpendiculaires à la plus longue diagona (fig. 197).

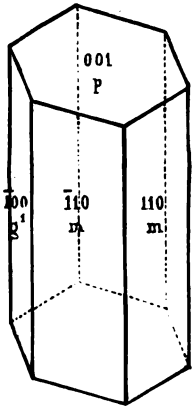


Fig. 197.

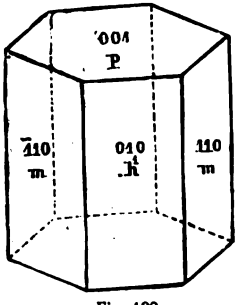


Fig. 198.

Lorsque $r = 0$ et $p = 0$ les deux plans de la forme $\{010\}$ sont tan gents sur les arêtes h (fig. 198).

Il est intéressant de remarquer que lorsque l'angle obtus du rhomb est de 120°, la combinaison des plans $\{100\}$ et du prisme primit $\{110\}$ donne un prisme hexagonal régulier.

La figure 199 représente un cristal de stilbite montrant la combina son des formes $\{100\}$, $\{010\}$, $\{111\}$.

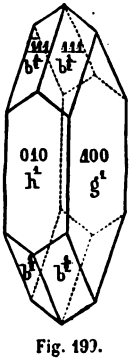


Fig. 199.

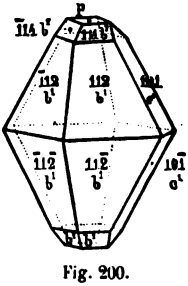


Fig. 200.

La figure 200 représente un cristal de soufre montrant les octaèdre $\{112\}$ et $\{114\}$, le dôme $\{011\}$ et la base $\{001\}$.

gure 201 représente un cristal de barytine formé par le prisme pri-
110 }, le dôme { 012 } et la base { 001 }.

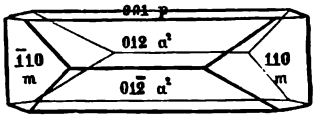


Fig. 201.

ation Lévy. — Il nous faut, dans ce système de notation, changer
coordonnés au moyen des formules connues

$$p' = p + q \qquad q' = -p + q \qquad r' = r.$$

formes situées sur les angles e ou les brachypyramides seront
s

$$b^{\frac{1}{p+q}}\, b^{\frac{1}{p-q}}\, g^{\frac{1}{r}} = \{pqr\} \text{ avec } p > q.$$

s formes situées sur les angles a, ou les macropyramides seront
es

$$b^{\frac{1}{p+q}}\, b^{\frac{1}{q-p}}\, h^{\frac{1}{r}} = \{pqr\}, \text{ avec } p < q.$$

rsque $q = 0$, on a $q' = p' = p$; la forme qui est un brachydome est
ée sur l'angle e et notée

$$e^{\frac{r}{p}} = \{p0r\}$$

rsque $p = 0$, la forme qui est un macrodome est placée sur
gle a et notée

$$a^{\frac{r}{q}} = \{0qr\}$$

rsque $p = q$, on a $q' = 0$; la forme qui est une protopyramide est
ée sur l'arête b, et notée

$$b^{\frac{r}{2p}} = \{ppr$$

orsque $r = 0$, les formes qui sont des prismes parallèles aux arêtes
icales sont notées

$$g^{\frac{p}{q}} = \{pq0\}$$

$$h^{\frac{q}{p}} = \{pq0\}$$

suivant qu'elles sont placées sur les arêtes g ou sur les arêtes h, c'e
à-dire suivant que $p > q$ ou $p < q$.

On a

$$g^1 = \{100\}$$

$$h^1 = \{010\}$$

$$p = \{001\}.$$

Le prisme primitif est noté

$$m = \{110\}.$$

On simplifie la notation quand $p' = p + q = r$ ou, ce qui revi
au même, puisque dans les différentes faces d'une même forme simp
p' et q' s'échangent entre eux, $q' = -p + q = r$.

Les faces de la forme sont alors, comme il est aisé de le voir, co
prises dans l'une des zones $[11\bar{1}]$, $[\bar{1}1\bar{1}]$, $[\bar{1}\bar{1}\bar{1}]$, $[\bar{1}1\bar{1}]$; ou, en d'aut
termes, les pôles de ces faces sont situés, dans la projection gnom
nique, sur les droites qui joignent deux à deux les extrémités des pa
mètres des axes X et Y.

Supposons, pour fixer les idées, $p' = r$, les formes sont notées :

$$e_{\frac{1}{p'}} = e_{\frac{q'}{p}} = e_{\frac{p-q}{p+q}}$$

lorsque les faces sont placées sur 'angle e, c'est-à-dire lorsque $p >$
et :

$$a_{\frac{1}{p'}} = a_{\frac{q'}{p'}} = a_{\frac{q-p}{p+q}}$$

lorsqu'elles sont placées sur les angles a, c'est-à-dire lorsque $p <$

Formes mériédriques. — En affaiblissant graduellement la symét
du réseau, on peut d'abord conserver les trois axes binaires, ce
entraînera la suppression de tous les autres éléments de symétrie,

ence d'un seul d'entre eux les rétablirait tous. Ce sera la mériédrie

$$L^2\ L'^2\ L''^2\ 0C\ 0P.$$

n supprime un des axes de symétrie, il faudra en supprimer deux, e l'existence de deux axes entraîne celle d'un troisième ; avec cet symétrie L^2, on ne peut pas conserver le centre, car on retombe- rs sur le mode de symétrie holoédrique du système binaire. On t pas supprimer tous les plans de symétrie, car on retomberait des modes hémiédriques du système binaire ; on ne peut pas us conserver un seul des plans de symétrie, car ce plan, pour unique, serait nécessairement perpendiculaire à l'axe conservé stence du centre s'en déduirait. Il faut donc supposer l'existence x plans de symétrie P', P'' et le symbole de la symétrie est :

$$L^2\ 0L'^2\ 0L''^2\ 0C\ P'\ P''.$$

st clair qu'au lieu de conserver l'axe L, on pourrait conserver l'un ux autres L' et L''.

On supposait les trois axes binaires supprimés à la fois, on ne ait que conserver ou le centre, ou un plan de symétrie, ce qui erait à un mode d'hémiédrie du système binaire ou du système trique.

'y a donc en définitive que deux modes possibles de mériédrie.

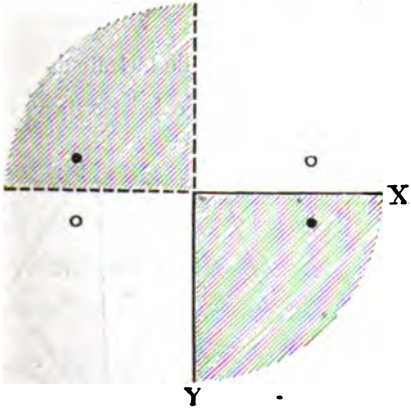


Fig. 203

premier mode est une *hémiédrie holoaxe* et donne deux formes con- es non superposables. La forme holoédrique a un pôle dans chacun

des 8 quadrants limités par les trois plans de symétrie; dans la for hémiédrique holoaxe, des quatre quadrants supérieurs à l'un des pla de symétrie, le plan horizontal par exemple, deux seulement, oppos par le sommet, contiennent des pôles; les deux seuls quadrants in rieurs qui en contiennent aussi sont, par rapport au plan horizontal, symétriques des deux quadrants supérieurs privés de pôles (fig. 20 Des deux formes conjuguées celle qui conserve le pôle supérieur sit à droite de l'axe des X lorsqu'on regarde en face la partie positive cet axe, est la forme conjuguée *droite*. L'autre est la forme conjugu *gauche*.

La forme la plus générale est un tétraèdre ou *sphénoèdre;* de là nom de sphénoïdique donné par les Allemands à ce mode d'h miédrie.

Ce mode ne s'applique pas aux formes dont les pôles sont situés da les plans de symétrie, telles que les plans p, g^1, h et les prismes e^m, a^m, g^m, h^m.

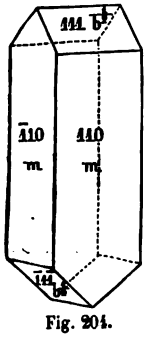


Fig. 204.

Assez rare dans les cristaux des substance inorganiques, cette hémiédrie est au contrair fréquente dans les cristaux d'origine organiqu

La figure 204 représente un cristal de sulfat de magnésie hydraté ($MgSO^4 + 7H^2O$) montrant l combinaison du prisme $m = \{110\}$ et de l'hémioc taèdre $\lambda \{111\}$.

La figure 205 représente un cristal de tartrate double d'antimoine e de potasse, montrant la combinaison de la base $p = \{001\}$, du prism

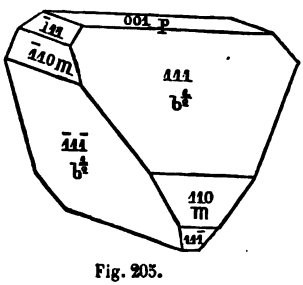


Fig. 205.

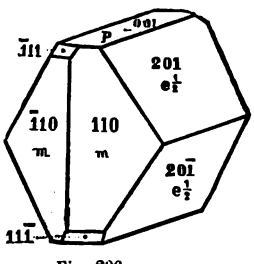


Fig. 206.

$m = \{110\}$ et de l'hémioctaèdre $\lambda \{111\}$. Le cristal est droit mais outre les faces bien développées de la forme droite $\lambda_d \{111\}$, il montr

es très-peu développées de l'hémioctaèdre gauche $\lambda_g \{111\}$; cet développement de deux hémioctaèdres conjugués suffit pour er l'hémiédrie; nous avons déjà signalé des faits analogues.

gure 206 représente un cristal d'asparagine montrant la base 001 }, le prisme $m = \{110\}$, le brachydome $\{201\}$ et l'hé-èdre gauche $\lambda_g \{115\}$.

econd mode d'hémiédrie ou *antihémiédrie*

$$L^2\ 0L'^2\ 0L''^2\ 0C\ 0P\ P'\ P''$$

ve tous les pôles supérieurs au plan P et supprime tous les pôles urs, ou réciproquement. Le cristal est donc terminé d'une re différente aux deux extrémités de l'axe binaire conservé.

st clair que les prismes dont les arêtes sont parallèles à l'axe vé ne sont point atteints par cette hémiédrie.

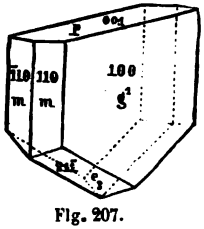


Fig. 207.

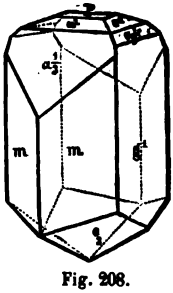


Fig. 208.

figures 207 et 208 représentent des cristaux de calamine (silicate nc hydraté) qui présentent ce genre d'hémiédrie.

ns la figure 207 le cristal terminé en haut par la base $p = \{001\}$ rminé en bas par l'octaèdre $e_3 = \{123\}$.

ns la figure 208 le cristal terminé en haut par un pointement plexe comprenant les macrodomes $a\frac{1}{3} = \{130\}$, $a^1 = \{101\}$, les hydomes $e\frac{1}{3} = \{130\}$, $e^1 = \{011\}$, et la base $p\ \{001\}$, est terminé as par l'octaèdre $e_3 = \{123\}$.

s deux extrémités, différemment modifiées, du même axe de symé- ne possèdent pas, en général, exactement les mêmes propriétés iques. C'est ce qui a lieu notamment pour la calamine.

Naumann appelle *hémimorphie* l'antihémiédrie du système terbinai
Il considère, sans raison valable, cette mériédrie comme fondamen
lement distincte de toutes les autres[1].

[1] M. Groth (*Physikalische Krystallographie*, p. 373) admet dans le système terbin
un autre mode d'hémiédrie qu'il appelle *monosymétrique*, et qui aurait en effe
même genre de symétrie que le système binaire ou *monosymétrique*. Le seul cri
qu'il cite comme possédant cette hémiédrie spéciale doit être considéré comme
cristal appartenant au système binaire, mais pour lequel la base du prisme prim
fait avec la hauteur un angle ayant la valeur particulière de 90°.

CHAPITRE XI

SYSTÈME BINAIRE OU CLINORHOMBIQUE

---

linoedrisches S. (Naumann). — Monoklinometrisches S. (Kopp). — Monoklinische. Schrauf). — Zwei und eingliedriges S. (Weiss). — S. prismatique oblique. ier). — S. monosymétrique (Groth). — Cinquième système cristallin. ou S. du me rhomboïdal oblique. (Dufrénoy). — S. du prisme oblique-symétrique (Haüy).

s modes possibles du réseau. — Le symbole de la symétrie drique est

$$L^2\ C\ \Pi.$$

réseau normal à l'axe binaire a pour maille plane un certain lélogramme $A'_0A'B_0B'_0$ (fig. 209).

es nœuds d'un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie coïncident

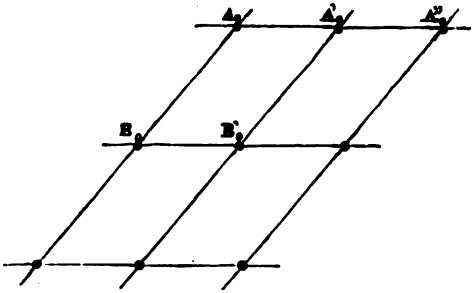


Fig. 209.

la projection des nœuds du plan contigu, la maille solide est un ne oblique à base rectangle, ayant un plan de symétrie normal à la . Représentons le réseau du plan de la base de ces prismes (fig. 210).

A la maille rectangulaire $A_0A'_1$, nous pouvons substituer la maille rh
bique $A_1A'_2, A''_1A'_0$, portant au centre un nœud A'_1. Nous pouvons c

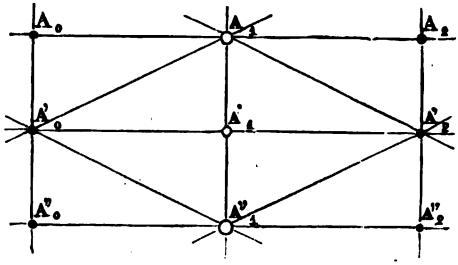


Fig. 210.

substituer à la maille solide précédente un prisme oblique à b
rhombe centrée. Ce prisme rhomboïdal oblique a un plan de sy
trie perpendiculaire à la base; ou, en d'autres termes, l'arête A
est normale sur la diagonale $A'A'_2$ du rhombe qui est parallèle à l'
binaire et inclinée sur l'autre diagonale.

On place ordinairement verticale l'arête latérale A_0B_0 du prisme
diagonale du rhombe située dans le plan de symétrie est alors la d
gonale inclinée et on la suppose toujours inclinée en haut d'arri
en avant. La diagonale parallèle à l'axe binaire est la diagon
horizontale.

Si les nœuds du plan contigu se projettent sur les milieux des cô
de la maille du plan perpendiculaire à l'axe, il est aisé de voir que
maille solide est un prisme rhomboïdal oblique ou un prisme oblic
à base rectangle centrée (fig. 211).

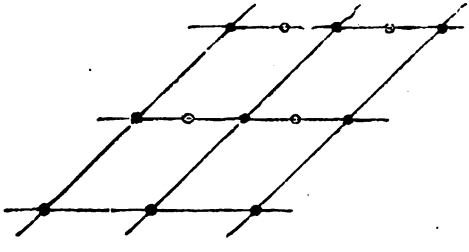


Fig. 211.

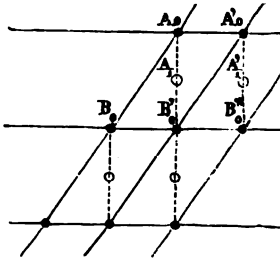


Fig. 212.

Il ne reste plus à examiner que les cas où les nœuds du plan conti
se projettent au centre de la maille du plan perpendiculaire à l'a
Mais comme on peut substituer à la première maille plane $A_0B'_0$ (fig. 2

llélogramme $A_0B'_0B''_0A'_0$ formé par un côté et une diagonale de , ce cas rentre dans le précédent.

a donc que deux modes d'arrangement du Réseau dans le sys-naire :

maille solide est un *prisme oblique à base rectangle* ou un *prisme à base rhombe centrée;* — mode *hexaédral rectangle* ou *octaédral que;*

maille solide est un *prisme oblique à base rhombe* ou un *prisme à base rectangle centrée;* — mode *hexaédral rhombique* ou *octaé-ctangle.*

ème d'axes coordonnés. — Le plus commode des systèmes d'axes nnés usités pour le système clinorhombique consiste à prendre xes les deux diagonales du rhombe de la base et l'arête verticale. end alors pour axe des x la diagonale inclinée (fig. 213 et 214),

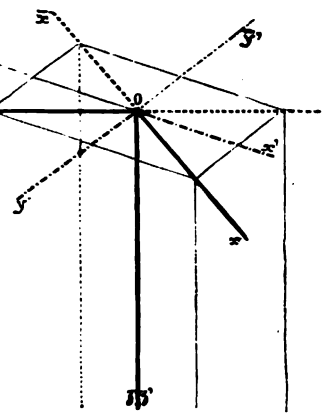


Fig. 213.

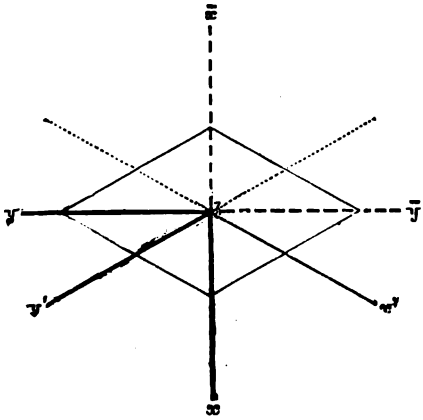


Fig. 214.

axe des y la diagonale horizontale parallèle à l'axe binaire, pour es z l'arête verticale du prisme ; le plan des zx est ainsi le plan de trie et dans ce plan de symétrie, l'angle des axes positifs des x et est l'angle obtus. On a alors $xy = 90°$, $zy = 90°$, $\xi = 90°$, $\zeta = 90°$ $= \eta$.

emploie aussi comme axes coordonnés l'arête verticale et les deux es de la base du prisme clinorhombique. C'est ce qui a lieu dans ode de notation de Lévy. On prend des parallèles aux deux arêtes base pour axes des x' et des y' et l'arête verticale pour axe des z'. position relative des deux systèmes d'axes étant la même que celle

des deux systèmes usités dans le système orthorhombique, à la d rence seule des inclinaisons des axes qui sont sans influence sur coordonnées numériques, les formules de transformation seront mêmes que pour le système terbinaire. Si p, q, r sont les caractér ques dans le premier système, et p', q', r' les caractéristiques dan système de Lévy, on a :

$$p' = p + q \qquad q' = -p + q \qquad r' = r$$

$$p = p' - q' \qquad q = p' + q' \qquad r = 2r'.$$

Quant aux paramètres des axes, si a, b, c sont ceux du premier s tème et a', c' ceux du système Levy, on a :

$$a' = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad c' = c.$$

On a de plus :

$$\cos x'y' = \cos [110]\,[\bar{1}10] = \frac{-a^2 + b^2}{a^2 + b^2} \text{ ou } \cos \frac{1}{2} x'y' = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$-\cos y'z' = \cos x'z' = \cos [110]\,[001] = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Calculs des angles des arêtes et des faces. — En prenant diagonale inclinée de la base rhombe pour axe des x, la diagon horizontale parallèle à l'axe binaire pour axe des y, et l'arête vertic pour axe des z, on tire des formules générales :

$$\cos RR' = \frac{gg'a^2 + hh'b^2 + kk'c^2 + (gk' + kg')\,ac \cos xz}{\sqrt{(g^2a^2 + h^2b^2 + k^2c^2 + 2gkac \cos xz)\,(g'^2a^2 + h'^2b^2 + k'c^2 + 2g'k'ac \cos x}}$$

et pour l'angle PP′ des normales à deux faces $(p\,qr)$ et $(p'q'r')$,

$$\cos PP' = \frac{pp'A^2 + qq'B^2 + rr'C^2 + (pr' + p'r)AC\cos XZ}{\sqrt{(p^2A^2 + q^2B^2 + r^2C^2 + 2p\,AC\cos XZ)\,(p'^2A^2 + q'^2B^2 + r'^2C^2 + 2p'r'AC\cos X}}$$

formule dans laquelle il faut se rappeller que A, B, C sont les paramètr et XZ l'angle des axes du réseau polaire, c'est-à dire que

$$A = \frac{M}{a} \qquad B = \frac{M}{b} \sin xz \qquad C = \frac{M}{c}$$

M étant une constante que l'on peut considérer comme arbitraire prendre égale à l'unité,

$$XZ = 180^\circ - \eta = 180^\circ - xz$$

ajoutant aux trois caracteristiques p, q, r, une quatrième s telle $= -(p+q)$, on peut se servir des formules de la page 35, et lculs deviennent parfois plus symétriques et plus rapides.

rmes simples.— Représentons la projection gnomonique des pôles e plan de symétrie perpendiculaire à l'axe des Y (fig. 215).

pôle (pqr), situé au-dessus du plan de symétrie entraîne, à cause xe binaire, l'existence d'un autre pôle $(\bar{p}q\bar{r})$, situé également au-s du plan de symétrie et dont on trouvera la position en pre-le point symétrique du premier par rapport au centre de pro-on. A ces deux pôles s'ajoutent leurs symétriques $(\bar{p}qr)$ et $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$ par

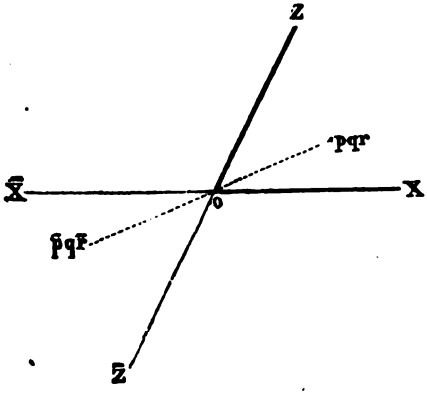


Fig. 215.

port au plan de symétrie. La coexistence de ce plan et de l'axe rainant l'existence du centre, nous avons épuisé la symétrie du sys-ne dont la forme holoédrique ne se compose que de quatre plans rallèles entre eux deux à deux et symétriques par rapport au plan de nétrie. Ces quatre plans donnent une forme ouverte qui est un prisme nt la section droite est un rhombe.

Lorsque $q=0$, les pôles sont situés dans le plan de symétrie et se luisent à deux ; la forme simple ne consiste plus qu'en deux plans rallèles entre eux et à l'axe binaire.

Lorsque $p=0$, et $r=0$, la forme simple $\{010\}$ se réduit à deux ns perpendiculaires à l'axe binaire.

On convient de représenter toujours une forme simple $\{pqr\}$ par le mbole de la face pour laquelle q et r sont positifs.

Formes composées.—On imagine un prisme orthorhombique (fig. 216)

semblable à celui qui forme la maille solide du réseau, et qui ser donné par la forme simple $\{110\}$, combinée avec la forme simp $\{001\}$. On convient de placer ce prisme de manière que les arê latérales soient verticales, la diagona horizontale de la base faisant face à l'o servateur, et la diagonale inclinée la base supérieure allant en s'aba sant d'arrière en avant. Il y a haut et en arrière un angle culmina qui peut venir coïncider avec l'angle tué en bas et en avant; on désigne p *a* ces angles culminants qui pointent, qu'on peut appeler angles culminan aigus. On désigne par la lettre *o* les deu angles situés aux autres extrémités la diagonale inclinée; ces angles, écras en quelque sorte, sont les angles culm nants obtus. Les quatre angles latérau peuvent être amenés en coïncidence les uns avec les autres ou so

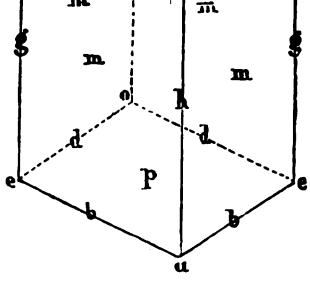


Fig. 216.

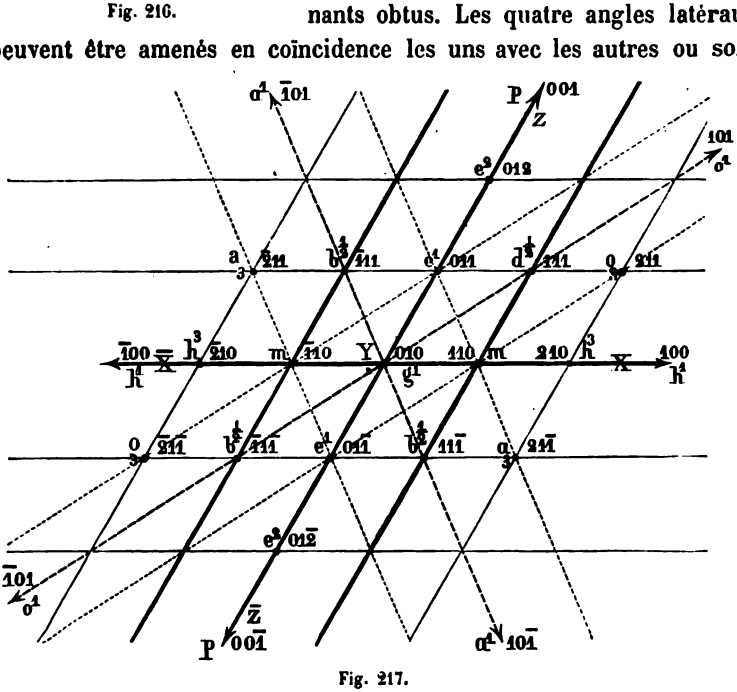


Fig. 217.

opposés par le centre; on les désigne par la lettre *e*. Des quatre arêt

verticales, les deux latérales sont nommées g; les deux arêtes situées dans le plan de symétrie sont appelées h. Les quatre arêtes des bases aboutissant aux angles a sont appelées b; elles sont identiques entre elles comme opposées par le centre ou comme pouvant être amenées en superposition; les quatre arêtes des bases aboutissant aux angles o sont appelées d. Les quatre faces latérales de la forme $\{110\}$ sont appelées m; les deux bases, p.

Afin de suivre plus aisément la position des divers plans cristallins sur le prisme primitif, nous tracerons la projection gnomonique des pôles sur le plan de symétrie (fig. 217 et 217 *bis*).

Pour dessiner cette projection, on mène deux droites, $X\bar{X}$, $Z\bar{Z}$, faisant entre elles un angle égal à XZ et qui représentent les axes X et Z du réseau polaire. Les parties positives des axes font entre elles un angle aigu. On prend pour unité le paramètre $B = \frac{M}{b} \sin xz$; la longueur du paramètre de l'axe des X est alors égale à $\frac{A}{B} = \frac{b}{a \sin xz}$ et celle du paramètre de l'axe des Z, $\frac{C}{B} = \frac{b}{c \sin xz}$.

Les pôles (110) et $(1\bar{1}0)$ sont ceux des faces m; les pôles (001) et $(00\bar{1})$, situés à l'infini sur l'axe des Z sont ceux des bases p.

Le pôle (010) représente un plan perpendiculaire à l'axe de symétrie placé tangentiellement sur l'arête g (fig. 218); les pôles (100) et $(\bar{1}00)$ placés à l'infini sur l'axe des X représentent des plans perpendiculaires au plan de symétrie, et placés tangentiellement sur les arêtes h (fig. 219).

Tous les pôles situés à l'infini sur les rangées partant du centre et notés $(p0r)$, représentent des plans perpendiculaires au plan de symétrie. Lorsque les deux caractéristiques p et r sont de même signe, la rangée sur laquelle sont situés les pôles tombe dans l'angle aigu des axes, et les plans correspondants viennent se placer sur les angles o (fig. 220). Lorsque les deux caractéristiques p et r sont de signe contraire, la rangée tombe dans l'angle obtus des axes, et les plans correspondants se placent sur les angles a (fig. 221).

Les faces, dont les pôles sont placés sur l'axe des X, sont parallèles aux arêtes verticales du prisme. Celles dont les pôles sont compris entre (110) et $(\bar{1}10)$ se placent sur les arêtes g, qu'elles remplacent par un biseau (fig. 222), elles sont notées $\{pq0\}$ avec $p < q$; celles dont

les pôles tombent en dehors sont placées sur les arêtes h (fig. 223), e
sont notées $\{pq0\}$ avec $p > q$.

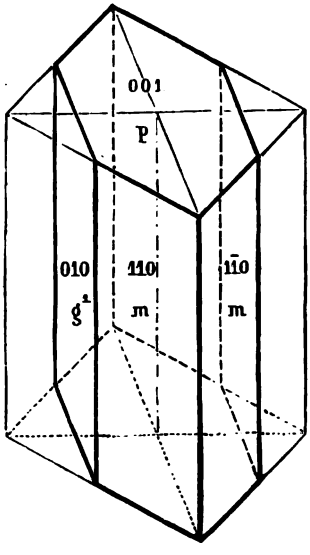


Fig. 218.

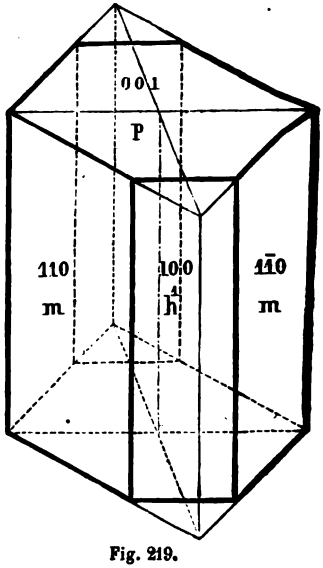


Fig. 219.

Si, par les pôles (110) et ($\bar{1}$10), on mène des parallèles à l'axe des

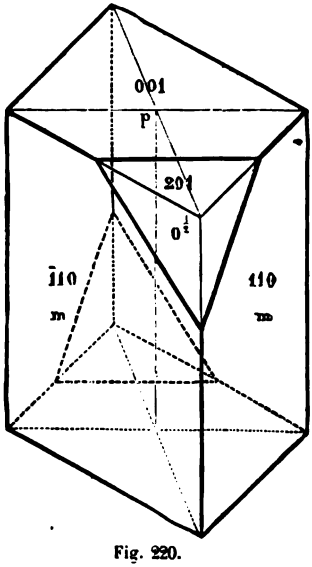


Fig. 220.

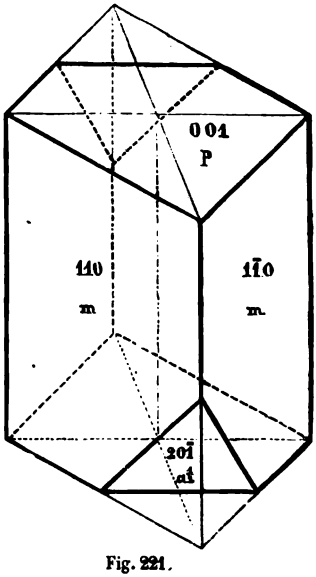


Fig. 221.

celles-ci représentent les zones dont les arêtes de la base sont

xes. Les formes dont les pôles viennent se placer sur ces parallèles ont toutes parallèles aux arêtes de la base. Celles de ces formes dont es pôles sont situés dans l'angle aigu des axes X et Z, ont les trois caractéristiques positives : elles sont placées sur des arêtes abou-

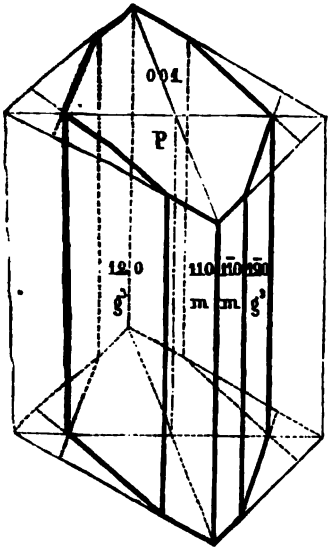


Fig. 222.

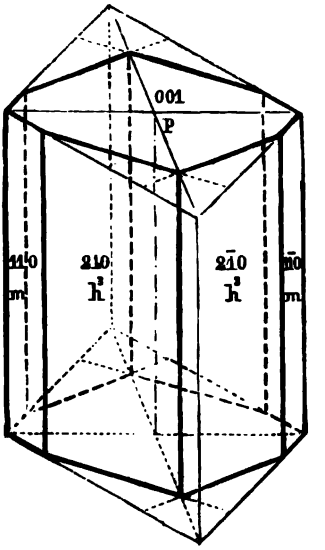


Fig. 223.

tissant aux angles *o*, c'est-à-dire sur des arêtes *d* (fig. 224). Celles dont les pôles sont situés dans l'angle obtus des axes, sont placées sur les arêtes *b* (fig. 225), elles sont notées $\{\bar{p}pr\}$. Sur chaque droite, les pôles de la forme *m* séparent, comme cela se voit aisément, les pôles des formes placées sur *b* de ceux des formes placées sur *d*.

Les formes dont les pôles sont situés dans l'intérieur des deux parallèles à Z, menées par (110) et ($\bar{1}10$), sont placées sur les angles *e*. Si $\{pqr\}$ est le symbole de la forme, on a en valeur absolue $p < q$. Celles dont les pôles sont situés dans les angles aigus des axes ont des faces qui inclinent vers les angles *o* c'est-à-dire dont les traces sur le plan de la base du prisme vont rencontrer la diagonale inclinée du côté de l'angle *o* (fig. 226), la caractéristique *p* est positive; celles dont les pôles sont situés dans les angles obtus des axes ont des faces qui inclinent vers les angles *a* (fig. 227), la caractéristique *p* est négative; celles dont les pôles sont situés sur l'axe des Z n'inclinent ni vers *o*,

ni vers a, et coupent la base suivant une parallèle à la dia nale inclinée (fig. 228), la caractéristique p est égale à 0.

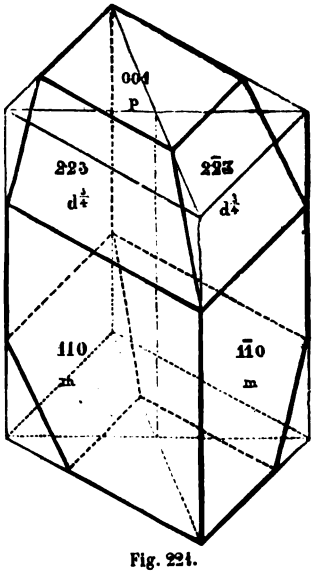


Fig. 224.

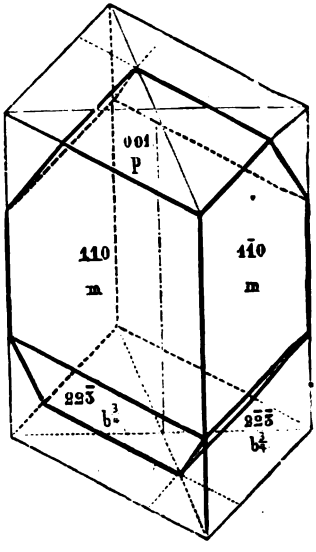


Fig. 225.

Enfin les pôles placés en dehors des deux parallèles à Z, menées

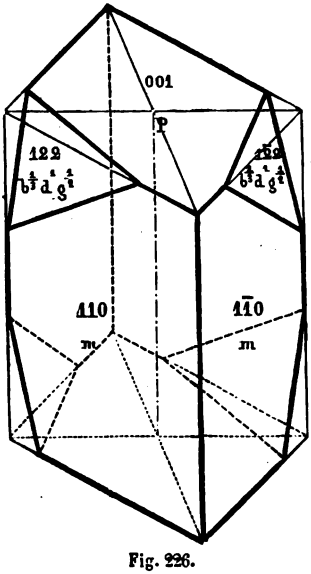


Fig. 226.

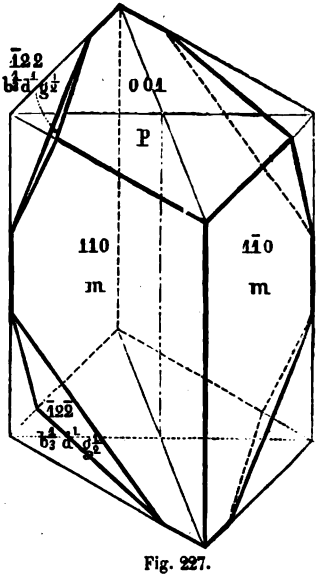


Fig. 227.

(110) et ($\bar{1}$10), c'est-à-dire des deux zones [$\bar{1}$10] et [110], appartienn

à des formes dont le symbole est $\{pqr\}$ avec $p > q$ en valeur absolue. Lorsque p est positif (q et r l'étant toujours par convention), les pôles

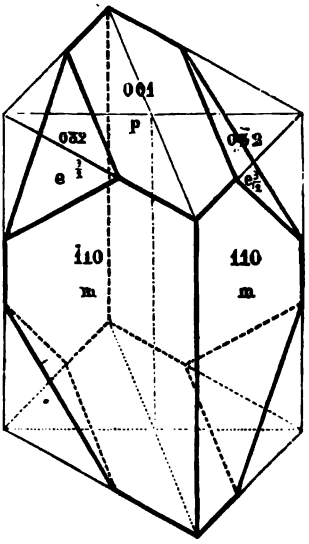


Fig. 228.

sont situés dans l'angle *aigu* des axes et la forme se compose de deux

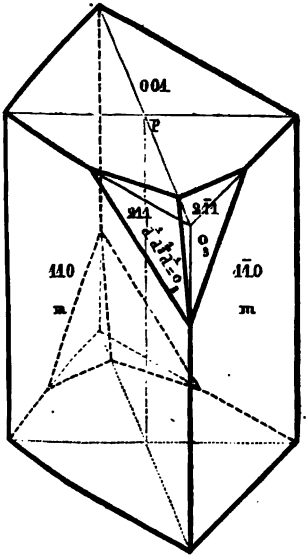


Fig. 229.

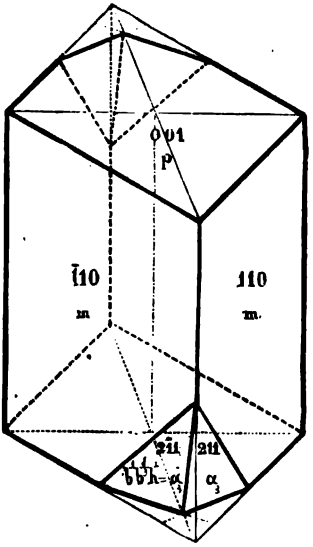


Fig. 230.

biseaux inclinés placés sur les angles *obtus* o (fig. 229). Lorsque p est

négatif, les pôles sont situés dans l'angle *obtus* des axes, et la fo
se compose de deux biseaux inclinés respectivement placés sur
angles *aigus a* (fig. 230).

La figure 231 représente un cristal d'orthose et la figure 232 un c

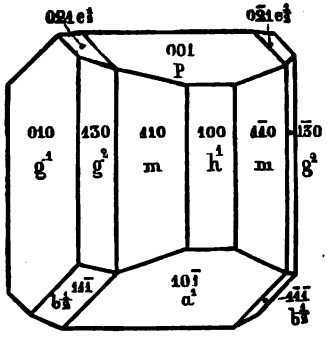


Fig. 231.

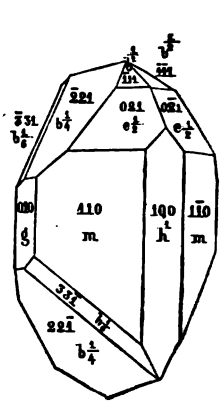


Fig. 232.

tal de pyroxène, qui montrent des combinaisons variées des form
simples du système clinorhombique.

Système de notation Lévy. — Comme dans les systèmes pré
dents, Lévy désigne la forme en indiquant comment elle est placée
le prisme primitif.

Si une forme est notée $\{pqr\}$ dans le sytème Miller, un plan de ce
forme, placé sur le prisme primitif, tronque un des angles ou
parallèle à une arête. S'il tronque, par exemple, un des angles *e*
intercepte sur les 3 arêtes *b*, *d*, *g* aboutissant à l'angle *e* des longue
numériques représentées par $\frac{1}{p'}, \frac{1}{q'}, \frac{1}{r'}$ et on aura :

$$p' = p + q \quad q' = -p + q \quad r' = r;$$

la forme sera représentée par le symbole

$$b^{\frac{1}{p+q}}\, d^{\frac{1}{-p+q}}\, g^{\frac{1}{r}}.$$

Le tableau suivant en récapitulant ce qui a été dit plus haut, mo
tre comment s'appliquent les symboles de Lévy dans tous les cas.

NOTATION MILLER (les signes étant explicites).	NOTATION LÉVY.	NOM DONNÉ A LA FORME PAR NAUMANN.
I. — Formes placées sur les angles latéraux $e.\ p < q$.		
Pôles situés dans la bande comprise entre les deux parallèles à $Z\bar{Z}$ menées par $(\bar{1}10)$ et (110).		
1° PLANS INCLINANT VERS L'ANGLE $o.\ p > 0$.		
Pôles situés dans les angles aigus XZ et $\bar{X}\bar{Z}$.		
$\{p\,q\,r\}$	$d^{\frac{1}{q-p}}\ b^{\frac{1}{p+q}}\ g^{\frac{1}{r}}$	Hémiclinopyramide antérieure.
2° PLANS INCLINANT VERS L'ANGLE $a.\ p < 0$.		
Pôles situés dans les angles obtus $\bar{X}Z$ et $X\bar{Z}$.		
$\{\bar{p}\,q\,r\}$	$b^{\frac{1}{q-p}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ g^{\frac{1}{r}}$	Hémiclinopyramide postérieure.
3° PLANS PARALLÈLES A LA DIAGONALE INCLINÉE $p = 0$.		
Pôles situés sur la ligne $Z\bar{Z}$.		
$\{0\,q\,r\}$	$e^{\frac{r}{q}}$	Hémiclinodome.
II. — Formes placées sur les angles a **ou** $o.\ p > q$.		
A. — SUR LES ANGLES $o.\ p > 0$.		
Pôles situés dans les angles aigus XZ et $\bar{X}\bar{Z}$.		
1° FORME LA PLUS GÉNÉRALE.		
$\{p\,q\,r\}$	$d^{\frac{1}{p-q}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{r}}$	Hémiorthopyramide antérieure.
2° $p + q = r$.		
Pôles situés dans l'angle XZ, sur la droite menée par $(\bar{1}10)$ et (011) c'est-à-dire sur la zone $[\bar{1}\bar{1}1]$.		
$\{p, q, p+q\}$	$d^{\frac{1}{p-q}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{p+q}} = o^{\frac{p-q}{p+q}}$	
3° $p - q = r$.		
Pôles situés dans l'angle XZ, sur la droite menée par (110) et $(01\bar{1})$, c'est-à-dire sur la zone $[1\bar{1}\bar{1}]$.		
$\{p, q, p-q\}$	$d^{\frac{1}{p-q}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{p-q}} = o^{\frac{p+q}{p-q}}$	

NOTATION MILLER (les signes étant explicites).	NOTATION LÉVY.	NOM DONNÉ A LA FORME PAR NAUMANN.
4° FORMES PARALLÈLES A LA DIAGONALE HORIZONTALE DE LA BASE $q = 0$. Pôles situés à l'infini.		
$\{p\,0\,r\}$	$o^{\frac{r}{p}}$	Hémiorthodome antérieu
B. — SUR LES ANGLES $a.p < 0$. Pôles situés dans les angles obtus $\bar{X}Z$ et $X\bar{Z}$.		
1° FORME LA PLUS GÉNÉRALE.		
$\{\bar{p}\,q\,r\}$	$b^{\frac{1}{p-q}}\,b^{\frac{1}{p+q}}\,h^{\frac{1}{r}}$	Hémiorthopyramide post rieure.
2° $p + q = r$. Pôles situés dans l'angle $Z\bar{X}$, sur la droite menée par (011) et (110), c'est-à-dire sur la zone $[1\bar{1}1]$.		
$\{\bar{p}, q, p+q\}$	$b^{\frac{1}{p-q}}\,b^{\frac{1}{p+q}}\,h^{\frac{1}{p+q}} = a_{\frac{p-q}{p+q}}$	
3° $p - q = r$. Pôles situés sur la droite menée par $(01\bar{1})$ et $(\bar{1}10)$, c'est-à-dire sur la zone [111].		
$\{\bar{p}, q, p-q\}$	$b^{\frac{1}{p-q}}\,b^{\frac{1}{p+q}}\,h^{\frac{1}{p-q}} = a_{\frac{p+q}{p-q}}$	
4° FORMES PARALLÈLES A LA DIAGONALE HORIZONTALE $q = 0$. Pôles situés à l'infini.		
$\{\bar{p}\,0\,r\}$	$a^{\frac{r}{p}}$	Hémiorthodome postérie
III. — Formes placées sur les arêtes de la base $p = q$. Pôles situés sur les parallèles à $Z\bar{Z}$ menées par (110) et $(\bar{1}10)$.		
1° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES d. Pôles situés dans les angles aigus XZ et $\bar{X}\bar{Z}$.		
$\{p\,p\,r\}$	$d^{\frac{r}{2p}}$	Protohémipyramide ant rieure.
$\{111\}$	$d^{\frac{1}{2}}$	Hémipyramide fondame tale antérieure.

NOTATION MILLER (les signes étant explicites).	NOTATION LÉVY.	NOM DONNÉ A LA FORME PAR NAUMANN.
	2° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES b. Pôles situés dans les angles obtus $\bar{X}Z$ et $X\bar{Z}$.	
$\{\bar{p}\,p\,r\}$	$b^{\frac{r}{\bar{2}p}}$	Protohémipyramide postérieure.
$\{\bar{1}11\}$	$b^{\frac{1}{\bar{2}}}$	Hémipyramide fondamentale postérieure.
	IV. — Formes placées sur les arêtes verticales g ou h. $r = 0$. Pôles situés sur $X\bar{X}$.	
	1° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES g. $p < q$. Pôles situés sur YX, entre (010) et (110).	
$\{p\,q\,0\}$	$g^{\frac{p+q}{q-p}}$	Clinoprisme.
$\{010\}$	g^1	Clinopinacoïde.
$\{110\}$	m	Protoprisme.
	2° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES h. $p > q$. Pôles situés sur YX, entre (110) et (100).	
$\{p\,q\,0\}$	$h^{\frac{p+q}{p-q}}$	Orthoprisme.
$\{100\}$	h^1	Orthopinacoïde.

Formes hémiédriques. — La symétrie des formes holoédriques étant représentée par le symbole

$$A^2\ C\ \Pi,$$

si l'on supprime le centre, la suppression du plan de symétrie s'ensuivra, et le symbole de la symétrie de la forme hémiédrique sera

$$A^2\ 0C\ 0\Pi.$$

Les deux pôles supérieurs au plan de symétrie seront conservés, tandis que les deux pôles inférieurs sont supprimés. Cette hémiédrie ho-

loaxe donne deux formes conjuguées non superposables; on ap
forme droite celle dans laquelle les faces conservées à la partie
rieure du cristal sont à droite de l'observateur regardant le cristal
la position qui lui est ordinairement assignée.

Les figures 233 et 234 représentent des cristaux de sucre gauch

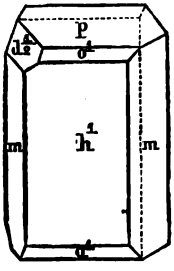


Fig. 233.

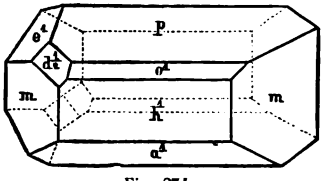


Fig. 234.

Le second et dernier mode d'hémiédrie s'obtient en supprimant
binaire, et conservant le plan de symétrie, ce qui supprime le ce
Le symbole de la symétrie devient

$$0A^2 \quad 0C \quad H.$$

Des quatre pôles de la forme holoédrique on ne conserve qu
deux pôles symétriques par rapport au plan de symétrie. Les
formes conjuguées sont superposables. On ne connaît jusqu'ici a
exemple de ce mode d'antihémiédrie.

CHAPITRE XII

SYSTÈME ASYMÉTRIQUE OU TRICLINIQUE

S. **diclinoédrique** et **triclinoédrique**[1] (Naumann). — Eingliedriges System (Weiss). — S. **prismatique oblique non symétrique** (Miller). — Système du prisme oblique dissymétrique ou sixième système cristallin (Dufrénoy).

La maille du réseau de ce système est un parallélipipède quelconque. Il n'y a évidemment lieu de distinguer dans la constitution de ce réseau aucun mode particulier.

Système d'axes coordonnés. — Il n'y a rien dans la symétrie du réseau qui permette de faire un choix parmi toutes les formes primitives possibles. Ce choix n'est dirigé que par des considérations particulières sur lesquelles nous reviendrons plus tard.

Lorsqu'on emploie le mode de notation Miller, on prend ordinairement pour axes coordonnés l'arête verticale et les deux diagonales de la base du parallélipipède pris comme forme primitive. Dans toutes les figures, on place les cristaux de manière que la hauteur du prisme primitif soit verticale, que l'angle obtus du prisme soit en avant et que la courte diagonale de la base supérieure incline vers l'observateur. Dans cette position du prisme, les parties positives des axes limitent l'angle dièdre antérieur supérieur gauche. La projection gnomonique est ordinairement faite sur un plan parallèle au plan XZ, la partie po-

1. Un grand nombre d'auteurs allemands divisent, avec Naumann, ce système en deux autres, qu'ils appellent diclinoédrique et triclinoédrique. Le premier serait caractérisé par la condition que l'un des angles des axes, celui des xy, par exemple, serait seul égal à 90°, les deux autres étant quelconques. Cette condition ne donnant au réseau aucun élément de symétrie, et les systèmes cristallins ne pouvant être caractérisés que par des modes de symétrie différents, il est évident que le système diclinoédrique de Naumann doit être rejeté. Les cristaux, très-rares d'ailleurs, remplissant la condition énoncée, ne sont que des cristaux asymétriques dont les réseaux possèdent une propriété géométrique intéressante.

sitive des Y étant au-dessus du plan de projection. Il résulte alors conventions précédentes que sur cette projection l'angle aigu X à gauche et en haut.

Dans le système Lévy, on prend pour axes coordonnés les arête prisme primitif; si l'axe des x' positif est la diagonale du paral gramme construit sur $+a$ et $+b$, et l'axe des y' positif celle du p lélogramme construit sur $-a$ et $+b$, les formules de transform sont comme dans les systèmes précédents

$$p' = p + q \quad q' = -p + q \quad r' = r$$

$$p = p' - q' \quad q = p' + q' \quad r' = 2r$$

$$a' = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos xy}$$

$$b' = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos xy}$$

$$c' = c$$

$$\cos \mathrm{H}' = \cos x'z' = \cos [110]\,[001] = \frac{a \cos xz + b \cos yz}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos xy}}$$

$$\cos \mathrm{Z}' = \cos x'y' = \cos [110]\,[\bar{1}10] = \frac{-a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos xy}\,\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,c}}$$

$$\cos \Xi' = \cos y'z' = \cos [\bar{1}10]\,[001] = \frac{-a \cos xz + b \cos xy}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos xy}}$$

Calculs des angles des arêtes et des faces. — Les formules servent à ces calculs sont les formules générales que nous avons nées et qui ne sont, dans ce cas, susceptibles d'aucune simp cation.

Formes simples holoédriques et hémiédriques. — La fo simple holoédrique la plus générale ne se compose plus que de plans parallèles opposés par le centre. Si l'un est noté (pqr), l'a est noté $(\bar{p}\bar{q}\bar{r})$.

Nous conviendrons de désigner une forme simple par les car ristiques de celui des deux plans qui la composent pour lequel q positif[1].

1. Cette convention n'est pas universellement adoptée. Nous l'adoptons ici qu'elle permet de suivre plus commodément la discussion des formes sur la proje gnomonique. Il est d'ailleurs très-aisé de passer de la convention que nous adop à l'autre, puisqu'il suffit de changer les signes des trois caractéristiques.

Il ne pourrait se produire une hémiédrie que par la suppression du centre, qui entraînerait celle de l'un des deux plans de la forme holoédrique. Les deux formes conjuguées hémiédriques ne seraient pas superposables. On ne connaît aucun cristal présentant ce mode d'hémiédrie.

Projection gnomonique. — Pour construire la projection gnomonique (fig. 235), on mène deux lignes YZ et YX faisant entre elles l'angle

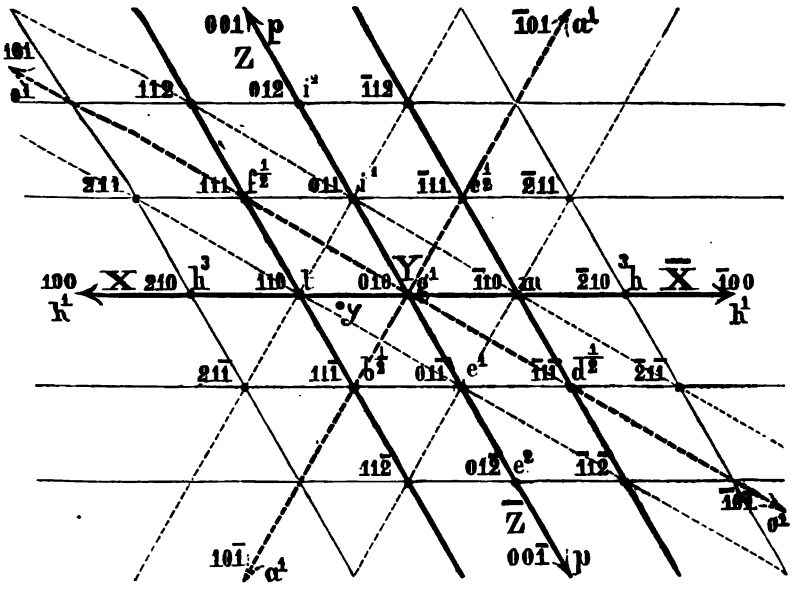


Fig. 235.

$XZ = \pi - \eta$; elles représentent les parties positives des axes X et Z. Si l'on prend pour unité le paramètre $B = \frac{M}{b} \sin xz$, la longueur du paramètre des X sera $\frac{A}{B} = \frac{b}{a} \cdot \frac{\sin yz}{\sin xz}$, et celle du paramètre des Z, $\frac{C}{B} = \frac{b}{c} \cdot \frac{\sin xy}{\sin xz}$. Le paramètre $B = 1$, porté sur l'axe des Y, au-dessous du plan de projection, détermine le point de vue dont la projection y sur le plan de la figure est le centre de projection[1]. Le point y se place

1. Ce point y est le pôle du grand cercle ZX ou, dans le triangle sphérique xyz, le sommet opposé à yx.

aisément en calculant ses projections orthogonales sur YX et YZ. distance à Y de la projection orthogonale de y sur YX est en effet ég à la projection de B sur YX, c'est-à-dire à $-\cos YX = \cos \zeta$. La tance à Y de la projection orthogonale de y sur Z est de même ég à $-\cos YZ = \cos \xi$.

Pour rapporter les angles sur la projection, il est plus commode prendre pour unité la distance orthogonale Oy du point de vue au p de projection, laquelle est égale à

$$B \sin ZY \sin Z = B \sin \xi \sin xy = \frac{M}{b} \sin xz \sin xy \sin \xi = \frac{M}{b} \sin xy \sin yz \sin \eta$$

Il faut alors prendre

$$\text{Paramètre des X} = \frac{b}{a} \frac{1}{\sin xy \sin \eta}$$

$$\text{Paramètre des Z} = \frac{b}{c} \frac{1}{\sin xy \sin \xi}$$

La projection de Yy sur YX devient égale à $\frac{\cos \zeta}{\sin \xi \sin xy} = \text{cotg}\, \zeta\, \text{coséc}$

et celle de Yy sur YZ, à $\frac{\cos \xi}{\sin \xi \sin xy} = \text{cotg}\, \xi\, \text{coséc}\, xy$.

Formes composées et système de notations de Lévy. — Plaç toutes les formes simples sur le prisme primitif. Pour rendre p clair notre exposé, remarquons avec Lévy que, dans le prisme primi il n'y a d'éléments identiques que ceux qui sont opposés par le cent

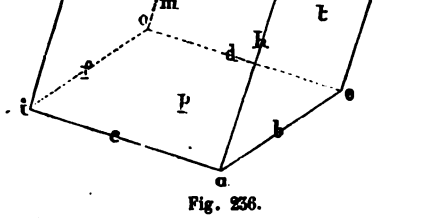


Fig. 236.

Il y a donc, à la partie supérieure du prisme, quatre angles différe (fig. 236). On appelle e l'angle latéral placé à gauche dans la posit

habituelle du prisme, *i* l'angle latéral de droite, *a* l'angle postérieur et *o* l'angle antérieur.

Les arêtes de la base supérieure sont aussi de quatre espèces différentes; on appelle *b* l'arête postérieure gauche, *c* l'arête postérieure droite, *d* l'arête antérieure gauche, *f* l'arête postérieure droite.

Les arêtes verticales sont de deux espèces seulement; on appelle *g* les arêtes latérales, *h* les deux autres.

On appelle enfin *p* la base du prisme, *m* la face verticale antérieure gauche, *t* la face verticale antérieure droite.

Ceci posé, le tableau suivant fera comprendre comment les diverses formes simples viennent se placer sur la forme primitive, et par quelles notations ces formes simples sont représentées dans le système Lévy.

NOTATIONS MILLER (les signes sont explicites).	NOTATIONS LÉVY (p, q, r sont considérés comme des quantités positives).	POSITION DE LA FORME SUR LE PRISME PRIMITIF.	SITUATION SUR LA PROJECTION GNOMON DES PÔLES DE LA FORME
I. — Formes placées sur les angles latéraux *e* ou *i*. $p < q$			
Les pôles sont situés entre les parallèles à $Z\bar{Z}$ menées par (110) et ($\bar{1}10$).			
1° FORMES PLACÉES SUR LES ANGLES *i*. $r > 0$.			
Pôles situés *au-dessous* de la ligne $X\bar{X}$.			
$\{p\,q\,r\}$	$f^{\frac{1}{-p+q}}\,c^{\frac{1}{p+q}}\,g^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers *o*.	Entre YZ et la parallèle menée par (110)
$\{\bar{p}\,q\,r\}$	$c^{\frac{1}{-p+q}}\,f^{\frac{1}{p+q}}\,g^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers *a*.	Entre YZ et la parallèle menée par ($\bar{1}10$)
$\{0\,q\,r\}$	$i^{\frac{r}{q}}$	Parallèle à la diagonale *ao*	Sur YZ.
2° FORMES PLACÉES SUR L'ANGLE *e*. $r < 0$.			
Pôles situés *au-dessus* de la ligne $X\bar{X}$.			
$\{\bar{p}\,q\,\bar{r}\}$	$d^{\frac{1}{-p+q}}\,b^{\frac{1}{p+q}}\,g^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers l'angle *o*.	Entre $Y\bar{Z}$ et la parallèle menée par ($\bar{1}10$)
$\{p\,q\,\bar{r}\}$	$b^{\frac{1}{-p+q}}\,d^{\frac{1}{p+q}}\,g^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers *a*.	Entre $Y\bar{Z}$ et la parallèle menée par (110)
$\{0\,q\,\bar{r}\}$	$e^{\frac{r}{q}}$	Parallèle à la diagonale *ao*.	Sur $Y\bar{Z}$.
II. — Formes placées sur les angles *o* ou *a*. $p > q$.			
Pôles situés en dehors de la bande limitée par les parallèles à $\bar{Z}Z$ menées par (110) et ($\bar{1}1$			
1° FORMES PLACÉES SUR LES ANGLES *o*. — p ET r DE MÊME SIGNE.			
Pôles situés dans les angles aigus XZ ou $\bar{X}\bar{Z}$.			
$\{p\,q\,r\}$	$f^{\frac{1}{p-q}}\,d^{\frac{1}{p+q}}\,h^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers *i*.	Dans l'angle aigu XZ.
$\{\bar{p}\,q\,\bar{r}\}$	$d^{\frac{1}{p-q}}\,f^{\frac{1}{p+q}}\,h^{\frac{1}{r}}$	Inclinant vers *e*.	Dans l'angle aigu $\bar{X}\bar{Z}$.
$\{p\,0\,r\}$	$o^{\frac{r}{p}}$	Parallèle à la diagonale *ei*.	A l'infini, dans l'un des angles aigus XZ ou $\bar{X}\bar{Z}$.

NOTATIONS MILLER (les signes sont explicites).	NOTATIONS LÉVY (p, q, r sont considérés comme des quantités positives).	POSITION DE LA FORME SUR LE PRISME PRIMITIF.	SITUATION SUR LA PROJECTION GNOMONIQUE DES POLES DE LA FORME.
2° FORMES PLACÉES SUR LES ANGLES a. p ET r DE SIGNE CONTRAIRE. Pôles situés dans les angles obtus $\bar{X}Z$ ou $X\bar{Z}$.			
$\{p q \bar{r}\}$	$b^{\frac{1}{p-q}} c^{\frac{1}{p+q}} h^{\frac{1}{\bar{r}}}$	Inclinant vers e.	Dans l'angle obtus $X\bar{Z}$.
$\{\bar{p} q r\}$	$c^{\frac{1}{p-q}} b^{\frac{1}{p+q}} h^{\frac{1}{\bar{r}}}$	Inclinant vers i.	Dans l'angle obtus $\bar{X}Z$.
$\{\bar{p} 0 r\}$	$a^{\frac{r}{\bar{p}}}$	Parallèle à la diagonale ei.	A l'infini dans les angles obtus $\bar{X}Z$ ou $X\bar{Z}$.
III. — Formes placées sur les arêtes de la base $p = q$. Pôles situés sur les parallèles à $Z\bar{Z}$ menées par (110) et ($\bar{1}10$).			
$\{\bar{p} p \bar{r}\}$	$d^{\frac{r}{2p}}$	Sur les arêtes d.	Sur la parallèle à $Y\bar{Z}$ menée par ($\bar{1}10$).
$\{p p \bar{r}\}$	$b^{\frac{r}{2p}}$	Sur les arêtes b.	Sur la parallèle à $Y\bar{Z}$ menée par (110).
$\{\bar{p} p r\}$	$c^{\frac{r}{2p}}$	Sur les arêtes c.	Sur la parallèle à YZ menée par ($\bar{1}10$).
$\{p p r\}$	$f^{\frac{r}{2p}}$	Sur les arêtes f.	Sur la parallèle à YZ menée par (110).
IV. — Formes placées sur les arêtes verticales. $r = 0$. Pôles situés sur $X\bar{X}$.			
1° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES g. $p < q$. Pôles situés entre (110) et ($\bar{1}10$).			
$\{p q 0\}$	$\frac{p+q}{-p+q} g$	Le plan qui rencontre en avant la diagonale ao est à *gauche* de l'observateur qui regarde l'arête h antérieure (fig. 237).	Entre (010) et ($\bar{1}10$).
$\{p q 0\}$	$g^{\frac{p+q}{-p+q}}$	Le plan qui rencontre en avant la diagonale ao est à *droite* de l'observateur (fig. 238).	Entre (010) et (110).
2° FORMES PLACÉES SUR LES ARÊTES h. $p > q$. Pôles situés en dehors de l'espace compris entre ($\bar{1}10$) et (110).			
$\{\bar{p} q 0\}$	$\frac{p+q}{p-q} h$	Le plan antérieur rencontre la diagonale ei à *gauche* de l'observateur (fig. 239).	Entre ($\bar{1}10$) et ($\bar{1}00$).
$\{p q 0\}$	$h^{\frac{p+q}{p-q}}$	Le plan antérieur rencontre la diagonale ei à *droite* de l'observateur (fig. 240).	Entre (110) et (100).

Il eut été fastidieux et peu utile de montrer par des figures comme les plans des différentes formes simples viennent se placer sur le pris primitif. On a seulement indiqué, dans les figures ci-contre, quelle la position relative des formes notées par Lévy g^m et ^mg, h^m et ^mh.

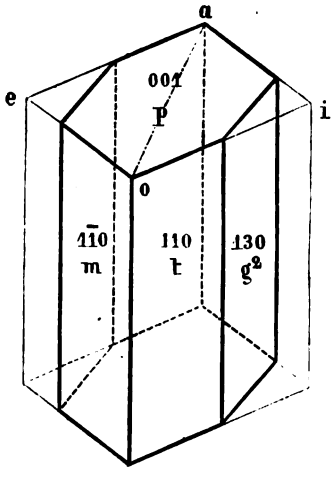


Fig. 237.

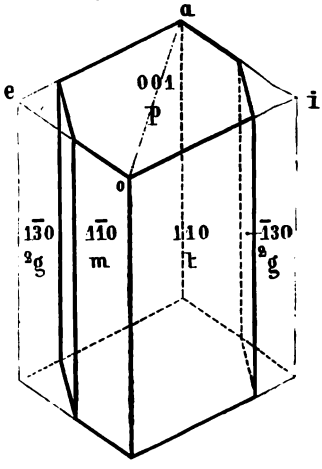


Fig. 238.

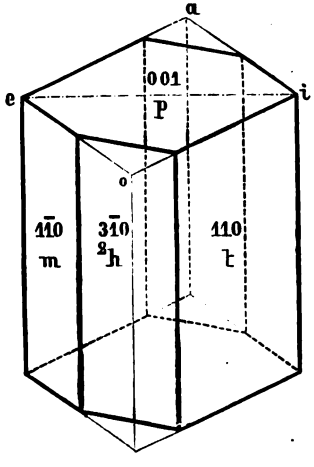


Fig. 239.

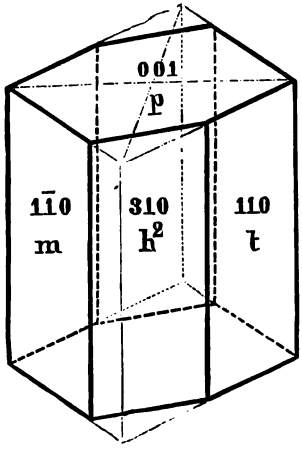


Fig. 240.

CHAPITRE XIII

DES DIVERS MODES DE NOTATIONS SYMBOLIQUES

En décrivant les formes propres à chacun des systèmes cristallins, on a fait connaître deux systèmes de notations symboliques : l'un, dû à Grassmann et Miller, donne, par rapport aux axes du réseau polaire, les coordonnées numériques du pôle de chaque face; le second, dû à Haüy, perfectionné successivement par Lévy et par M. Des Cloizeaux, se propose surtout d'indiquer quelle est la position de la forme simple sur la forme primitive.

Ces deux systèmes de symboles ont chacun leurs avantages et leurs inconvénients. Le système de Miller, plus géométrique, est nécessaire pour distinguer, par un symbole spécial, chacune des faces dont se compose la forme simple. Les caractéristiques usitées dans ces symboles se prêtent d'ailleurs d'une façon très-commode à tous les calculs. Aussi, quel que soit le système employé, il est commode de transformer les symboles en symboles de Miller lorsqu'on veut calculer les incidences mutuelles des faces. En revanche, ce système de notation a l'inconvénient grave de désigner bien plutôt une face que la forme simple. On convient, il est vrai, de prendre le symbole d'une face déterminée pour en faire celui de la forme ; mais d'une part les divers cristallographes ne s'astreignent pas toujours à cette règle, ce qui produit la confusion; de l'autre il arrive, pour certains systèmes cristallins comme les systèmes ternaire, binaire et asymétrique, que les caractéristiques qui entrent dans le symbole de la forme sont compliquées de signes algébriques. Or ces signes ont le grave défaut de ne pas présenter à l'esprit une image précise, et d'exiger,

pour être bien compris, un certain effort d'attention qui n'éloigne p toujours l'erreur.

Les symboles d'Haüy et de Lévy ont au contraire ce grand avanta de désigner nettement et sans ambiguïté, au moyen de conventions facil à retenir et faisant en quelque sorte image, non pas une face isolé mais l'ensemble des faces qui, en vertu de la symétrie du systèm composent la forme simple [1].

Les symboles de Miller ont donc leur utilité propre, et aucun mo de notation n'en dispense absolument. Les symboles d'Haüy et de Lé les complètent heureusement soit au point de vue de l'image fournie l'esprit, soit au point de vue de la commodité du langage et de désignation des faces sur les figures cristallographiques. Ces deu systèmes de symboles suffisent à toutes les exigences de la science.

Malheureusement ils ne sont pas les seuls qu'ait inventés l'imagina tion trop fertile des cristallographes. En attendant le moment, sar doute fort éloigné, où l'amour-propre national, l'habitude, etc., per mettront à la science un langage uniforme, il est nécessaire de con naître les principaux modes de notations usités par les divers auteurs Nous nous bornerons à exposer le mode imaginé par Weiss, plus o moins modifié par G. Rose, Rammelsberg, etc., et celui de Naumann

MODE DE NOTATION DE WEISS, ROSE, ETC.

Dans ce mode, le plus ancien après celui d'Haüy, on se propose d'in diquer les longueurs interceptées par un plan de la forme non plus sur les arêtes du prisme primitif, mais sur les axes coordonnés menés par le centre du prisme.

Si x, y, z, sont les axes coordonnés dont a, b, c, sont les paramètres respectifs, une forme simple dont une face intercepte sur les axes des longueurs numériques g, h, k (qui sont les inverses des caractéristiques de Miller), est représentée par le symbole $ga : hb : kc$.

1. Il est regrettable que l'habitude se soit introduite d'employer, comme formes primitives dans les systèmes terbinaire et binaire, les prismes rhomboïdaux, choisissant ainsi, comme axes coordonnés, d'autres droites que les axes de symétrie. Les formules qui servent à passer du système Miller au système de Lévy en sont devenues plus compliquées, et sans qu'on ait aucun avantage sérieux. Dans le système terbinaire, par exemple, on pourrait prendre pour forme primitive le prisme rectangulaire dont les arêtes sont parallèles aux axes de symétrie; g^1 et h^1 seraient notés m et l, m serait noté h^1, etc. Haüy a d'ailleurs employé le prisme rectangulaire comme forme primitive presque aussi souvent que le prisme rhomboïdal.

rsqu'il est nécessaire de distinguer les formes dont les faces ent couper soit la direction positive, soit la direction négative axe, on accentue le paramètre de l'axe qui est rencontré dans sa e négative. C'est ainsi que dans le système binaire la forme $= \{\bar{4}0\bar{3}\}$ est désignée par le symbole $3a' : \infty b : 4c$, tandis que la e $o^3 = \{403\}$ est désignée par le symbole $3a : \infty b : 4c$.

ns les systèmes terbinaire, binaire et asymétrique, on appelle a horizontal qui est dirigé vers l'observateur dans la position qu'on e d'ordinaire aux cristaux dans les figures, et que nous avons dé- ; b est l'autre axe horizontal, c l'axe vertical. C'est la convention nous avons faite nous-même pour le système binaire. Pour le sys- e terbinaire, nous nous sommes conformé, quoique avec regret, à ısage fâcheux contre lequel on commence avec raison à réagir, en elant au contraire a le plus grand paramètre et b le plus petit.

ans les systèmes ternaire et hexagonal Weiss emploie les trois axes ires horizontaux et l'axe sénaire vertical. Les quatre longueurs nériques interceptées sur les axes sont divisées par la plus grande longueurs horizontales ; celle-ci devient alors égale à 1, et les res plus petites que 1. C'est ainsi que le didodécaèdre $\{32\bar{5}\bar{5}\}$ est é par Weiss $a : \frac{2}{5}a : \frac{3}{5}a : \frac{1}{2}c$.

Dans le système ternaire, il faut distinguer les deux formes birhom- édriques, directe et inverse, qui, dans ce mode de notations, au- ent le même symbole. On y arrive en mettant le symbole de forme inverse entre deux parenthèses, et ajoutant un accent au- ssus de celle de droite. C'est ainsi que le scalénoèdre direct $\{43\bar{7}2\}$ noté $a : \frac{3}{7}a : \frac{3}{4}a : \frac{3}{2}c$, tandis que le scalénoèdre inverse $\{3\bar{4}\bar{7}2\}$ est té $\left(a : \frac{3}{7}a : \frac{3}{4}a : \frac{3}{2}c\right)'$.

Ces symboles étant très-longs à écrire, on les remplace autant qu'on peut, soit dans le langage, soit dans les figures cristallographiques, r des signes plus simples[1].

On désigne par a, b, c, les trois plans coordonnés le plan a, étant

1. Tous les cristallographes de l'école de Weiss ne suivent pas les mêmes conventions ce qui regarde ces signes abrégés. Nous exposons le système adopté par G. Rose *Elem. der Kryst.*, 3e Aufl.)

celui qui passe par les axes b et c, etc. Ainsi, dans le système
naire, le plan h^1 est désigné par a, le plan g^1 par b, le plan p par

Les formes parallèles aux axes sont désignées par les lettres d,
La lettre d et, lorsqu'elle est nécessaire, la lettre f, se rapportent
formes parallèles aux axes horizontaux ; la lettre g se rapporte aux
mes parallèles à l'axe vertical. On met à côté de la lettre d, f ou
sous forme de fraction, le rapport des longueurs numériques inter
tées sur les deux axes auxquels la face n'est pas parallèle.

Ainsi, dans le système cubique, l'hexatétraèdre $b^{\frac{3}{2}} = \{ 3$
$= a : \frac{2}{3} a : \infty a$ est noté $\frac{2}{3} d$. Dans le système terbinaire, on a :

$$a^{\frac{3}{2}} = \{023\} = a : \infty b : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} d$$

$$e^{\frac{3}{2}} = \{203\} = \infty a : b : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} f$$

$$g^5 = \{320\} = a : \frac{2}{3} b : \infty c = \frac{2}{3} g$$

$$h^5 = \{230\} = a : \frac{3}{2} b : \infty c = \frac{3}{2} g.$$

Dans le système binaire, on distingue, lorsque cela est nécessai
les formes qui rencontrent la direction négative de l'axe x en accentua
la lettre. Ainsi :

$$o^{\frac{3}{2}} = \{205\} = a : \infty b : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} d$$

$$a^{\frac{3}{2}} = \{\bar{2}03\} = a' : \infty b : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} d'.$$

On désigne par la lettre o les formes symétriques non parallèles a
axes coordonnés; on met à côté le rapport des longueurs numériqu
interceptées sur les axes, en plaçant au dénominateur celle qui se r
pète deux fois. C'est ainsi que, dans le système cubique, on a

$$a^{\frac{3}{3}} = \{332\} = a : a : \frac{3}{2} a = \frac{3}{2} o ;$$

dans le système terbinaire

$$b^{\frac{1}{3}} = \{332\} = a : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} o ;$$

e système binaire, on désigne par un accent la forme qui, à la supérieure, rencontre la direction négative des x :

$$d^{\frac{1}{3}} = \left\{ 332 \right\} = a : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} o$$

$$b^{\frac{1}{3}} = \left\{ \bar{3}32 \right\} = a' : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} o';$$

e système asymétrique, il faut encore distinguer les plans qui, artie supérieure, rencontrent la direction positive des y de ceux ncontrent la direction négative. Pour ces derniers, on ajoute au le un accent situé à gauche (et non plus à droite) de o :

$$f^{\frac{1}{3}} = \left\{ 332 \right\} = a : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} o$$

$$d^{\frac{1}{3}} = \left\{ \bar{3}3\bar{2} \right\} = a : b' : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} {}'o$$

$$c^{\frac{1}{3}} = \left\{ \bar{3}32 \right\} = a' : b : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} o'$$

$$b^{\frac{1}{3}} = \left\{ 33\bar{2} \right\} = a' : b' : \frac{3}{2} c = \frac{3}{2} {}'o'.$$

ns le système rhomboédrique, les formes parallèles à un axe ire sont notés r, en mettant devant r le rapport des longueurs nu- ques interceptées sur les axes, la longueur se rapportant à l'axe cal étant placée au numérateur :

$$\left\{ 20\bar{2}3 \right\} = a : a : \infty a : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} r.$$

n distingue naturellement les deux formes birhomboédriques en entuant la lettre qui se rapporte à la forme inverse :

$$\left\{ 20\bar{2}3 \right\} = a : a : \infty a : \frac{2}{3} c = \frac{2}{3} r$$

$$\left\{ 02\bar{2}3 \right\} = \left(a : a : \infty a : \frac{2}{3} c \right)' = \frac{2}{3} r'.$$

es formes dont les pôles sont placés sur les axes binaires, c'est-à-dire isoscéloèdres, sont désignées par un symbole spécial ; on divise les gueurs numériques, non plus par la plus grande, mais par la plus te des longueurs horizontales ; le symbole devient :

$$2a : a : 2a : \frac{4}{3} c = \frac{4}{3} d.$$

Enfin, on convient d'une manière générale que, si k est le symb d'une forme holoédrique, k et k' seront les symboles des deux for conjuguées dans le cas de l'hémiédrie.

SYMBOLES DE NAUMANN.

Comme Weiss, Naumann désigne les formes simples par les longue numériques interceptées sur les axes, et ces axes sont à peu de ch près les mêmes que ceux de Weiss. La différence entre les deux mo de notation ne se trouve que dans les simplifications plus ou mo réelles apportées dans les signes. Nous allons passer successivement revue les divers systèmes cristallins en indiquant pour les formes simp de chacun d'eux les signes imaginés par Naumann.

Système cubique. Les longueurs numériques étant rangées par or de grandeur croissante, on les divise par la plus petite, et elles devi nent alors

$$m \; n \; 1,$$

m et n étant généralement des nombres fractionnaires, et toujo $m > n$. La forme simple est écrite

$$m \; O \; n;$$

on n'écrit jamais un coefficient égal à l'unité, de sorte que O désig l'octaèdre $a^1 = \{111\}$; le symbole ∞O, le dodécaèdre rhomboï $b^1 = \{100\}$; le symbole 2O, le trioctaèdre $a^{\frac{1}{2}} = \{221\}$, etc.

Système quadratique. On divise les trois longueurs numériques par plus petite de celles qui se rapportent aux axes horizontaux; on me gauche de la lettre P la fraction qui se rapporte à l'axe vertical, droite, le nombre fractionnaire plus grand que 1 qui se rapporte à l'a horizontal. On a ainsi :

$$a_5 = \{321\} = 3P\frac{3}{2}$$

$$h^2 = \{310\} = \infty P 3$$

$$a^{\frac{3}{2}} = \{205\} = \frac{2}{5} P \infty$$

$$h^1 = \left\{100\right\} = \infty\,\mathrm{P}\,\infty$$

$$b^{\frac{3}{1}} = \left\{223\right\} = \frac{2}{3}\,\mathrm{P}$$

$$p = \left\{001\right\} = 0\,\mathrm{P}.$$

stème terbinaire. On divise toujours les trois longueurs numé-
es par la plus petite des longueurs horizontales, et l'on écrit
che de la lettre P la fraction qui se rapporte à l'axe vertical, à
e le nombre fractionnaire plus grand que 1 qui se rapporte à un
horizontal. Mais, comme ici les deux axes horizontaux ne sont pas
valents, il faut que nous indiquions par un signe spécial auquel des
axes s'applique la longueur numérique écrite. On convient de
re au-dessus de P le signe d'une brève ☋ quand la longueur s'ap-
ue au plus petit axe, et le signe d'une longue — quand elle s'ap-
ue au plus grand. On a ainsi :

$$e_2 = \left\{312\right\} = \frac{3}{2}\,\breve{\mathrm{P}}3$$

$$a_2 = \left\{132\right\} = \frac{3}{2}\,\bar{\mathrm{P}}3$$

$$g^1 = \left\{100\right\} = \infty\,\breve{\mathrm{P}}\,\infty$$

$$h^1 = \left\{010\right\} = \infty\,\mathrm{P}\,\infty, \text{ etc.}$$

Système binaire. On suit encore la même règle ; mais, lorsque la
gueur numérique horizontale conservée s'applique à la diagonale
rizontale, on barre la lettre P d'une barre horizontale $\underline{\mathrm{P}}$; et lorsque
te longueur s'applique à la diagonale inclinée, on barre P d'une
rre inclinée $\mathrm{P}\!\!\!/$. Il faut encore, dans certains cas, distinguer les for-
s qui, à la partie supérieure du cristal, coupent la partie postérieure
la diagonale inclinée, de celles qui coupent la partie antérieure. On
t précéder le symbole des premières du signe +, celui des secon-
s du signe —.

C'est ainsi qu'on a :

$$b^1\, d^{\frac{1}{2}}\, g^1 = \left\{\bar{1}32\right\} = +\frac{3}{2}\,\bar{\mathrm{P}}3$$

$$d^1 b^{\frac{1}{2}} g^1 = \left\{132\right\} = -\frac{3}{2} \text{P} 3$$

$$b^1 b^{\frac{1}{2}} h^1 = \left\{\bar{3}12\right\} = +\frac{3}{2} \text{P} 3$$

$$d^1 d^{\frac{1}{2}} h^1 = \left\{312\right\} = -\frac{3}{2} \text{P} 3$$

$$e^{\frac{3}{2}} = \left\{023\right\} = \frac{2}{3} \text{P} \infty$$

$$a^{\frac{3}{2}} = \left\{\bar{2}03\right\} = +\frac{2}{3} \text{P} \infty$$

$$o^{\frac{3}{2}} = \left\{203\right\} = -\frac{2}{3} \text{P} \infty, \text{ etc.}$$

Système asymétrique. Il faut distinguer d'abord les formes pour le quelles la longueur numér que horizontale conservé plus grande que 1, s'appliq à la plus courte diagonal de celles pour lesquelles el s'applique à la plus longu c'est ce qu'on fait, comm dans le système terbinai en mettant au-dessus de soit le signe —, soit le gne ∪. Mais le signe ai écrit s'applique aux quat faces antérieures d'un o taèdre (fig. 241), et de c quatre faces il nous fa désigner celle qui convien la forme.

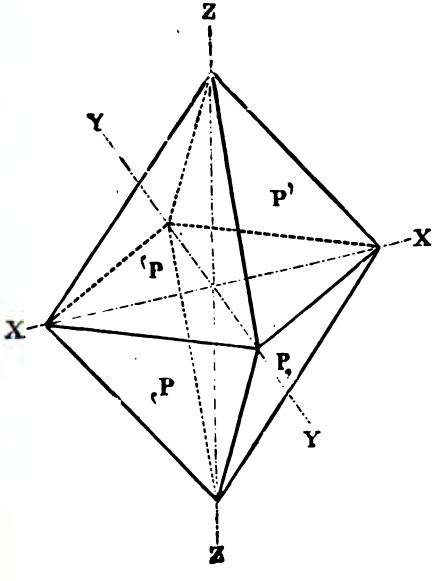


Fig. 241.

Pour y arriver, on met la lettre P un accent qui e situé à droite ou à gauche de la lettre suivant que le plan, dans partie antérieure de l'octaèdre, est situé à droite ou à gauche de l'o servateur, et qui est situé en haut ou en bas de la lettre suivant q le plan est situé au-dessus ou au-dessous de la base de l'octaèdre.

n a ainsi :

$$\left\{312\right\} = f^1\, d^{\frac{1}{2}}\, h^1 = \frac{3}{2}\,\bar{\mathrm{P}}'\,3$$

$$\left\{\bar{3}1\bar{2}\right\} = d^1\, f^{\frac{1}{2}}\, h^1 = \frac{3}{2}\,{}'\bar{\mathrm{P}}\,3$$

$$\left\{31\bar{2}\right\} = b^1\, c^{\frac{1}{2}}\, h^1 = \frac{3}{2}\,\bar{\mathrm{P}},\,3$$

$$\left\{\bar{3}12\right\} = c^1\, b^{\frac{1}{2}}\, h^1 = \frac{3}{2}\,{}_{,}\bar{\mathrm{P}}\,3$$

$$\left\{132\right\} = f^1\, c^{\frac{1}{2}}\, g^1 = \frac{3}{2}\,\ddot{\mathrm{P}}'\,3$$

$$\left\{\bar{1}3\bar{2}\right\} = d^1\, b^{\frac{1}{2}}\, g^1 = \frac{3}{2}\,{}'\check{\mathrm{P}}\,3$$

$$\left\{13\bar{2}\right\} = b^1\, d^{\frac{1}{2}}\, g^1 = \frac{3}{2}\,\ddot{\mathrm{P}},\,3$$

$$\left\{\bar{1}32\right\} = c^1\, f^{\frac{1}{2}}\, g^1 = \frac{3}{2}\,{}_{,}\check{\mathrm{P}}\,3.$$

Systèmes hexagonal et rhomboédrique. Naumann considère le système omboédrique comme hémiédrique du système hexagonal. Les axes t encore les axes binaires horizontaux et l'axe vertical.

Si par un point A pris sur un axe binaire à l'unité de distance numé- que de O on fait pivoter une droite dans le plan horizontal, il est ir que, lorsque cette droite est perpendiculaire sur OA, elle intercepte r les deux autres axes binaires de même espèce des longueurs numé- ques égales à 2 ; et, dans toute autre position, elle intercepte sur un s axes une longueur numérique plus grande que 2. On en conclut e, si l'une des trois longueurs numériques horizontales qui entrent ns le symbole d'un plan quelconque est prise comme unité, des deux tres l'une sera plus petite et l'autre plus grande que 2.

Pour trouver le symbole d'une forme dans le mode de notation de Nau- nn, on écrit les quatre longueurs numériques qu'un de ses plans ercepte sur les quatre axes, on les divise par la plus petite des lon- eurs horizontales, puis on écrit à gauche de la lettre P la fraction i se rapporte à l'axe vertical, à droite de cette lettre, celle des deux rapportant à l'axe horizontal qui est plus petite que 2. Soit, par emple, une forme notée $\left\{p\,q\,\bar{r}\,s\right\}$. p, q, r, étant rangés, en valeur abso- e, dans l'ordre de grandeur croissante; les longueurs numériques rrespondantes sont :

$$\frac{1}{p},\ \frac{1}{q},\ \frac{1}{r},\ \frac{1}{s}$$

et les trois premières étant rangées par ordre de grandeur décro sante, $\frac{1}{r}$ est la plus petite. Nous divisons par $\frac{1}{r}$; les longueurs nur riques deviennent

$$\frac{r}{p}, \frac{r}{q}, 1, \frac{r}{s};$$

$\frac{r}{p}$ étant plus grand que $\frac{r}{q}$, c'est $\frac{r}{q}$ qui est plus petit que 2, et le sy bole Naumann sera le suivant :

$$\frac{r}{s} \mathrm{P} \frac{r}{q}.$$

Lorsqu'il s'agit du système ternaire, il faut distinguer les forme directes des formes inverses. On y arrive en faisant précéder le symbo du signe + dans le premier cas, du signe — dans le second.

Pour montrer qu'il s'agit d'une hémiédrie on peut mettre devant l symbole la fraction $\frac{1}{2}$, ou plus commodément on remplace la lettre par la lettre R.

Tels sont les symboles imaginés par Naumann et employés mainte nant d'une manière très-générale par les minéralogistes étrangers. l est difficile de voir ce qui leur a valu cette fortune. En effet, ils n sont point aussi commodes au point de vue mathématique que ceu de Miller qu'ils ne sauraient remplacer ; ils ne présentent à l'espri aucune image plus nette et plus précise que ceux de Weiss ni à bie plus forte raison que ceux d'Haüy ; ils sont à peu près impossibles à employer dans le langage, car la plupart des signes sont figuratifs e ne sauraient être parlés ; ils sont bien plus compliqués que ceux d Miller, et que la plus grande partie de ceux de Weiss et d'Haüy ; enfi ils obligent à employer des signes typographiques très-incommodes qui ne sont pas ordinairement usités et qu'on ne trouve pas dans toutes les imprimeries.

Dana, qui s'est servi, dans son Manuel de minéralogie, des symboles de Naumann, les a heureusement modifiés en supprimant la grand lettre qui ne sert qu'à séparer les deux nombres fractionnaires. C'est le second nombre qui reçoit les signes de prosodie ou autres nécessaires dans les systèmes terbinaire, binaire et asymétrique. Lorsque l

bre 1 doit être écrit de part et d'autre de la lettre, et est sup-
ié en vertu de la convention adoptée, Dana écrit un grande chiffre 1.
n Dana substitue au signe ∞, qui est fort incommode, la lettre *i;*
que *i* doit être écrit seul, on met une grande lettre I.

n voit en résumé que le langage des cristallographes est loin de
séder l'unité désirable. Il semble qu'une bonne partie de l'imagi-
on des savants qui se sont occupés de cette partie de la science
t employée à produire cette confusion des langues dont la tour de
el fut jadis le théâtre. Il faut souhaiter, sinon que l'unité se fasse (il
inutile de former des souhaits irréalisables), au moins que la créa-
n de nouveaux symboles ne nous soit plus infligée. L'étude de la na-
e est déjà assez délicate pour que nous ne la compliquions pas à
isir par de puériles inventions.

Actuellement la lecture des divers ouvrages cristallographiques ne
ut se faire sans une traduction préalable des symboles employés. On
ouvera à la fin de la première partie de cet ouvrage des tables assez
endues qui permettent de faire aisément cette transformation.

CHAPITRE XIV

MESURE DES ANGLES DES CRISTAUX

Goniomètre d'application. — La définition rigoureuse d'un crista exige la mesure des angles dièdres formés par les plans qui le limitent Le premier appareil qui ait été imaginé, pour satisfaire à cette conditio indispensable de la science, est dû à un artiste du siècle dernier, nomm Carangeot. Cet instrument, tout imparfait qu'il est, a été exclusivemen employé par le créateur de la cristallographie, l'illustre Haüy. Il se com pose d'un demi-cercle divisé ; deux lames métalliques, formant alida des (fig. 243), et mobiles autour d'un axe perpendiculaire au plan de lames, s'appliquent sur le cristal de manière que l'axe de rotation soi parallèle à l'arête du dièdre que l'on veut mesurer ; on fait mouvoir le alidades jusqu'à ce que leurs tranches viennent s'appliquer exactemen

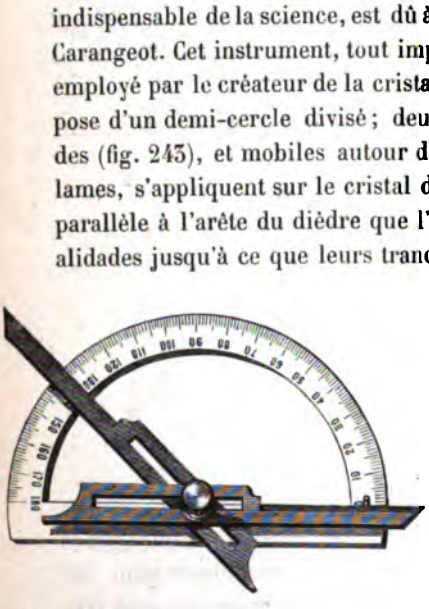


Fig. 242.

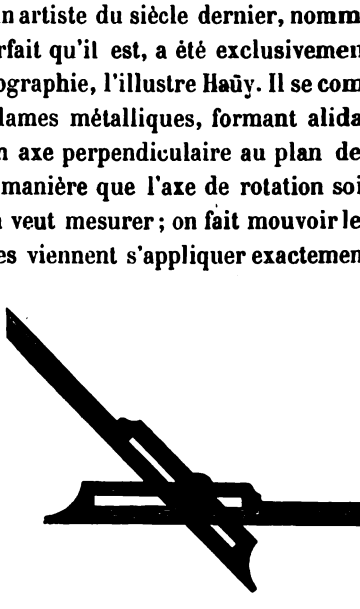


Fig. 243.

sur les deux faces. L'angle des alidades est alors égal à celui du dièdr et, pour en obtenir la mesure, il suffit de les poser sur le rapporteu de manière que l'une d'elles coïncide avec le zéro de la divisio l'autre marque, sur la graduation, l'angle cherché (fig. 242 et 243).

bouton qui porte l'axe des deux alidades peut d'ailleurs se mou-
dans deux rainures que portent celles-ci, et que représente la figure.
disposition est nécessaire pour les observations à faire sur les
ux engagés dans la gangue.
s conditions à remplir pour l'exactitude de l'observation, c'est-à-
le parallélisme de l'axe de rotation à l'arête, et l'application
e des règles sur les faces, sont assez difficiles à remplir, surtout
les petites faces, et il a fallu à Haüy son habileté et sa longue ex-
ence pour obtenir avec un semblable instrument les admirables ré-
ts qui ont fait une partie de sa gloire.
goniomètre de Carangeot, qu'on appelle encore goniomètre d'Haüy
oniomètre d'application, n'est plus employé que pour les cristaux
les faces sont dépourvues de pouvoir réfléchissant.

oniomètre à réflexion. — Pour tous les autres cristaux, qui sont
reusement de beaucoup les plus nombreux, on a recours à un pro-
é ingénieux, imaginé par Malus et rendu tout à fait pratique par
llaston. Ce procédé est fondé sur les lois de la réflexion de la
nière, et le principe en est très-simple.

oit un cristal, portant deux faces réfléchissantes PQ, PQ′ (fig. 244), dont

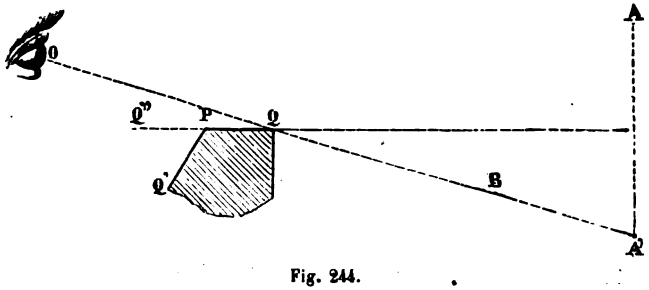


Fig. 244.

arête commune est perpendiculaire au plan de la figure. Dans ce plan
trouvent : un point lumineux A qui sert de signal, un autre point
mineux B qui sert de point de repère, et l'œil O de l'observateur. On
ppose ces trois points tellement placés que sur la ligne qui joint O et
se trouve l'image virtuelle de A par rapport au miroir PQ. Si de plus
œil est placé de telle sorte qu'il puisse recevoir en même temps
es rayons émanés du point B et les rayons réfléchis par le miroir,
verra la superposition se produire entre B et l'image de A. L'œil
tant supposé rester immobile, on fait tourner le cristal autour de
arête commune aux deux faces PQ, PQ′; l'œil, pendant ce mouve-

ment, cesse de voir la coïncidence entre B et l'image de A, r
cette coïncidence est rétablie lorsque PQ′ est parvenu en PQ″, su
prolongement de PQ, c'est-à-dire lorsque le cristal a tourné d
angle Q″PQ′ égal au supplément de l'angle dièdre des deux plans.

Pour faire l'observation, on fixe le cristal C (fig. 245) au moyen d
peu de cire sur une tige T*t* enfilée à frottement doux à l'extrémité d

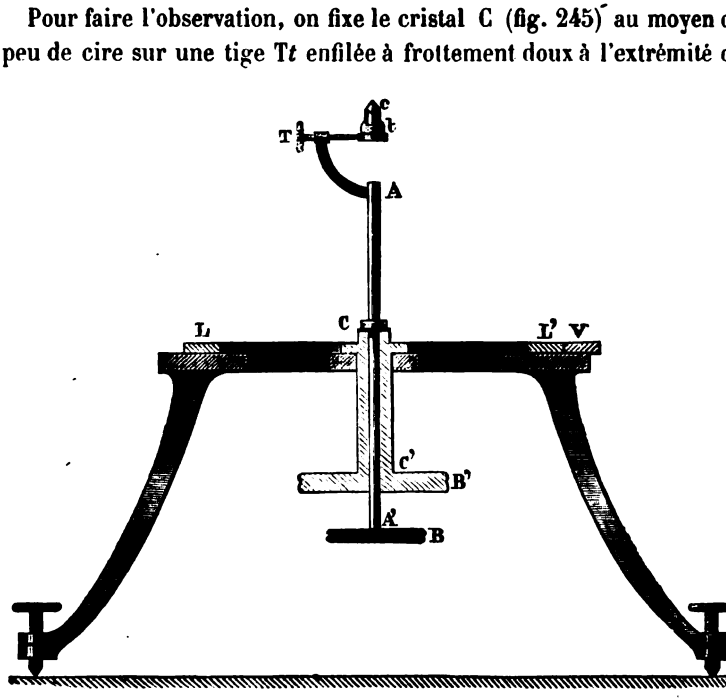


Fig. 245.

quart de cercle mobile autour d'un axe A perpendiculaire à son pl
l'axe est fixé à l'extrémité d'une tige AA′ terminée par le bouton B. C
tige, posée à frottement doux dans un tube CC′ portant à son extrém
inférieure le bouton B′, est reliée en haut à un limbe horizontal
culaire LL′ divisé en degrés et mobile en regard du vernier fixe
L'appareil tout entier est porté sur trois pieds à vis calantes. Une
de pression munie d'une vis de rappel permet de rendre à volo
solidaires ou indépendants le vernier V et le limbe LL′.

Au moyen de niveaux à bulle d'air, on rend d'abord horizontal
limbe LL′, ce qui, grâce à la construction spéciale de l'appar
amène la tige AA′ à être verticale. On place ensuite le cristal C de m
nière que l'arête du dièdre soit à peu près verticale et à peu près
le prolongement de l'axe de la tige AA′. Il faut d'abord amener la ve

e de l'arête du dièdre à être rigoureuse, car c'est une condition pensable de l'exactitude de l'observation. Pour y arriver, on com-e par relier le limbe et le vernier, de manière qu'ils soient au la tige AA′ reste libre dans son mouvement de rotation autour axe. Sur une table éloignée de celle sur laquelle est posé l'ap-l, et autant que possible dans une chambre obscure, on dispose bougies, ou, mieux encore, deux lampes recouvertes chacune écran noirci et muni d'une fente verticale. On s'arrange pour les flammes des bougies ou les fentes des écrans soient à la même eur que le cristal C.

tourne alors, au moyen du bouton B, l'axe AA′ de manière à voir réflexion sur une des faces du dièdre l'image de la première fente, on cherche en agissant soit sur l'axe, soit sur le cristal, soit sur le port de ce cristal, à mettre en coïncidence cette image avec la nde fente vue directement. Cette coïncidence obtenue, on est assuré la première face du dièdre est parallèle à l'axe de rotation. On ne alors l'axe AA′ jusqu'à ce qu'on voie l'image de la première e par réflexion sur la seconde face du dièdre et l'on cherche, en nant l'axe AA′, à mettre cette image en coïncidence avec la xième fente.

e résultat étant obtenu, on revient à la première face pour s'assurer elle permet encore d'obtenir la coïncidence. S'il n'en est pas ainsi, y remédie en modifiant de nouveau la position du cristal, puis on sure que, malgré cette modification, la deuxième face donne encore coïncidence. Au bout d'un certain nombre de rectifications convena-ment faites, on doit arriver à obtenir successivement, avec les deux es du dièdre, la coïncidence entre la fente qui sert de point de ère et l'image de la fente qui sert de signal, c'est-à-dire à placer rête du dièdre parallèle à l'axe de rotation. Le support du cristal et xe de rotation de l'appareil permettant, en effet, de faire tourner le stal autour de trois axes perpendiculaires entre eux, à savoir T*b*, xe A perpendiculaire au plan de la figure, et AA′, on sait qu'on peut ujours amener une droite de ce cristal à être parallèle à une direc-n donnée.

Lorsque le cristal est convenablement disposé, le limbe et le vernier ant toujours reliés entre eux et toujours au zéro, on établit la coïn-dence au moyen de la première face, puis on rend libres le limbe et vernier. En agissant alors, non plus sur le bouton B, mais sur le uton B′, on entraîne à la fois le limbe et l'axe AA′, et on établit la

coïncidence au moyen de la seconde face. On lit sur le limbe l'ang dont celui-ci a tourné et qui est la mesure de l'angle des normales a faces du dièdre.

Pour diminuer les tâtonnements, il importe de placer d'abord cristal dans une position aussi voisine que possible de celle qu'il d occuper. Il est bon, à cet effet, lorsque les deux faces du dièdre se r contrent suivant une arête réelle, de placer cette arête, en la regard avec une loupe, aussi verticale que possible. On arrive ensuite à u exactitude plus grande, en plaçant, à peu de distance du cristal, u bougie ou une lampe située à la même hauteur que celui-ci. En reg dant le cristal à la loupe, ou à l'œil nu si, les faces sont assez grand on fait tourner l'axe AA′ jusqu'à ce que l'œil, placé dans le même pl horizontal que le cristal et la lampe, voie l'une des faces du dièd vivement éclairée. On tourne ensuite le bouton B jusqu'à ce que l'aut face du dièdre se substitue à peu près à la première ; si on la v aussi vivement éclairée que celle-ci, le cristal est à peu près bien pla et l'on achève de régulariser la position comme il a été dit pl haut. Dans le cas contraire, on déplace le cristal, soit à la main, s au moyen des deux mouvements perpendiculaires autour de A et de T jusqu'à ce que la condition puisse être remplie. Ce mode de rectific tion est au fond le même que celui que nous avons déjà décrit, et q est toujours employé à la rectification finale; mais, s'il ne comporte p la même exactitude, il est d'un emploi très-commode parce qu'il pe met de placer le cristal dans une position très-voisine de celle qu'il do garder, sans le perdre de vue. Non-seulement on peut ainsi diriger l tâtonnements d'une façon plus commode, mais encore on peut êt assuré de ne pas confondre une face avec une autre. Cette confusion e à craindre lorsque les deux faces du dièdre sont très-petites, et que pl sieurs faces, faisant partie d'une même zone, présentent des inclinaiso mutuelles peu différentes les unes des autres.

Lorsqu'on veut, au moyen du double mouvement du support du cri tal, rendre l'arête réelle ou virtuelle du dièdre parallèle à l'axe d rotation, il faut, comme on l'a vu, amener la coïncidence exacte entr le point de repère et l'image du signal vue par réflexion sur une de faces, puis essayer, en tournant l'axe AA′, d'amener la coïncidence pa réflexion sur la seconde face. Si cela n'est pas possible, il faut modifie la position du cristal au moyen de l'un des deux mouvements de rota tion rectangulaires qu'on peut lui donner. Il est évident que, si l'o amenait alors la coïncidence en se servant d'un seul de ces deux mou

ts, elle cesserait en général de pouvoir être produite avec la pre-
face. Si l'on agissait de même sur celle-ci, la coïncidence n'au-
us lieu avec la seconde, et il n'est pas certain *à priori* que les
cations successives opérées de la sorte convergent vers le résultat
, dont elles peuvent au contraire éloigner de plus en plus.

r éviter cet inconvénient, il faudrait amener la coïncidence par
on sur la seconde face en agissant sur les deux mouvements rec-
aires de manière à ne pas changer la position de la première
ar rapport à l'axe AA', ou, en d'autres termes, en combinant les
nouvements de rotation de manière que leur résultante soit une
on autour d'une normale à la première face.

e règle est sans doute plus aisée à énoncer qu'à expliquer, sauf
un cas particulier qu'on peut toujours réaliser et qu'il est très-
ode de réaliser. Supposons que l'une des faces du dièdre ait été
e à peu près perpendiculaire à l'un des deux axes de rotation du
ort. Après avoir établi la coïncidence au moyen de cette face en
ant sur l'axe de rotation non perpendiculaire, on l'établit au moyen
autre face en agissant exclusivement sur l'axe de rotation du sup-
perpendiculaire à la première. On dérange ainsi très-peu la pre-
e coïncidence obtenue, et l'on obtient rapidement les deux coïn-
ces successives.

rsque tout est disposé pour la mesure de l'angle dièdre formé par
faces cristallines, l'axe de rotation est parallèle à l'arête de ce
re, c'est-à-dire à l'axe de la zone définie par ces deux faces. En
nt décrire au cristal un tour complet, toutes les faces de cette
viendront donc successivement se placer de manière qu'il y ait
cidence entre le point de repère et l'image du signal vue par
xion sur la face. On pourra donc ainsi connaître toutes les faces qui
artiennent à la zone, et, sans changer la position du cristal,
urer les inclinaisons mutuelles de toutes ces faces.

**Discussion des erreurs à craindre dans l'emploi du gonio-
tre à réflexion.** — Le procédé de mesure étant connu, il est néces-
re de se rendre compte des causes d'erreur qu'il comporte et du
gré d'exactitude auquel il permet d'atteindre.

Supposons le signal en A (fig. 246); la face observée du cristal,
pposée très-petite, est en *rs;* l'axe autour duquel tourne le cristal est
pposé perpendiculaire au plan de la figure sur lequel sa trace est en
Quelle que soit la position de la face *rs* qui sert de miroir, l'image
A se fera sur une circonférence décrite de O comme centre avec OA

pour rayon. Soit A′ l'image de A. L'œil, pour recevoir des rayons réflé doit se placer quelque part dans l'intérieur du cône ayant pour s met A′ et la surface *rs* du cristal comme base. Soit B le repère; verra à la fois B et A′ en se plaçant de telle sorte que, une portion prunelle étant dans l'intérieur du cône, une autre portion soi dehors.

La coïncidence étant établie entre B et A′, c'est-à-dire B et A′ étant

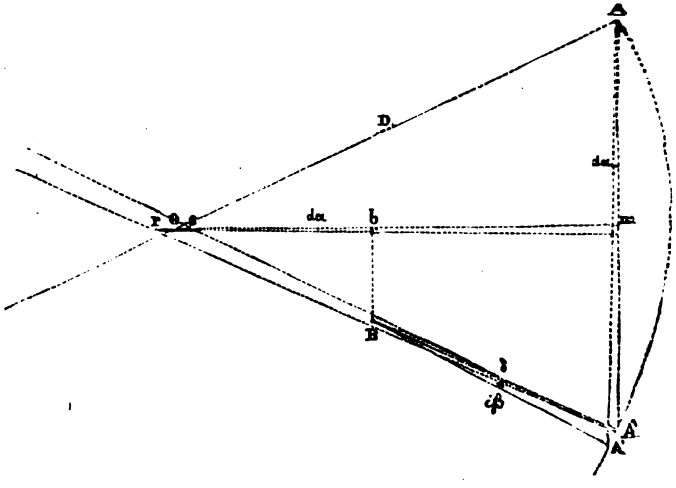


Fig. 246.

une même droite avec le centre optique de l'œil, on tourne le cr tal de manière à regarder l'image réfléchie par la seconde face de l'a gle dièdre que l'on se propose de mesurer. Il faut que, pendant mouvement, l'œil ne se déplace pas; s'il en était autrement, si l'œil déplaçait de manière que la ligne menée par le centre optique et B un angle $d\beta$ avec BA′ et vînt rencontrer le cercle AA′ en A″, après avo amené la seconde face à occuper la position de la première, il faudrai pour rétablir la coïncidence entre l'image et le point de repère, tourn encore la face d'un angle $d\alpha = A'AA''$.

Si de O nous menons l'angle au centre ayant pour mesure A′A″, c angle sera égal à $2d\alpha$, puisque $d\alpha$ a pour mesure $\frac{A'A''}{2}$. Nous avons don en appelant D la distance OA, et δ la distance BA′ :

$$\frac{2d\alpha}{d\beta} = \frac{\delta}{D} \text{ ou } d\alpha = d\beta\,\frac{\delta}{2D}$$

n appelle $d0$ le déplacement du centre optique de l'œil, normale-
à la division BA', on a à peu près

$$d\beta = \frac{\frac{d0}{D-\delta}}{\cos A0m};$$

st donc, même en supposant à l'œil un déplacement notable, un
petit angle. Si donc δ est petit par rapport à D, $d\alpha$ sera une quan-
du deuxième ordre de petitesse et complétement négligeable.
our atténuer et même annuler à peu près entièrement l'erreur pro-
nt du déplacement de l'œil, il suffit donc de s'arranger pour que
gnal, le point de repère et le goniomètre, forment à peu près les
s sommets d'un triangle isocèle dont le signal et le point de repère
quent la base.

ne autre cause d'erreur, bien plus grave, se rencontre dans la posi-
n excentrique que peut prendre l'axe de rotation par rapport aux
ux faces du dièdre. Pour l'exactitude de la mesure, il est, en effet,
cessaire, non-seulement que l'axe de rotation soit parallèle à l'arête
dièdre, mais encore que cet axe soit contenu dans le plan bissecteur
dièdre. Ce n'est, en effet, qu'à cette condition que, par une rotation
nvenable autour de l'axe, une des faces peut venir occuper précisé-
ent la position qu'occupait précédemment l'autre.
S'il n'en est pas ainsi, après une rotation autour de l'axe égale au sup-

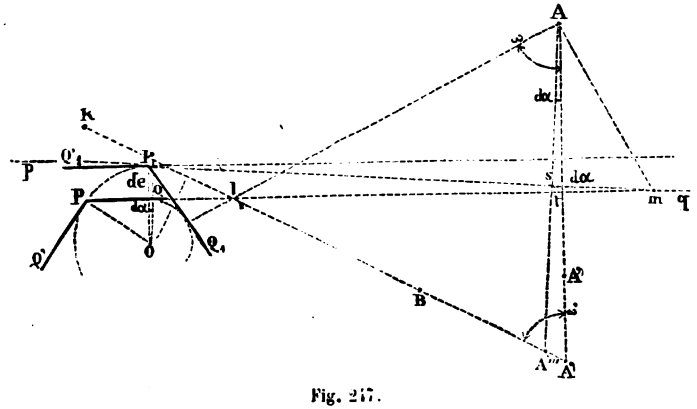


Fig. 247.

ement de l'angle dièdre, le plan PQ' (fig. 247), au lieu d'occuper la posi-
n PQ, vient se placer parallèlement, en $P_1Q'_1$, à une distance de PQ que

l'on appelera *de*. L'image de A ne reviendra plus alors au même po A′ et se placera en A″. Le centre optique de l'œil de l'observateur rest en R, pour amener la coïncidence entre l'image et le point de repère il faudra, après avoir amené PQ′ en $P_1Q'_1$, continuer à faire tourner cristal autour de O d'un angle très-petit égal à $d\alpha$. Le plan $P_1Q'_1$ vien prendre la direction *pq* qui rencontre en *m* le plan PQ prolongé. L'ima de A se trouvera alors en A‴ sur la droite RBA′. Appelons ω l'angle RA qui est égal à l'angle *l*AA′, son symétrique par rapport à PQ; soit *s* point où *pq* rencontre sa perpendiculaire AA‴, et *t* le point où *lm* re contre sa perpendiculaire AA′; *s* et *t* sont les milieux de AA‴ et A et par conséquent *st*, parallèle à A‴A′, fait avec AA′ un angle égal à Les deux points *s* et *t* sont situés sur une circonférence décrite av A*m* pour diamètre; dans cette circonférence l'angle *sm*A a la mêm mesure que l'angle *st*A, qui est égal à ω : donc $sAm = \frac{\pi}{2} - \omega$

$lAm = \frac{\pi}{2} - d\alpha$, ou sensiblement $= \frac{\pi}{2}$. Si donc on pose $lA = D$, on aura

$$lm = \frac{D}{\sin\omega}.$$

En appelant D′ la longueur Q*m*, on a d'ailleurs sensiblement

$$d\alpha = \frac{de}{D'}.$$

A cause de la distance relativement considérable qui sépare le signal d l'appareil, on peut confondre D′ et *lm*, ce qui donnera

$$d\alpha = \frac{de \sin\omega}{D}.$$

Telle est l'expression de l'erreur qui se produit lorsque les distance des deux faces du dièdre à l'axe de rotation diffèrent d'une quantit égale à *de*.

Cette erreur devient d'autant plus petite que D est plus grand : il fau donc placer le signal le plus loin possible du goniomètre. Elle est auss proportionnelle à $\sin\omega$, il faudra donc faire ω aussi petit que possible c'est-à-dire écarter le plus possible le signal de son image.

Supposons A et A′ très-rapprochés, de telle sorte que $\sin\omega$ puisse êtr

é égal à 1. Si alors on pose $L = 4^m$ et $de = 0^m,005$, il vient :

$$d\alpha = \frac{4}{0,005} = 4' \text{ environ.}$$

: les données précédentes on a $At = 4^m$ ou $AA' = 8^m$, ce qu'il sera difficile de dépasser dans la pratique, $\sin\omega$ étant égal à $\frac{1}{2}$, on

$$d\alpha = 2' \text{ environ.}$$

d'ailleurs à la diminution de ω un inconvénient quelquefois assez , c'est que, lorsque ω est très-petit, les rayons qui arrivent à l'œil éfléchis presque normalement, et que leur intensité est par con- nt assez faible. On ne peut donc admettre de très-petites valeurs que pour les cristaux qui possèdent un très-fort pouvoir réfléchis- normal.

xactitude de l'observation exige donc un grand éloignement relatif gnal et de l'appareil en même temps qu'une grande valeur pour le sous lequel l'observateur voit la ligne qui joint le signal et le de repère. Lorsqu'on observe dans une salle obscure, ces deux itions sont contradictoires, car, si l'on place le goniomètre au fond salle, et au milieu de sa largeur, on satisfait à la première con- n en plaçant le signal et le point de repère aux deux angles opposés salle, mais l'angle sous lequel est vue leur distance mutuelle est petit, et ne peut être augmenté qu'en diminuant D.

peut employer, pour tout concilier, un artifice qui consiste à pla- à la hauteur du cristal un petit miroir en verre noir, vertical et ile autour d'un axe parallèle à l'axe de rotation de l'appareil. On

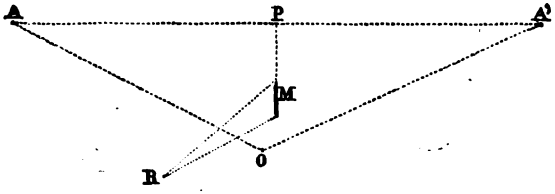


Fig. 248.

d pour point de repère l'image du signal dans ce miroir. Le plan miroir M (fig. 248) ne peut pas passer par l'axe O, mais, s'il n'en e pas très-loin, la condition que AOA' soit un triangle isocèle est eu près et très-suffisamment remplie.

Si l'on place alors dans la salle O et A de telle sorte que OA s
plus grande longueur dont on dispose, on pourra, en faisant
l'angle du miroir M avec OA, diminuer ω autant qu'on le voud
faut remarquer que, l'œil étant placé en R, les seuls rayons réfléch
le miroir qui entreront dans l'œil seront situés dans l'intérieur
cône ayant R pour sommet et le miroir pour base. Il faudra don
le cristal soit placé de manière à n'intercepter qu'une partie
cône. Comme d'ailleurs le cristal est nécessairement placé très-près
on voit qu'il est nécessaire, lorsqu'on modifie l'angle que fait le
du miroir avec OA, de faire varier la position de M par rapport
il faut donc que le miroir soit mobile autour d'un axe vertical, e
le support qui porte l'axe soit lui-même mobile dans une ra
horizontale. La figure 249 montre un goniomètre qui porte un m
mobile comme il vient d'être dit.

On peut encore assurer l'exactitude de l'opération en faisant D

Fig. 249.

grand. Si, par exemple, D, au lieu d'être égal à 4^m, est égal à 40^m, l
reur commise, au lieu d'être de 4′, ne sera plus que de 0′, 4 = 15″,
qui est une exactitude plus que suffisante dans la plupart des cas
est nécessaire alors de prendre pour signal et pour point de rep

deux objets placés dans la campagne, et, ces objets étant toujours peu éclairés, le procédé ne peut être appliqué que pour des cristaux très-réfléchissants et pour des faces un peu larges.

Goniomètre de Babinet ou à lunettes. — Un autre procédé d'observation qui annule les causes d'erreur que nous venons d'analyser consiste à placer rigoureusement à l'infini le signal et le point de repère. Il suffit pour cela de prendre pour signal une fente vivement éclairée, placée au foyer d'une lentille. Les rayons émergeant de cette lentille et réfléchis par le cristal sont recueillis par une lunette astronomique disposée pour voir les objets placés à l'infini, et dont le réticule sert de point de repère.

La figure 250 représente un goniomètre Babinet avec les mo-

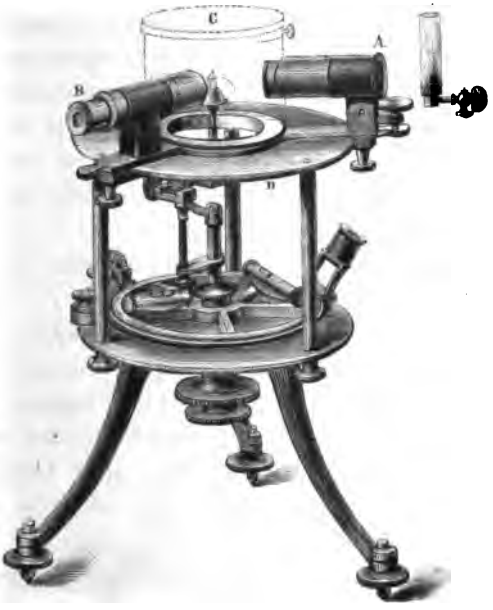


Fig. 250.

difications convenables pour faciliter la mesure des angles des cristaux. Le cristal est placé sur un support qui peut recevoir non-seulement deux mouvements de rotation autour d'axes perpendiculaires, mais encore deux mouvements de translation suivant deux droites rectangulaires. Ces mouvements sont indispensables pour la manœuvre facile de l'appareil; car, le faisceau lumineux étant très-limité, il faut que le

cristal soit placé dans une position presque rigoureusement déter
pour que les deux faces du dièdre reçoivent successivement
lumière et puissent en réfléchir. Une sorte de couvercle perc
fenêtres latérales pour le passage des lunettes permet de sous
le cristal aux rayons de lumière diffuse.

On commence toujours par placer le cristal à peu près dans la
tion convenable pour l'observation. On y arrive aisément en mod
le tirage de la lunette ou en ajoutant une lentille devant l'oculair
manière à s'en servir comme microscope et à voir le cristal éclair
la fente lumineuse. On dispose ensuite celui-ci de manière que les
faces du dièdre paraissent successivement éclairées d'une manière
vive.

Ceci fait, on dispose la lunette de manière qu'elle voie distincte
les objets situés à l'infini. A cet effet on enlève la lunette de l'app
et on la dirige sur un objet très-éloigné; on la replace ensuite san
difier le tirage et on la pointe sur la fente du collimateur. On rég
tirage de la lunette collimateur de manière à voir la fente très-n
ment. Le tirage de la lunette collimateur restant ensuite cons
celui de la lunette oculaire sera convenablement réglé lorsqu
verra nettement l'image de la fente.

Lorsque les faces sont bien planes, on peut obtenir avec le go
mètre à lunettes une précision remarquable, même avec de très-pe
faces, pourvu que celles-ci fournissent une quantité suffisante
lumière réfléchie. Toutefois M. Cornu a signalé, lorsque les faces
très-petites, une cause d'erreur dont il faut tenir compte. La diffrac
des rayons réfléchis sur ces faces épanouit le faisceau réfléchi qu
converge plus à l'infini. On retrouve donc alors toutes les ca
d'erreur auxquelles l'emploi du collimateur et de la lunette d
remédier.

A cette cause d'erreur qui ne se manifeste que pour les f
d'étendue trop restreinte il faut en ajouter une autre bien plus h
tuelle, c'est l'imperfection très-fréquente des faces cristallines. Il ar
très-souvent que des faces, en apparence bien planes, sont formée
réalité de plusieurs plans qui ne se confondent pas rigoureusemen
bien portent de nombreuses stries, soit parallèles, soit croisées. L'in
réfléchie n'est plus unique, et il peut même y en avoir un très-g
nombre. Quand la face se compose de deux ou trois surfaces pl
dont les contours sont bien visibles, on vise successivement chac
des images correspondantes en recouvrant d'encre successiven

toutes les faces moins une. Si cela est impossible, on convient assez arbitrairement de pointer l'image la plus intense. Il est d'ailleurs évident que ces incertitudes sont dues non pas à une imperfection de l'appareil de mesure, mais à un manque de précision dans la définition de la chose à mesurer. Ce manque de précision tient à la nature même du problème cristallographique, et nous reviendrons plus tard sur ce sujet avec toute l'attention qu'il mérite.

Goniomètre à axe horizontal. — On a supposé jusqu'à présent que l'axe du goniomètre était vertical; c'est la disposition du goniomètre de Mohs et du goniomètre de Babinet; c'est celle qui paraît la meilleure. Ce n'est pas cependant la disposition la plus usitée. Le premier appareil imaginé par Wollaston et ceux que la plupart des constructeurs mettent en vente actuellement ont l'axe horizontal. Le goniomètre ainsi disposé est représenté figure 251. La théorie de l'instrument et la ma-

Fig. 251.

nière de faire l'observation restent les mêmes; seulement le plan, passant par le signal, le point de repère et le cristal, devient vertical au lieu d'être horizontal.

Il est difficile de voir pourquoi l'horizontalité de l'axe de rotation du

goniomètre est généralement préférée par les observateurs. Non-se ment avec cette disposition il est plus malaisé de choisir le signal point de repère, car les lignes horizontales sont toujours plus rares les lignes verticales, mais encore la position du cristal est beauc moins commode pour l'observateur, dont la tête se trouve gênée pa limbe vertical.

Lorsqu'on observe avec une lunette, l'horizontalité de l'axe entra pour l'agencement des lunettes, à des complications tout à fait inut Telle était cependant la disposition du goniomètre au moyen du Mitscherlich constata les variations que subissent les angles de la cal lorsqu'on l'échauffe, et démontra l'inégale dilatabilité de cette stance suivant les diverses directions cristallines.

Mesures des angles dièdres des cristaux microscopiques. - est souvent d'un très-grand intérêt de pouvoir mesurer avec préci des cristaux microscopiques. Cet important problème a été résolu réc ment d'une façon très-ingénieuse par M. Émile Bertrand.

Supposons un petit cube parfaitement bien dressé, dont on désign les directions des arêtes par les lett X, Y, Z. Un petit cristal C (fig. 252) fixé avec de la cire sur une face n male à Z, et deux petites faces crist lines *a* et *b* placées en dessus réfléch sent la lumière.

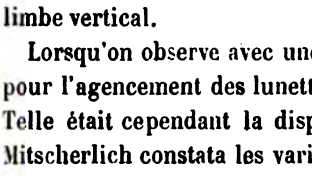


Fig. 252.

On mène des normales à ces de plans *a* et *b*, et pour représenter d'une manière simple la position re tive de ces normales avec les rections des arêtes du cube, suppose toutes ces directi transportées au centre d'u sphère dont elles viennent co per la surface. Les directions arêtes du cube coupent la sph en X, Y, Z, et celles des norma aux faces *a* et *b* en P et (fig. 253).

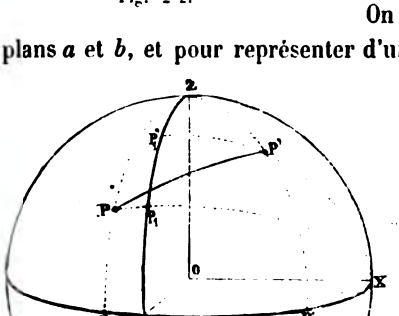


Fig. 253.

Projetons P et P′ en *p* et *p*′ s le grand cercle XY, O*p* et O*p*′ présentent les directions, sur face du cube perpendiculaire à Z, des traces des plans menés par Z

ar les normales aux faces cristallines a et b. Nous supposons qu'on uisse mesurer les angles pY et $p'Y$ que font ces deux traces avec l'une les arêtes du cube normales à Z.

Nous projetons de même P et P' sur le grand cercle ZY en p_1 et p'_1; Op_1 et Op'_1 sont, sur la surface du cube perpendiculaire à X, les directions des traces des plans menés par X et par les normales aux faces cristallines a et b. Nous supposons encore qu'on puisse mesurer les angles p_1Y et p'_1Y que font ces deux traces avec l'arête du cube parallèle à Y.

On aura alors dans le triangle rectangle ZPp_1

$$\operatorname{tg} PZ = \frac{\operatorname{cotg} p_1Y}{\cos p_1Y}$$

et dans le triangle rectangle $ZP'p'_1$

$$\operatorname{tg} P'Z = \frac{\operatorname{cotg} p_1'Y}{\cos p'Y};$$

il suffira de résoudre le triangle PZP' dans lequel on connaît PZ, P'Z et l'angle $PZP' = pY + p'Y$, pour connaître l'angle PP' que font les normales aux deux faces cristallines a et b.

Le problème est donc ramené à mesurer l'angle que fait avec l'une des arêtes du cube la trace du plan mené par une autre arête du cube et par la normale à une face du cristal.

On place le cube portant le cristal sur le porte-objet d'un microscope qui peut tourner autour de l'axe optique de l'appareil. On dispose en avant du porte-objet un écran percé d'une fente verticale aussi haute que possible donnant passage à des rayons situés dans un plan vertical passant par l'axe optique du microscope et par la ligne 0 — 180° de la division circulaire sur laquelle on mesure les rotations du porte-objet.

Si l'on fait tourner le porte-objet, on verra dans le microscope la face cristalline a, brillamment illuminée lorsque le plan mené par la direction Z (parallèle à l'axe optique du microscope) et la normale à la face a sera parallèle au plan lumineux, c'est-à-dire lorsque la trace du plan mené par Z et la normale à a sera parallèle à la ligne de foi du limbe. Si on place l'arête Y du cube parallèle à la ligne 0 — 180° du limbe mobile, et si, après avoir mis cette ligne 0 — 180° en coïncidence avec le zéro du vernier fixe, on tourne le limbe de manière à voir

illuminées successivement les faces *a* et *b*, les angles dont le limbe tourné dans l'un et l'autre cas seront ceux qu'on a appelés précé ment *p* Y et *p'* Y.

Si, sans rien changer, on retourne le cube de manière à le fair poser sur le porte-objet par une face normale à X, en mettant l'ar parallèle à la ligne 0 — 180°, on mesurera de la même façon p_1 p_1' Y. Le problème est donc résolu.

Mais il ne serait pas possible de faire une observation précise réglant seulement sur le maximum d'illumination des faces cristall Il faut donc chercher un procédé plus parfait pour saisir le momen la face cristalline est normale au plan lumineux déterminé par la f On y arrive en plaçant dans l'oculaire du microscope un long cyli en flint-glass dont l'indice de réfraction est supérieur à celui du ba de Canada. Ce cylindre, dont les deux bases sont bien parallèles, divisé en deux moitiés par un plan perpendiculaire aux bases; les faces rectangulaires sont polies et recollées au baume de Canada. Le lindre est placé dans l'oculaire de façon que la base supérieure soi foyer de la lentille supérieure de l'oculaire, et normale à l'axe opti On tourne l'oculaire de manière que le plan médian occupé pa baume passe par le 0° du vernier fixe.

Dans ces conditions, lorsque la lumière reçue par le microscop composée tout entière de rayons parallèles au plan médian du cy dre, tout le champ du microscope est également éclairé et trav par une ligne noire qui est la trace du plan méd Mais, si le microscope reçoit de la lumière obliqu plan médian, on voit que les deux portions du ch séparées par la fissure du cylindre seront éclai différemment, car l'une *ab* (fig. 254) est éclairée les rayons qui traversent directement le cylindre et ceux qui subissent la réflexion totale sur le baum Canada, tandis que la partie *ac* ne reçoit que les ra qui ont traversé directement le cylindre; il y a de une plage bordant la fente *a* qui ne reçoit aucun r et paraîtra obscure.

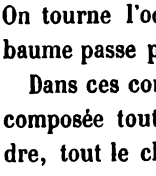


Fig. 254.

En faisant tourner la platine du porte-objet, il arrivera un mon où les rayons réfléchis par la face cristalline (face qu'on contin d'ailleurs à voir directement) entreront en partie dans l'appareil champ sera éclairé, mais il ne le sera également que lorsque le mené par l'axe optique et la normale à la face sera exactement paral

au plan médian du cylindre, c'est-à-dire au plan lumineux vertical qui passe par la fente ; on pourra donc faire avec une grande exactitude les observations desquelles dépend le calcul de l'angle dièdre. Il est clair que l'exactitude est d'autant plus grande que le cylindre de verre introduit dans l'oculaire a une longueur plus considérable.

On augmente encore la sensibilité de l'appareil en interposant entre les deux demi-cylindres de flint une très-mince lame de crown dont l'indice de réfraction est supérieur à celui du baume. La bande de crown placée au foyer sera éclairée, avec tout le reste du champ, lorsque les rayons arriveront parallèles à la direction 0 — 180. Pour peu que l'on tourne le cristal à droite ou à gauche, la bande de crown deviendra obscure, tandis que la partie extérieure du champ sera plus fortement éclairée, soit à droite, soit à gauche. On peut ainsi mesurer à 6′ ou 7′ près les angles des cristaux ayant environ $\frac{1}{100}$ de millimètre. Pour de plus faibles dimensions, le procédé cesse d'être applicable, parce qu'il faudrait alors employer un fort grossissement, et que l'objectif qui deviendrait nécessaire serait assez près du cristal pour l'empêcher de recevoir la lumière de la fente.

CHAPITRE XV

CALCULS CRISTALLOGRAPHIQUES

Nous pouvons maintenant exposer comment on peut résoudre, un cristal donné, le problème fondamental de la cristallographie, peut s'énoncer ainsi : Déterminer la forme primitive, c'est-à-dire culer les dimensions du parallélipipède qui sert de maille au ré cristallin et les caractéristiques des formes simples dont la combi son constitue le cristal proposé.

Étude préalable du cristal. Détermination du mode de symét —Une étude préalable du cristal ou des différents individus cristallin la même espèce dont on dispose permet d'abord, dans la plupart des de déterminer le mode de symétrie, et par conséquent le système c tallin. On peut reconnaître en effet, à la simple vue, si, en faisant to ner le cristal autour d'une certaine droite, les faces se présentent d le même ordre et avec la même disposition après $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}$ de tour si, par conséquent, cette droite est un axe binaire, ternaire, qua naire ou sénaire.

Si cette étude préalable est rendue plus difficile par les développ ments anormaux que quelques-unes des faces peuvent accidente ment présenter, et qui modifient la symétrie apparente, on est, contraire, aidé par l'examen de certaines particularités physiques. C ainsi que les faces qui appartiennent à des lois de dérivation di rentes ont très-souvent un aspect différent. Les unes sont, par ex ple, rugueuses, quand les autres sont polies; les unes sont charg de petites stries fines quand les autres sont parfaitement pures; unes sont très réfléchissantes quand les autres sont ternes, etc. Les vages sont aussi très-dignes d'intérêt. Lorsqu'il y a un clivage, i

répète nécessairement autant de fois que l'exige la symétrie, et toujours avec les mêmes particularités physiques, telles que le même degré de facilité, le même genre d'éclat, etc. S'il y a des clivages parallèles aux faces de plusieurs formes simples, ils présentent au contraire toujours entre eux des différences plus ou moins saillantes.

Il peut arriver, il est vrai, que certains cristaux présentent une symétrie apparente presque parfaite qui peut induire en erreur. Si, par exemple, un cristal qui appartient en réalité au système orthorhombique a cependant le rhombe de la base presque carré, la symétrie du réseau est presque quadratique, et cette quasi-symétrie peut se manifester dans toutes les formes composées. On dit alors que la forme primitive est une *forme limite*. Dans les cas analogues, qui se sont considérablement multipliés dans ces dernières années, il arrive souvent que la symétrie réelle ne se dévoile que par des mesures goniométriques précises. Il peut même arriver, comme nous le verrons plus tard, que les mesures goniométriques elles-mêmes soient insuffisantes, et que pour connaître la véritable symétrie du réseau cristallin on soit obligé d'avoir recours à des moyens d'investigation d'une extrême délicatesse, tels que les phénomènes de la biréfraction.

Quoi qu'il en soit, l'examen préalable du cristal fait toujours connaître la symétrie au moins apparente et approximative et permet de fixer, jusqu'à vérification ultérieure plus précise, non-seulement le système cristallin auquel la substance appartient, mais encore le genre d'hémiédrie qu'elle peut présenter.

Mesures goniométriques. — C'est alors qu'on procède, sur les échantillons dont les faces paraissent les plus nettes (et ce sont en général les plus petits) aux mesures goniométriques. On mesure les angles que font entre elles les différentes faces du cristal, et l'on multiplie les observations jusqu'à ce que la position relative des faces soit complètement déterminée. Il est commode, pour se guider dans ce travail, de tracer une perspective grossière du cristal, et de désigner par une lettre ou par un chiffre chacune des faces qui le composent. On a soin de noter les divers accidents que peuvent présenter quelques-unes de ces faces, qui servent ensuite de repères pour retrouver le nom de chacune d'elles. Il est bon de désigner par une même lettre toutes les faces d'une même forme simple; on les distingue entre elles par des indices différents. La perspective ne montre que les faces tournées d'un même côté du centre; pour donner un nom

aux autres, on peut convenir de désigner par le même signe le
faces opposées par le centre en accentuant le signe de la face
trouve derrière le centre par rapport à l'observateur.

Lorsque toutes les faces ont reçu un nom, et qu'on est sûr d
voir retrouver sur le cristal une face d'un nom donné, on effect
mesures d'angles et on les inscrit au fur et à mesure sur le carnet
servations. On peut noter soit les angles formés par les faces, s
angles formés par les normales aux faces, c'est-à-dire les angle
pôles des faces. Comme c'est toujours l'angle des pôles qui entre
tous les calculs et sert à toutes les constructions graphiques,
aussi celui que maintenant on indique le plus habituellement.
nous conformerons à cet usage. On ne manque pas, lorsqu'on a d
le goniomètre pour la mesure de l'angle de deux faces, de faire
un tour complet à l'axe de l'appareil en notant toutes les fac
ramènent, pendant cette rotation, la coïncidence entre le signal
point de repère, c'est-à-dire toutes celles qui font partie de la
zone que les deux premières.

En même temps que se font ces mesures, on trace une proj
stéréographique grossière des pôles du cristal, en plaçant sur le
grand cercle les pôles des faces qui font partie de la même zon
moyen de cette projection, on s'aperçoit très-aisément du moment
observations sont assez nombreuses pour fixer la position relati
tous les pôles ; et, lorsqu'il n'en est pas ainsi, on voit les
qu'il convient de mesurer encore pour y arriver. Il est d'ailleu
jours indispensable de multiplier, plus qu'il ne le faudrait en
rigueur, les mesures goniométriques, afin de se ménager des
cations.

Il faut ajouter que, dans le choix des angles que l'on mesure,
guidé par deux conditions. La première, c'est que toutes les faces
autant que possible, rattachées directement à des faces auxquel
doit attribuer des notations simples, comme le sont, par exemp
faces du prisme que l'on choisit comme prisme primitif ; on si
ainsi considérablement les calculs. La seconde condition, qui est
quefois contradictoire avec la première, c'est de prendre auta
possible, pour l'une au moins des faces du dièdre, des faces bien
et donnant par réflexion de bonnes images.

Solution générale du problème cristallographique. — S
sons donc que les observations sont arrivées à leur terme, et q
pôles de la projection stéréographique sont liés les uns aux auti

un réseau de triangles sphériques résolubles. Il faut voir maintenant quel parti on peut tirer de ces observations pour la solution du problème cristallographique.

On commence par choisir un nombre suffisant de faces auxquelles on assigne des symboles arbitraires, compatibles, bien entendu, entre eux et avec la symétrie du cristal. Nous verrons plus tard par quelles considérations ce choix initial peut être guidé ; nous nous contenterons de dire ici qu'on prend ordinairement, pour leur donner les symboles les plus simples, les faces du cristal les plus remarquables soit par le développement qu'elles présentent, soit par la constance avec laquelle elles se montrent dans tous les échantillons, soit par les particularités physiques qu'elles possèdent.

Cette opération préliminaire achevée, on calcule la forme primitive qui se déduit des inclinaisons mutuelles des faces dont les symboles ont été fixés arbitrairement. On se sert, pour ces calculs, des formules connues liant les inclinaisons mutuelles et les symboles de ces faces avec les données de la forme primitive qui sont les 3 angles des axes coordonnés, et les rapports de deux des paramètres de ces axes au troisième. Au lieu du réseau primitif dont les paramètres sont a, b, c, on peut calculer ceux du réseau polaire A, B, C. Nous conviendrons de faire $B=1$, et de poser

$$\frac{A}{B}=\alpha \qquad \frac{C}{B}=\gamma.$$

Lorsque la forme primitive est connue, on calcule les symboles de toutes les faces qui n'ont point reçu des symboles arbitraires, en les considérant, lorsque cela est possible, comme déterminées par les intersections de deux zones de symboles connus.

Lorsque pour un certain pôle P ce procédé simple de calcul n'est pas possible, on se procure, par une suite convenable de résolutions de triangles, les angles PX et PY ; le triangle PXY dans lequel on connaît les 3 côtés donne les angles PXY et PYX ; les formules

$$\frac{\sin PXY}{\sin PXZ}=\frac{r}{q}\cdot\frac{b}{c}=\frac{r}{q}\gamma\,\frac{\sin XZ}{\sin XY}$$

$$\frac{\sin PYX}{\sin PYZ}=\frac{r}{p}\cdot\frac{a}{c}=\frac{r}{p}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}\cdot\frac{\sin YZ}{\sin XY}$$

déterminent p, q et r.

Si le pôle P est compris dans une zone pour laquelle les angles de

trois pôles de symboles connus sont donnés, on calcule les ca ristiques de P par les formules connues (page 33) :

$$C' = \frac{\text{I. II}}{\text{I. III}} \cdot \frac{\sin \text{I. III} \times \sin \text{II. IV}}{\sin \text{I. II} \times \sin \text{III. IV}}$$

$$p_{\text{IV}} = p_{\text{II}} - C' p_{\text{III}}$$

$$q_{\text{IV}} = q_{\text{II}} - C' q_{\text{III}}$$

$$r_{\text{IV}} = r_{\text{II}} - C' r_{\text{III}},$$

dans lesquelles I, II, III, désignent les pôles dont les symboles connus, et IV le pôle P. Le signe I. II désigne le plus grand con diviseur des binômes formés avec les caractéristiques de I et de II. On sait que le rapport $\frac{\text{I. II}}{\text{I. III}}$ représente le rapport des longu numériques interceptées, sur la projection gnomonique, entre I d'une part et entre I et III de l'autre, multiplié par $\frac{q_{\text{II}}}{q_{\text{III}}}$.

Si les observations goniométriques étaient rigoureusement exa les calculs faits par le procédé qu'on vient d'indiquer conduirai des caractéristiques entières et généralement très-simples. Mais à c de l'inexactitude inévitable des mesures les calculs donnent soit nombres très-peu différents d'entiers simples, soit des rapports frac naires très-peu différents de fractions simples, et il faut substi aux résultats immédiats du calcul ces entiers ou ces nombres frac naires simples qui s'en rapprochent le plus. C'est ainsi que, si le ca de C', dans les formules précédentes, donne une valeur égale à 2,00 faut prendre 2 pour la vraie valeur. Si, pour le rapport $\frac{p}{q}$ de caractéristiques d'un pôle, on trouve une valeur égale à 0,6671 $+ 0{,}005$, il faut prendre $\frac{2}{3}$ pour la vraie valeur de $\frac{p}{q}$.

Lorsque $\frac{p}{q}$ n'est pas aussi simple que $\frac{2}{3}$, il peut y avoir quelque i titude sur la valeur qu'il faut substituer au résultat direct du ca Pour élucider cette question, on peut réduire le nombre fraction trouvé en fraction continue,

$$\cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \text{etc.}}}$$

les réduites que l'on forme en s'arrêtant successivement aux divers dénominateurs sont des nombres fractionnaires irréductibles, qui s'approchent de plus en plus de la vraie valeur, et sont tels qu'aucun autre nombre fractionnaire plus simple n'en approche davantage. Si le calcul donne, par exemple, 1,4617, les réduites successives seront 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{19}{13}$, $\frac{22}{15}$, $\frac{53}{43}$, etc. Si le nombre $\frac{3}{2}$ ne paraît pas assez approché pour satisfaire au degré d'exactitude des observations, on adoptera le nombre $\frac{19}{13}$.

La recherche des symboles des faces est d'ailleurs éclaircie et simplifiée par l'usage de la projection gnomonique du réseau polaire. Cette projection peut être construite dès qu'on a calculé la forme primitive. La construction peut même être faite directement au moyen des données du problème, en suivant un procédé purement graphique qui a l'avantage de contrôler les résultats du calcul et d'éviter les grosses erreurs.

Dès que la projection gnomonique est construite, les intersections des lignes droites qui représentent les zones donnent immédiatement les symboles des pôles qui sont compris à la fois dans ces diverses zones. On peut aussi placer graphiquement le pôle de chaque face sur la projection en se servant des angles qu'il fait avec les pôles déjà placés; les coordonnées numériques du pôle sont alors facilement mesurées et en donnent les caractéristiques. Bien que ces constructions graphiques ne comportent pas une grande précision, la détermination des symboles des pôles faite de cette manière est le plus souvent suffisante, parce que les caractéristiques sont toujours des nombres entiers simples.

Aussi est-il utile de connaître le procédé général au moyen duquel on peut placer sur la projection gnomonique un pôle Q dont les distances angulaires à deux pôles P et P′ (fig. 235) sont connus. Le plan de la figure est supposé être celui de la projection gnomonique ; y est, sur ce plan, la projection du point de vue O, lequel en est distant d'une longueur égale à $O'y$; $O'e$ est la longueur interceptée par le plan de la figure sur la droite menée par le point de vue perpendiculairement au plan PP′O. On fait tourner, autour de son arête PP′, le dièdre formé par les deux plans POP′ et PQP′ jusqu'à ce que le point O vienne se rabattre en O_1 sur le plan de la figure.

Dans le trièdre qui a pour sommet O_1 et dont les trois arêtes passent par P,P′ et Q, on connaît les trois angles plans qui sont les angles des

trois pôles. En rabattant respectivement autour de O_1P et de O deux angles plans du trièdre ayant O_1Q pour arête commune, O_1 se coucher d'une part suivant O_1q et de l'autre suivant O_1q'. P construction bien connue, on trace Oa, projection de O_1Q sur le PO_1P'. En rabattant le plan O_1aQ autour de O_1a, O_1Q vient en O mène en O_1 à O_1a une perpendiculaire sur laquelle on prend O_1d =

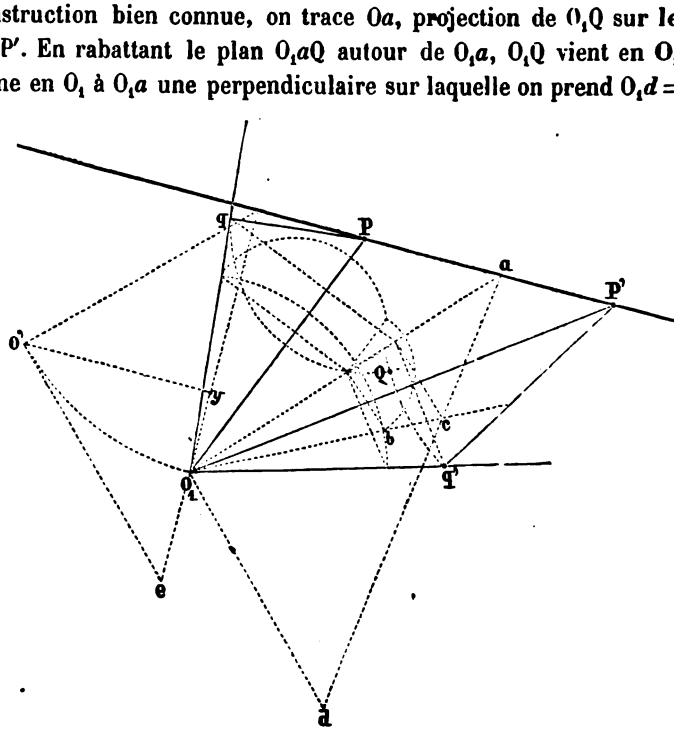


Fig. 255.

ad est le rabattement, autour de O_1a, de l'intersection des plans O_1 PP'Q ; l'intersection c de ad et de O_1b est le rabattement de Q autou O_1a. On obtient aisément les points q et q' qui sont les rabattements pectifs de Q autour de O_1P et O_1P'. Les longueurs Pq et $P'q'$ sont, le plan PP'Q, les distances respectives de Q à P et P'. La position du Q sur le plan de projection sera donc déterminée par l'intersection deux cercles décrits de P et P' comme centres avec Pq et $P'q'$ co rayons.

Lorsque le pôle Q est contenu dans une zone où les distances a laires de 3 pôles P, P', P'', sont connues, on le place aisément sur la jection en rabattant le plan de la zone, et en menant par le rab ment O_1 du point de vue une droite O_1Q faisant avec les lignes O_1P', O_1P'', les angles donnés PQ, P'Q, P''Q.

Calculs inverses donnant les angles des pôles dont les symboles sont connus. — Lorsqu'on a calculé la forme primitive et le symbole de chacune des faces, le problème cristallographique est complétement résolu, mais il ne peut pas être considéré comme rigoureusement résolu, car il faudrait supposer que les observations goniométriques ont été faites avec une exactitude absolue, ce qui est physiquement impossible. La forme primitive calculée est donc erronée, et l'on s'en est déjà aperçu dans le calcul des symboles des faces, puisqu'on a été obligé de substituer aux nombres trouvés directement d'autres nombres plus simples s'en rapprochant le plus possible. Il est donc utile, lorsque tous les calculs sont terminés, de voir avec quelle précision la forme primitive et les symboles adoptés représentent les observations. Tel est le but d'une nouvelle série de calculs dans laquelle on prend pour données la forme primitive et les symboles des faces, et pour inconnues les inclinaisons mutuelles des faces. Les écarts entre les angles ainsi calculés et ceux qui ont été observés directement sont la mesure du degré d'exactitude qui a été obtenu.

Dans ces calculs, on pourrait se servir des formules qui donnent directement le cosinus ou la tangente de l'angle de deux pôles dont les symboles sont donnés, lorsque la forme primitive est connue. On préfère le plus souvent suivre une marche qui est l'inverse de celle qui a été indiquée plus haut pour la recherche des symboles des pôles donnés par leurs relations angulaires.

Soit un pôle P dont le symbole est (pqr). Si l'on joint P à Y et à Z, on aura l'équation :

$$\frac{\sin PZY}{\sin(Z - PZY)} = \frac{q}{p} \cdot \frac{a}{b} = \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{\sin YZ}{\sin XZ}$$

que l'on peut mettre sous la forme :

$$\operatorname{tg} PZY = \frac{m \sin Z}{1 + m \sin PZY},$$

en posant $m = \frac{q}{p} \cdot \frac{a}{b}$; ou encore sous la forme :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{Z}{2} - PZY\right) = \operatorname{tg}\frac{Z}{2} \operatorname{tg}(45^\circ - \varphi),$$

en posant $tg\,\varphi = \frac{q}{p} \cdot \frac{a}{b}$[1]. On pourra donc calculer PZY. On calc
de même PYZ. En résolvant le triangle PYZ, où l'on connaît un c
et les deux angles adjacents, on calculera PY. Pour un autre p
on calculera de la même façon P'Y et P'YZ. Dans le triangle PI
connaîtra donc 2 côtés PY, P'Y, et l'angle compris PYP' = P'YZ –
La formule

$$\cos PP' = \cos PY \cos P'Y + \sin PY \sin P'Y \cos PYP'$$

fera connaître PP'.

On peut encore employer un autre mode de calcul qui est avant
quand on a plusieurs pôles dans la même zone et que le symb
cette zone est simple.

Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une des zones coordonnées, X

Fig. 256.

exemple. Si l'on rabat, autour de XY, sur le plan de la projection
monique (fig. 256), le plan passant par XY et le point de vue O.
le triangle OPY, ayant pour un de ses sommets le pôle P ($pq0$),
aisé, en se rappelant que B = 1 et A = α, de voir qu'on a :

$$\frac{\frac{p}{q}\alpha}{\sin PY} = \frac{1}{\sin PX} = \frac{1}{\sin (XY - PY)}$$

[1] La transformation des formules pour les rendre calculables par logarithm
inutile lorsqu'on se sert des tables d'addition et de soustraction de Gauss qui,
aux tables de logarithmes de M. Hoüel, sont maintenant entre les mains de t
monde.

d'où l'on tire aisément

$$\operatorname{tg} PY = \frac{\frac{p}{q}\alpha \sin XY}{1 + \frac{p}{q}\alpha \cos XY}.$$

Si la zone passe par l'un des pôles coordonnés, Z, par exemple, et un

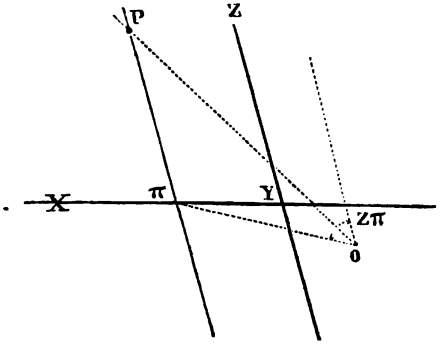


Fig. 257.

pôle π ($pq0$) situé dans la zone coordonnée XY opposée à Z (fig. 257), on calcule d'abord l'angle $Z\pi$ par la formule :

$$\cos Z\pi = \cos YZ \cos \pi Y + \sin YZ \sin \pi Y \cos H,$$

et la longueur $O\pi$ par la relation

$$O\pi^2 = 1 + \frac{p^2}{q^2}\alpha^2 + 2\frac{p}{q}\alpha \cos XY.$$

Pour un pôle quelconque de la zone, $P\left(\frac{p}{q}\ 1\ \frac{r}{q}\right)$, on a ensuite :

$$\frac{\frac{r}{q}\gamma}{\sin P\pi} = \frac{O\pi}{\sin (Z\pi - P\pi)},$$

équation qu'on établit facilement en considérant le triangle $OP\pi$, et de

laquelle on tire

$$\operatorname{tg} P\pi = \frac{\frac{r}{q} \cdot \frac{\gamma}{O\pi} \sin Z\pi}{1 + \frac{r}{q} \frac{\gamma}{O\pi} \cos Z\pi}.$$

Pour une zone quelconque qui rencontre en π la zone XY, et en
zone ZX (fig. 258), on calcule les caractéristiques de Π et de π, et l'c

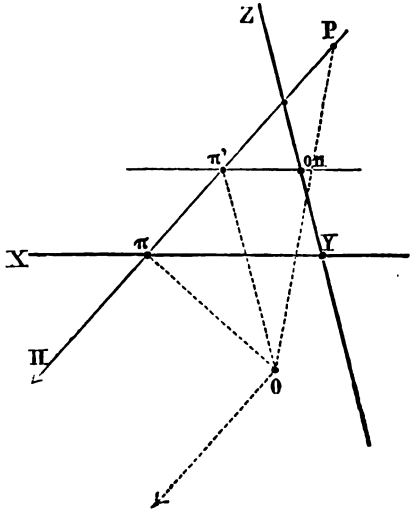


Fig. 258.

tire, dans les zones XY et ZX, les angles ΠX et πX; on calcule ens
$\Pi\pi$ par la formule

$$\cos \Pi\pi = \cos \Pi X \cos \pi X + \sin \Pi X \sin \pi X \cos \Xi.$$

On calcule la longueur $O\pi$ par la formule précédente.

La longueur $\pi\pi'$ qui sépare, sur la projection gnomonique, le p
du pôle π' déterminé par l'intersection de la zone considérée av
parallèle à XY menée par (011), est donnée par une formule anal
aisée à calculer quand on connaît les caractéristiques de π et de π'
On a enfin

$$\frac{\frac{r}{q}\pi\pi'}{\sin P\pi} = \frac{O\pi}{\sin(\Pi\pi - P\pi)}$$

ou

$$\operatorname{tg} P\pi = \frac{\frac{r}{q} \cdot \frac{\pi\pi'}{O\pi} \sin \Pi\pi}{1 + \frac{r}{q} \cdot \frac{\pi\pi'}{O\pi} \cos \Pi\pi}.$$

Cette formule donne les angles de tous les pôles de la zone avec le pôle π.

Discussion de la forme primitive calculée. — Supposons que l'on soit parvenu, en suivant la marche indiquée, à trouver une forme primitive et des symboles qui représentent les observations d'une manière suffisante. On peut en conclure que le réseau défini par la forme primitive admet les faces du cristal au nombre de ses plans réticulaires; c'est une propriété que ce réseau partage non-seulement avec le vrai réseau moléculaire du cristal, mais aussi avec une infinité d'autres. Tous ces réseaux, parmi lesquels le vrai est compris, peuvent être dérivés aisément de celui qui a été calculé en partant des symboles arbitraires d'un certain nombre de pôles. Il suffit, en effet, si l'on conserve un nœud du réseau calculé, de le prendre pour origine d'un parallélipipède dont les autres nœuds aient, par rapport à ce réseau, des coordonnées numériques rationnelles.

Cela revient à dire que, si la projection gnomonique du réseau calculé a été construite, celle du vrai réseau se trouvera parmi celles que l'on obtient en substituant à la maille du plan de projection une autre maille dont les nœuds aient, par rapport aux axes du premier réseau, des coordonnées numériques rationnelles.

Rien n'est donc plus facile, en se servant de la projection gnomonique, que d'étudier les réseaux que l'on pourrait utilement substituer à celui qui a été déduit du choix initial arbitraire des symboles, et d'arriver, par tâtonnement, à trouver un réseau qui satisfasse à toutes les conditions multiples auxquelles le vrai réseau moléculaire doit satisfaire, ainsi que nous le verrons dans la suite. Lorsque ce réseau est déterminé, on en calcule aisément la forme primitive au moyen des formules de changements d'axes coordonnés, et l'on trouve aussi, par des formules connues, les nouveaux symboles des faces.

On voit en définitive que le choix arbitraire des symboles pris comme point de départ des calculs importe assez peu, puisqu'on peut toujours, du réseau calculé au moyen de ces données, déduire un autre réseau qu'il soit aussi vraisemblable que possible de considérer comme identique ou plus exactement comme semblable au vrai réseau moléculaire. Il faut

donc toujours faire ce choix arbitraire de manière à rendre les c aussi faciles que possible.

Ce qu'on vient de dire deviendra plus clair après l'examen qui fait de la solution du problème cristallographique pour chac systèmes cristallins. On ira, dans cet examen, du système le symétrique au système le plus symétrique.

SYSTÈME ASYMÉTRIQUE

Lorsque l'examen minutieux du cristal proposé ne révèle aucu ment de symétrie, celui-ci appartient au système asymétrique et la primitive n'est déterminée que lorsqu'on connaît les 3 inclinaison tuelles des axes coordonnés et les 2 rapports des 3 paramètres axes. Il y a donc 5 inconnues qui pourront être calculées au mo 5 données indépendantes les unes des autres, comme sont, par exe les angles mutuels de 4 faces, dont les symboles sont considérés c connus. Ces symboles représentent les hypothèses arbitraires qu est obligé de faire pour résoudre le problème.

Soit, sur la surface de la sphère de projection (fig. 259), 4 pô P_2, P_3, P_4, dont on se donne arbi ment les symboles, et qui forment u drilatère sphérique déterminé par angles P_1P_3, P_3P_4, P_4P_2, P_2P_1, P_1P_4. posons tracé sur la surface de la sph triangle sphérique XYZ, formé p pôles des 3 axes coordonnés du polaire; prolongeons les grands diagonaux du quadrilatère $P_1P_2P_3P$ qu'à ce que chacun d'eux vienne r

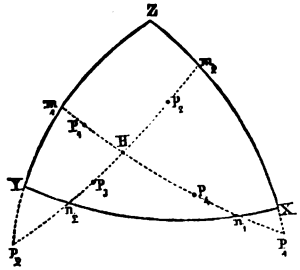


Fig. 259.

trer les 3 côtés du triangle. Les caractéristiques de chacun points d'intersection m_1, m_2, n_1, n_2, p_1, p_2, sont connues, ainsi que du point d'intersection H des grands cercles diagonaux. On peut tre trouver par des résolutions de triangle les angles que fait chacun des 4 pôles donnés.

Soit maintenant un des grands cercles diagonaux P_1P_4 qui cou 3 côtés du triangle respectivement en m_1, n_1, p_1. On connaît les sy des 4 pôles m_1, P_1, H, P_4, situés sur ce grand cercle; on connaît

les angles P_1P_4, P_1H, HP_4 : on peut donc calculer l'angle m_1P_1 au moyen des formules de la page 33. On calculera de même n_1P_1 et p_1P_1. En prenant l'autre grand cercle diagonal P_2P_3, on calculera, par le même procédé, les arcs m_2P_2, n_2P_2, p_1P_2. On connait donc ainsi sur la sphère la position de deux points de chacun des grands cercles du triangle XYZ, et ce triangle se trouve déterminé.

La direction des axes étant connue, on calcule les angles PXY, PXZ, etc., et, au moyen des formules de la page 31, on trouve les paramètres a, b, c du réseau primitif ou plutôt les rapports de deux de ces paramètres au troisième, car il est évidemment impossible d'en connaître, au moins par des observations goniométriques, la grandeur absolue. On peut aussi calculer les rapports des paramètres de deux des axes du réseau polaire au troisième ; des formules très-simples permettent ensuite de passer des paramètres du réseau polaire à ceux du réseau primitif.

La solution générale qui vient d'être exposée n'a guère qu'un intérêt théorique, car on n'est jamais obligé d'y avoir recours. Les pôles pris comme points de départ sont toujours tellement choisis qu'on peut leur donner des notations très-simples, et les calculs deviennent alors beaucoup moins compliqués.

Cas particuliers. — Parmi les cas particuliers qui peuvent être rencontrés, nous examinerons les principaux :

1° *Données arbitraires :* p, g^1, h^1, $f^{\frac{1}{2}}$.

On peut toujours prendre trois formes simples quelconques, et leur assigner les symboles suivants :

$$g^1\{010\} \qquad h^1\{100\} \qquad p\{001\}.$$

Les incidences mutuelles de ces 3 faces donnent les angles des axes X, Y, Z, du réseau polaire :

$$XY = (100)(010) \qquad YZ = (010)(001) \qquad XZ = (001)(100).$$

Il ne reste donc plus, pour connaître la forme primitive, qu'à trouver les paramètres des axes. On peut, à cet effet, prendre une quatrième forme dont les pôles ne sont pas compris dans les plans coordonnés XY, YZ, ZX, et lui donner l'un des 4 symboles

$$f^{\frac{1}{2}} = \{111\} \qquad d^{\frac{1}{2}} = \{1\bar{1}1\} \qquad c^{\frac{1}{2}} = \{\bar{1}11\} \qquad b^{\frac{1}{2}} = \{\bar{1}\bar{1}1\},$$

suivant celui des 4 octants supérieurs formés par les axes coord dans lequel se trouvera compris le pôle considéré.

Supposons, pour fixer les idées, que la forme soit appelée $f^{\frac{1}{2}}$ 260). On s'arrangera pour connaître les triangles $f^{\frac{1}{2}}$ Y, $f^{\frac{1}{2}}$ Z, c'est-à $f^{\frac{1}{2}} g^1$ et $f^{\frac{1}{2}} p$; dans le triangle $f^{\frac{1}{2}}$ YZ, où les 3 côtés seront connu

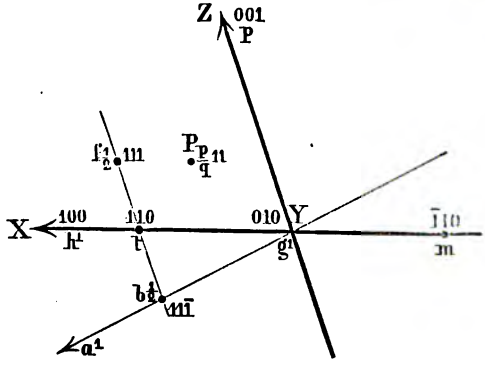


Fig. 260.

calculera les angles $f^{\frac{1}{2}}$ ZY et $f^{\frac{1}{2}}$ YZ, on tirera ensuite les paramè du réseau primitif des formules :

$$\frac{\sin f^{\frac{1}{2}} YZ}{\sin f^{\frac{1}{2}} YX} = \frac{\sin f^{\frac{1}{2}} YZ}{\left(\sin H - f^{\frac{1}{2}} YZ\right)} = \frac{a}{c} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin ZY}{\sin YX}$$

$$\frac{\sin f^{\frac{1}{2}} ZY}{\sin \left(Z - f^{\frac{1}{2}} ZY\right)} = \frac{a}{b} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin YZ}{\sin XZ}$$

2° *Données arbitraires : p, g^1, h^1, t, a^1.*

Mais il est rare qu'on n'ait pas, dans l'une des zones des plans c donnés, des faces plus importantes que celles qui se trouvent au deh Supposons, par exemple, *qu'un certain nombre de formes se trouvent la zone* XY, on choisira la plus remarquable pour lui donner, sui

es cas, le symbole $m\{\bar{1}10\}$ ou $t\{110\}$. On choisira de même la plus importante des formes qui se trouvent dans une autre zone, XZ, par exemple, pour lui donner, suivant les cas, le symbole $a^1\{10\bar{1}\}$ ou $o^1\{101\}$.

Si les formes importantes se trouvaient dans la zone YZ, on donnerait à la plus importante d'entre elles l'un des symboles $e^1\{0\bar{1}1\}$ ou $i^1\{011\}$.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on se donne arbitrairement t et a^1 (fig. 260), on écrira les équations :

$$\alpha = \frac{\sin tg^1}{\sin th^1} = \frac{\sin tg^1}{\sin(g^1h^1 - tg^1)}$$

$$\gamma = \alpha\frac{\sin a^1h^1}{\sin a^1p} = \frac{\sin a^1h^1}{\sin(ph^1 - a^1h^1)}.$$

équations faciles à établir directement sur la projection gnomonique.

La construction graphique des paramètres α et γ du réseau polaire ne présente d'ailleurs aucune difficulté. Pour avoir α, il suffit de prendre $O_1g^1 = 1$ (fig. 261), et de construire un triangle O_1g^1t, dans

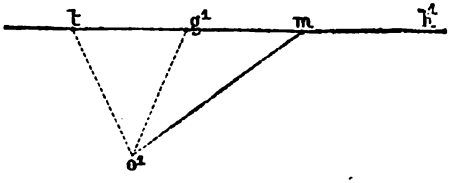


Fig. 261.

lequel l'angle $tg^1O_1 = 180° - g^1h^1 = 180 - XY$, et l'angle $tO_1g^1 = tg^1$; le côté tg^1 du triangle est le paramètre α; il est en effet aisé de voir que le triangle est le rabattement sur le plan de perspective du triangle formé par le point de vue O et les deux pôles t et g^1. On vérifierait directement sur ce triangle l'équation précédente qui donne α.

Quant à γ, on l'obtiendrait en construisant un triangle $tg^1b^{\frac{1}{2}}$ dans lequel $tg^1 = \alpha$, $b^{\frac{1}{2}}g^1t = h^1a^1$ et $tb^{\frac{1}{2}}$ parallèle à ZY. On vérifierait directement sur ce triangle, dont les sommets sont les projections des pôles $g^1, b^{\frac{1}{2}}, t$, la relation précédente qui donne γ en fonction de α.

5° *Données arbitraires :* $p, g^1, h^1, t, \left(\frac{p}{q}\,11\right)$.

Si l'on n'avait qu'une seule forme contenue dans une des zon plans coordonnés, on attribuerait à cette forme, suivant les cas des symboles m, t, e^1, i^1, a^1 ou o^1. On déterminerait ainsi un des paramètres α ou γ, ou le rapport de α à γ. Il faudrait alors, pour ac de résoudre la question, attribuer à une autre forme un symbole pourrait plus être complétement arbitraire. Supposons, pour fix idées, qu'on se soit donné la forme $t\{110\}$ dans la zone g^1h^1. On s pose, pour achever la détermination des paramètres, de donner certain pôle P un symbole arbitraire (pqr).

Or on a :

$$\frac{\sin PZX}{\sin PZY} = \frac{q}{p} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{\sin ZY}{\sin ZX},$$

$$\frac{\sin PYX}{\sin PYZ} = \frac{r}{p} \cdot \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{\sin ZY}{\sin XY}.$$

Les angles PZX, PZY, PYX, PYZ, sont connus ou peuvent être dé des données. La première équation détermine $\frac{q}{p}$, ou p, si l'on fait q La troisième caractéristique r du pôle est donc seule indéterminé la fait arbitrairement égale à 1, et la deuxième équation donne γ.

4° *Données arbitraires : m, t, p, i^1.*

Les trois cas que l'on vient d'examiner comprennent tous les ca sibles, et il semble inutile d'en examiner d'autres. Il arrive cepe que, par des raisons particulières, on est conduit à prendre c points de départ, non plus les formes g^1, h^1 et p, mais les form t et p. Si l'on substituait aux coordonnées de Miller celles de Lévy trois dernières formes seraient parallèles aux plans coordonnés, e serait ramené aux mêmes calculs que précédemment. Si l'on d'autres formes situées dans les zones des plans cordonnés $[pm]$ ou $[mt]$, on les noterait, suivant les cas, $d^{\frac{1}{2}}$, $f^{\frac{1}{2}}$, $c^{\frac{1}{2}}$ ou $b^{\frac{1}{2}}$. Si l'on n posait que de formes situées en dehors des zones précédentes, o attribuerait, suivant les cas, l'un des quatre symboles i^1, e^1, o^1 Après avoir calculé le cristal en se servant des coordonnées de on reviendrait à celles de Miller par les formules de transform connues.

On peut aussi calculer directement la forme primitive et les symboles de Miller. Supposons, pour fixer les idées, qu'on se donne p, m, t et i^1.

On commence par calculer les angles du triangle ptm dont on connaît les 3 côtés. Ces angles sont les inclinaisons mutuelles des faces du parallélipipède qui est la forme primitive de Lévy. Les côtés du triangle sont les angles des arêtes de ce parallélipipède.

Dans le triangle pi^1t, on calcule l'angle $tpi^1 = tpg^1$. Dans le triangle tpg^1, où on connaît un côté tp et les deux angles adjacents, on calcule $pg^1 = ZY$, $pg^1t = H$, et tg^1.

On connaît dans la zone $[mt]$ les angles de 3 pôles $m(\bar{1}10)$, $g^1(110)$, $^t(110)$; on calcule th^1 au moyen de la formule :

$$tg\, th^1 = \frac{\sin mt \sin tg^1}{2 \sin mg^1 - \sin mt \cos tg^1}$$

facile à déduire de la formule générale.

Dans le triangle pg^1h^1, on connaît les côtés pg^1, $g^1h^1 = g^1t + th^1 = XY$, et l'angle compris : on peut donc calculer $ph^1 = ZX$.

Enfin, on a :

$$\frac{\alpha}{\sin tg^1} = \frac{1}{\sin th^1}$$

$$\frac{\gamma}{\sin i^1g^1} = \frac{1}{\sin i^1p}.$$

La construction graphique suivrait aisément le calcul ; on remplacerait la résolution d'un triangle sphérique par la construction connue d'un trièdre dont 3 éléments sont connus.

On pourrait encore, en se donnant p, m, t, se donner g^1, puis un autre pôle $(pq1)$, dont les caractéristiques p et q ne seraient point arbitraires.

PREMIER EXEMPLE

BICHROMATE DE POTASSE

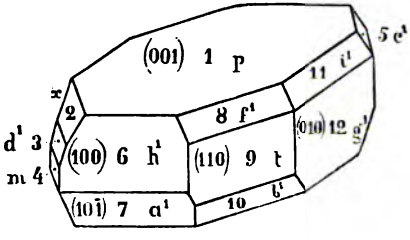


Fig. 262.

OBSERVATIONS GONIOMÉTRIQUES [1]

1.2	38°15′	1.11	69°30′
1.3	54°30′	*1.12	91°28′
1.4	81°38′		
1.5	67°26′		
*1.6	80°4′	4.6	43°51′
*1.7	102°38	4.9	88°18′
		*6.12	91°17′

Zones observées.

1.8	56°8′?	[4.8.11]	[3.6.10]	[4.10 7]
1.9	85°35′			
1.10	114°50′	[6.8.5]	[6.10.3]	

[1] Dans ce tableau et les tableaux analogues qui suivent, les observations réunies le même signe [se rapportent aux angles des pôles d'une même zone. Les observa marquées d'un astérisque sont celles qui ont été choisies pour calculer la form mitive.

DONNÉES ARBITRAIRES

$$1 = 001 = p \qquad 6 = (100) = h^1 \qquad 12 = (010) = g^1$$

$$9 = (110) = t \qquad 7 = (10\bar{1}) = a^1$$

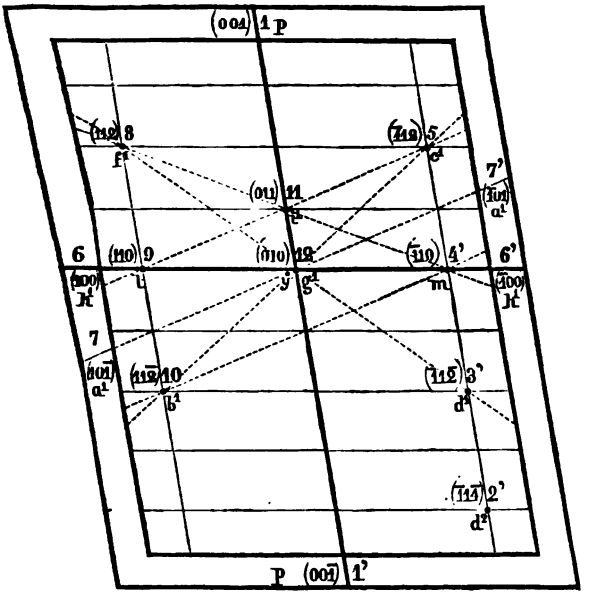


Fig. 263.

I. FORME PRIMITIVE

Angles des axes du réseau polaire.

$$XY = 6.12 = 91°17' \qquad YZ = 1.12 = 91°28' \qquad ZX = 1.6 = 80°4$$

Triangle XYZ.

$$Tg^2 \frac{1}{2} z = \frac{\sin(p - XY)\sin(p - XZ)}{\sin p \sin(p - YZ)}$$

$$z = 180 - yz = 91°16' \qquad H = 180 - xz = 80°6' \qquad Z = 180° - xy = 91°2',7$$

Paramètres du réseau polaire.

$$\frac{\alpha}{\sin tX} = \frac{1}{\sin tX} \qquad \frac{\gamma}{\sin a^1X} = \frac{\alpha}{\sin a^1Z}$$

$$\alpha = 1,0269 \qquad \gamma = 0,40385$$

Paramètres du réseau primitif.

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{\alpha} \sin YZ \operatorname{cosec} ZX \qquad \frac{c}{b} = \frac{1}{\gamma} \sin XY \operatorname{cosec} ZX$$

$$\frac{a}{b} = 0,98850 \qquad \frac{c}{b} = 0,25124$$

II. CALCUL DES SYMBOLES DES FACES

Zone XY.

$$\frac{\frac{p}{q}\alpha}{\sin PY} = \frac{1}{\sin PX}$$

$$P = 4' \qquad PX = 4'.12 = 45°22' \qquad PX = 4'6'' = 45°51'$$

Pôles déterminés par des intersections de zones.

$$\frac{p}{q} = 1,007 \qquad 4' = (\bar{1}10).$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zone}\left[1.11.12\right] = \left[100\right] \\ \text{zone}\left[7.\ 9.11\right] = \left[1\bar{1}1\right] \end{array}\right\} 11 = (011) = i^1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zone}\left[8.9.10\right] = \left[1\bar{1}0\right] \\ \text{zone}\left[4'.11.8\right] = \left[\bar{1}\bar{1}1\right] \end{array}\right\} = 8\ (112) = f^1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zone}\left[6.8.5\right] = \left[0\bar{1}1\right] \\ \text{zone}\left[9.11.5\right] = \left[1\bar{1}1\right] \end{array}\right\} 5 = (\bar{1}12) = c^1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zone}\left[5.4'.3'\right] = \left[\bar{1}10\right] \\ \text{zone}\left[8.12.3'\right] = \left[\bar{1}\bar{1}\bar{1}\right] \end{array}\right\} 3' = (\bar{1}1\bar{2}) = d^1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{zone}\left[6.10.3'\right] = \left[011\right] \\ \text{zone}\left[8.9.10\right] = \left[1\bar{1}0\right] \end{array}\right\} 10 = (11\bar{2}) = b^1$$

Tout ceci peut se voir immédiatement et sans calculs sur la projectio monique (fig. 263).

$$\text{Zone}\,[\mathbf{1}.\mathbf{4}] = [pm] = [\bar{1}10]$$

$$C' = \frac{\text{I.II}}{\text{I.III}} \cdot \frac{\sin(\text{I.III})\sin(\text{II.IV})}{\sin(\text{I.II})\sin(\text{III.IV})}$$

$$p_{\text{IV}} = p_{\text{II}} - C'p_{\text{III}} \qquad q_{\text{IV}} = q_{\text{II}} - C'q_{\text{III}} \qquad r_{\text{IV}} = r_{\text{II}} - C'r_{\text{III}}.$$

$$\text{I} = \mathbf{5} = (\bar{1}12) \quad \text{II} = \mathbf{4}' = (\bar{1}10) \quad \text{III} = \mathbf{3}' = (\bar{1}1\bar{2})$$

$$\text{IV} = \mathbf{2}' = (\bar{1}1\bar{4}) = d^2$$

La projection gnomonique montre immédiatement que le Réseau choisi n'est pas celui qui donnerait aux faces les symboles les plus simples et qu'il vaudrait mieux, sous ce rapport, doubler le paramètre γ de l'axe vertical du Réseau polaire. Les pôles **5**, **8**, **10**, **3'**, auraient alors respectivement pour symboles $(\bar{1}11)$, (111), $(11\bar{1})$, $(\bar{1}1\bar{1})$. Le symbole de **3'** serait $(\bar{1}1\bar{2})$, celui de **7** $(20\bar{1})$, et celui de **11** (021).

III. CALCULS INVERSES.

Zone XY.

$$\operatorname{tg} PY = \frac{-\frac{}{q}\alpha \sin XY}{1 + \frac{p}{q}\alpha \cos XY}$$

$$\frac{p}{q} = \bar{1} \qquad mg^1 = 45°5',1$$

Zone YZ.

$$\operatorname{tg} PY = \frac{\frac{r}{q}\gamma \sin YZ}{1 + \frac{r}{q}\gamma \cos YZ}$$

$$\frac{r}{q} = 1 \qquad i^1g^1 = 22°11',5$$

Pôles quelconques.

$$\operatorname{tg} PYX = \frac{\frac{r}{p} \cdot \frac{a}{c} \sin H}{1 + \frac{r}{p}\frac{a}{c} \cos H}.$$

$\frac{r}{p}$ =	$\bar{1}$	2	$\bar{2}$	4
PYX =	22°33′	34°18′,8	41°51′	50°39′
	a^1YX	f^1YX	b^1YX	d^2YX

$$\text{cotg } Z\pi Y = \text{cotg } ZY \sin \pi Y \text{ cosec } H - \cos \pi Y \text{ cotg } H$$

πY =	tY	mY
ZπY =	180° — 82°4′,16	84°1′

$$\text{cotg } PY = \text{cotg } Z\pi Y \sin PYX \text{ cosec } \pi Y + \text{cotg } \pi Y \cos PYX$$

P =	$f^1(112)$	$b^1(11\bar{2})$	$c^1(\bar{1}12)$	$d^1(\bar{1}1\bar{2})$	$d^2(\bar{1}1\bar{4})$
PY =	55°57′,45	49°59′,26	49°55′,3	53°29′,6	62°37′,65

$$\cos PP' = \cos PY \cos P'Y + \sin PY \sin P'Y \cos PYP'$$

	$pt(001)(110)$	$f^1t(112)(110)$	$b^1t(11\bar{2})(110)$	$pm(001)($
PP′ =	83°53′	28°4′	31°15′	98°22

	$c^1m(\bar{1}12)(\bar{1}10$	$d^1m(\bar{1}1\bar{2})(\bar{1}10)$	$d^2m(\bar{1}1\bar{4})(\bar{1}10)$
PP′ =	30°53′	27°6′	43°40′

	$f^1h^1(112)(100)$	$b^1h^1(11\bar{2})(100)$	$c^1h^1(\bar{1}12)(\bar{1}00)$	$d^1h^1(\bar{1}1\bar{2})($
PP′ =	57°9′	56°12′	54°15′	44°47

	$i^1m(011)(\bar{1}10)$	$i^1f^1(011)(112)$	$c^1i^1(\bar{1}12)(011)$	$i^1t(011)(1$
PP′ =	52°34′	42°25′	41°29′	46°40′

	$ta^1(110)(10\bar{1})$	$mb^1(\bar{1}10)(11\bar{2})$	$b^1a^1(11\bar{2})(10\bar{1})$
PP′ =	49°38′	87′8°	45°17′

RÉCAPITULATION GÉNÉRALE

Forme primitive.

$xy = 88°57',3$ $yz = 88°44'$ $xz = 99°54'$

$a : b : c = 0,98830 : 1 : 0,25124$

ZONES.	ANGLES	MESURÉS.	CALCULÉS.
$[h^1g^1]$ [001]	$^*tg^1$	46°20′	»
	mg^1	45°22′	45°5′
	$^*g^1h^1$ à droite	91°17′	»
$[pg^1]$ [100]	$^*pg^1$ à droite	91°28′	»
	i^1g^1	21°58′	22°11′
$[ph^1]$ [010]	$^*ph^1$ en avant	80°4	»
	$^*h^1a^1$	22°34′	»
$[pt]$ $[1\bar{1}0]$	pt en avant	83°35′	85°52′
	pf^1	56°8′?	55°48′
	pb^1	65°10′	64°53′
$[pm]$ [110]	pm en avant	81°38′	81°58′
	pc^1 adj^1	67°26′	67°29′
	pd^2 adj^1	38°15′	38°18′
	pd^1 sur d^2	54°30′	54°52′
$[g^1a^1]$ [101]	a^1g^1 à droite	»	91°40′
$[f^1d^1]$ $[20\bar{1}]$	f^1g^1	»	55°47′
	g^1d^1	»	53°30′
$[b^1c^1]$ [201]	c^1g^1	»	49°53′
	b^1g^1	»	49°59′
$[f^1c^1]$ $[0\bar{2}1]$	f^1h^1	»	57°9′
	c^1h^1	»	54°15′
$[b^1d^1]$ [021]	b^1h^1	»	56°12′
	d^1h^1	»	44°47′
$[mf^1]$ $[11\bar{1}]$	mi^1	»	52°34′
	i^1f^1	»	42°25′
$[a^1i^1]$ $[1\bar{1}1]$	c^1i^1	»	41°29′
	i^1t	»	46°40′
	a^1t	»	49°38′
$[mb^1]$ [111]	mb^1	»	87°8′
	b^1a^1	»	45°17′

DEUXIÈME EXEMPLE

PÉRICLINE

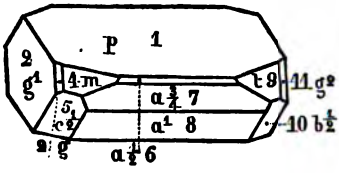


Fig. 264.

OBSERVATIONS GONIOMÉTRIQUES

*1.2	93°29′	*1.9	— 65°4′	2.5	— 59°58
1.4	69°12′	1.10	— 121°57′	2.8	— 85°59
1.5	124° 4′	2.3	— 30°21′	2.10	— 113°23
1.6	98° 8′	*2.4	60°30′	Zones observées.	
1.7	115° à 118°	2.9	119°14′	[5.6. 9]	[4.6
*1.8	127°42′	2.11	149°35′	[5.7. 11]	[3.7

DONNÉES ARBITRAIRES

$$1 = p\,(001) \qquad 2 = g^1\,(0\bar{1}0) \qquad 4 = m\,(1\bar{1}0)$$

$$9 = t\,(110) \qquad 8 = \left(\frac{p}{q}\,1\bar{1}\right)$$

I. RECHERCHE DE LA FORME PRIMITIVE

$$ZY = 1.2' = 86°31'$$

Zone XY

$$tg\,XY = \frac{\sin tY}{\cos tY - \frac{1}{2}\frac{\sin mt}{\sin mY}} \qquad \frac{\alpha}{\sin mY} = \frac{1}{\sin mX}$$

$$tY = 2'.9 = 180 - (2.9) \qquad mt = 4'.9 = 180 - 4.9 \qquad mY = 2'.4'$$

$$XY = 90°10',3 \qquad \alpha = 1.7769$$

Triangle ZYt

$$\sin^2 \frac{1}{2} H = \frac{\sin (p - ZY) \sin (p - tY)}{\sin ZY \sin tY}$$

$$tY = 180° - 2.9 \qquad ZY = 1.2' \qquad tZ = 1.9$$
$$H = 65° 15',7$$

Triangle ZYX

$$\cos ZX = \cos ZY \cos XY + \sin ZY \sin XY \cos H$$
$$\cos X = \cos ZY \operatorname{cosec} XY \operatorname{cosec} ZX - \operatorname{cotg} XY \operatorname{cotg} ZX$$
$$\cos Z = \cos XY \operatorname{cosec} XY \operatorname{cosec} ZX - \operatorname{cotg} XY \operatorname{cotg} ZX$$
$$ZX = 65°19',8 \qquad X = 86°0',9 \qquad Z = 91°55',4$$

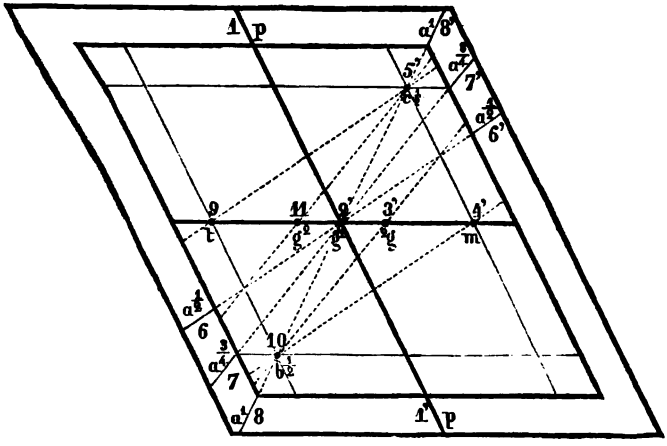


Fig. 265.

Triangle 8ZY

$$\sin^2 \frac{1}{2} 8\,ZY = \frac{\sin(p - ZY)\sin(p - 8.Z)}{\sin ZY \sin 8Z}.$$

$$8Y = 8.2' \qquad 8Z = 8.1,$$
$$8ZY = 92°23',6$$

Or, on a vu que XZY = Z est égal à 91° 55',4, c'est-à-dire égal à 8ZY à une différence très-petite près, attribuable aux erreurs d'observation. Le pôle 8 peut donc être considéré comme étant dans la zone ZX, et il faut faire, dans le symbole de 8, $q = 0$. Ce symbole devient donc $a^1 = (10\bar{1})$.

Zone ZX

$$\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\sin a^1X}{\sin ZX},$$
$$a^1X = a^1Z - YZ = 1.8 - YZ,$$
$$\gamma = 2.0247.$$

FORME PRIMITIVE

XY = 90°10′,3	Z = 91°55′,4	$\alpha = 1{,}7769$	$\frac{a}{b} = 0{,}6286$
ZY = 86°51′	E = 86°0′9	$\gamma = 2{,}0247$	$\frac{c}{b} = 0{,}5527$
ZX = 63°19′,8	H = 63°15′,7		

II. SYMBOLES DES FACES

$$\left.\begin{array}{l}\text{zone}\left[1.4.5\right] = \left[110\right] \\ \text{zone}\left[2.8.5\right] = \left[101\right]\end{array}\right\} \quad 5 = (1\bar{1}\bar{1}) = c^{\frac{1}{2}},$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{zone}\left[1.9.10\right] = \left[1\bar{1}0\right] \\ \text{zone}\left[2.8.10\right] = \left[101\right]\end{array}\right\} \quad 10 = (11\bar{1}) = b^{\frac{1}{2}},$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{zone}\left[6.5.9\right] = \left[1\bar{1}2\right] \\ \text{zone}\left[6.4.10\right] = \left[112\right]\end{array}\right\} \quad 6 = (20\bar{1}) = a^{\frac{1}{2}}.$$

Tout ceci se voit très-aisément sur la projection gnomoni
gure 265.

Zone XY

$$\frac{p}{q} = \alpha . \frac{\sin PY}{\sin (XY - PY)}.$$

P = 11	3′
PY = 2′.11 = 180 − 2.11	2′.3′ = 2.3
$\frac{p}{q} = 0{,}3312 \left(\text{environ } \frac{1}{3}\right)$	$-0{,}3315 \left(\text{environ } \frac{1}{3}\right)$,
$P = (130)g^2$	$(\bar{1}30)^2 g$

$$\left.\begin{array}{l}\text{zone}\left[7.5.11\right] = \left[3\bar{1}4\right] \\ \text{zone}\left[7.3.10\right] = \left[314\right]\end{array}\right\} \quad 7 = (\bar{4}03)\, a^{\frac{3}{4}},$$

III. CALCULS INVERSES

Zone XY

$$\operatorname{tg} PY = \frac{\frac{p}{q}\alpha \sin XY}{1 + \frac{p}{q}\alpha \cos XY}$$

$\frac{p}{q} =$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$,
$PY =$	$30°35'$	$30°41'$.

Zone ZX

$$\operatorname{tg} PX = \frac{\frac{r}{p}\frac{\gamma}{\alpha} \sin ZX}{1 + \frac{r}{p}\frac{\gamma}{\alpha} \cos ZX},$$

$\frac{r}{p} =$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$,
$PX =$	$34°32'$	$51°5'$.

Zone tZ

$$Ot^2 = 1 + \alpha^2 + 2\alpha \cos XY \qquad \operatorname{tg} Pt = \frac{\frac{r}{q}\frac{\gamma}{Ot} \sin tZ}{1 + \frac{r}{q}\frac{\gamma}{Ot} \cos tZ},$$

$$\text{Log } Ot = 0{,}30886.$$

$$\frac{r}{q} = -1 \qquad b^{\frac{1}{2}}\, t = 57°12',$$

Zone mZ

$$\cos mZ = \cos ZY \cos mY - \sin ZY \sin mY \cos H,$$

$$mZ = 110°9'.$$

$$\overline{Om}^2 = 1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos XY \qquad \operatorname{tg} Pm = \frac{\frac{r}{q}\frac{\gamma}{Om} \sin mZ}{1 + \frac{r}{q}\frac{\gamma}{Om} \cos mZ},$$

$$\frac{r}{q} = 1 \qquad c^{\frac{1}{2}}\, m = 55°13',$$

Zone a^1Y

$$\cos a^1Y = \cos XY \cos a^1X - \sin XY \sin a^1Y \cos \Xi,$$

$$a^1Y = 93°31'.$$

$$l^2 = \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos ZX \qquad \operatorname{tg} PY = \frac{\frac{p}{q} l \sin a^1 Y}{1 + \frac{p}{q} l \cos a^1 Y},$$

$\frac{p}{q} =$	-1	1
PY =	60°43′	66°21′.

RÉCAPITULATION GÉNÉRALE

FORME PRIMITIVE

$xz = 116°44',3 \qquad yz = 93°59',1 \qquad xy = 88°4',6$

$a : b : c = 0,62864 : \quad 1 \quad : 0,55271$

ZONES.	ANGLES	MESURÉS.	CALCULÉS.
[mg^1] [001]	*tg^1 à droite	60°46′	60°46′
	*mg^1 à gauche	60°30′	60°30′
	$g^{12}g$ adj^t	30°21′	30°41′
	g^1g^2 id.	30°25′	30°35′
[pg^1] [100]	*pg^1 à gauche	93°29′	93°29′
[ph^1] [010]	$pa^{\frac{1}{2}}$ sur h^1	98°8′	97°42′
	$pa^{\frac{3}{4}}$ id.	115° à 118°	114°25′
	*pa^1 id.	127°42′	127°42′
[pt] [1$\bar{1}$0]	*pt en avant	65°4′	65°4′
	$pb^{\frac{1}{2}}$ sur t	121°57′	122°16′
[pm] [110]	pm en avant	69°12′	68°51′
	$pc^{\frac{1}{2}}$ sur m	121°4′	124°4′
[g^1a^1] [101]	$g^1c^{\frac{1}{2}}$ adj.	59°58′	60°43′
	g^1a^1 sur $c^{\frac{1}{2}}$	85°59′	86°29′
	$g^1b^{\frac{1}{2}}$ adj	66°35′	66°21′.

SYSTÈME BINAIRE

Lorsqu'on reconnaît un plan de symétrie et un seul, le cristal appartient au système binaire, et il est holoédrique : car l'antihémiédrie non holoaxe ne paraît pas être réalisée par la nature. S'il y a un axe binaire et un seul, et si cet axe binaire n'est accompagné ni d'un centre ni d'un plan de symétrie, le cristal appartient au mode hémiédrique holoaxe, à deux formes conjuguées non superposables, du système binaire. La forme conjuguée est droite quand, en regardant le cristal dans la position qui lui est ordinairement assignée, la face supérieure conservée est à droite de l'observateur. En général toutes les formes conjuguées d'un même cristal hémiédrique sont à la fois ou toutes gauches ou toutes droites ; suivant le cas qui se présente, le cristal est appelé gauche ou droit.

Pour déterminer la forme primitive, dans ce système, il faut calculer 3 quantités qui sont : 1° les 2 rapports de deux paramètres a et c au troisième b ; 2° l'inclinaison de l'axe des Z sur l'axe des X.

Cas particuliers remarquables. — I. *Supposons connus les angles*

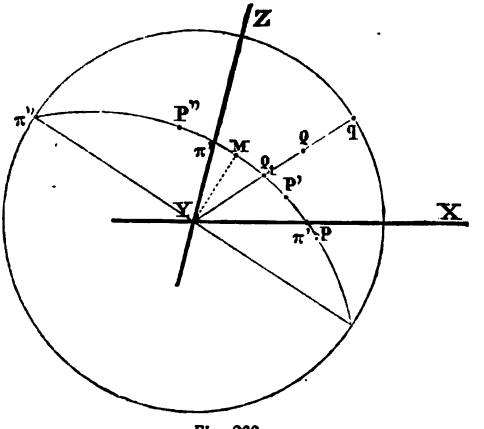


Fig. 266.

mutuels de 3 pôles P, P', P'' (fig. 266) *situés sur la même zone, et l'angle d'un quatrième pôle* Q *avec* Y, ou ce qui revient au même, puisque QQ' = 2PY, l'angle de Q avec son symétrique Q' par rapport à l'axe binaire.

Dans la zone YQ qui rencontre XZ en q, et PP'' en Q_1, on connaît YQ et Yq 90, on peut donc, au moyen des formules de la page 33 cal-

culer YQ_1. Dans la zone PP″, qui rencontre XY, ZY, XZ en π, π'
peut de même calculer $P\pi$, $P\pi'$ $P\pi''$ et $Q_1\pi''$. Le triangle rectilatèr
où l'on connaît YQ_1 et $Q_1\pi''$ donne l'angle $\pi''YQ_1$. On peut donc pla
la sphère π'' et Q_1, ce qui détermine la position du grand cercle P
angles $\pi''\pi'$, $\pi''\pi$ fixent la position respective des axes YX et YZ
paramètres des axes se déduiraient aisément de la position de
π, π', π''.

Il serait aisé de substituer aux calculs une construction gra
sur laquelle nous n'insisterons pas.

II. *On donne la distance d'un pôle* P *aux* 3 *pôles* X, Y, Z (fig.
Les triangles rectilatères PYZ et PYX donnent les relations :

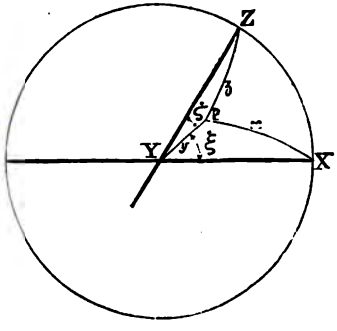


Fig. 267.

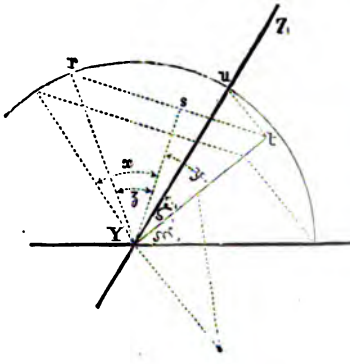


Fig. 268.

$$\cos PYZ = \cos PZ \operatorname{cosec} PY \qquad \cos PYX = \cos PX \operatorname{cosec} PY,$$

qui font connaître PYZ et PYX et par conséquent $H = ZX = PYZ +$
Pour déterminer les paramètres on se sert des équations :

$$\frac{\operatorname{tg} PY}{\sin ZX} = \frac{\frac{r}{q}\gamma}{\sin PYX} = \frac{\frac{p}{q}\alpha}{\sin PYZ}.$$

On pourrait substituer une construction graphique au calcul
commencerait par construire PYZ en prenant (fig. 268) rYs
$sYt = PY$, menant par un point quelconque r de Yz une perpendic
rs à Yz et la prolongeant jusqu'à la rencontre avec Yt; le point
tersection u du cercle ayant Y pour centre et Yr pour rayon a
perpendiculaire menée en t à Yt, détermine un angle $uYt = PY$

construirait de même PYZ. Les directions des axes YX et Yr ainsi que celle de YP étant connues, on déterminerait la position de P en prenant YP $= tg$PY. Les coordonnées de P égales à $\frac{p}{r}\alpha$ et $\frac{q}{r}\gamma$ donneraient les paramètres α et γ.

III. *On donne les symboles de deux pôles* P *et* Q, *ainsi que les angles de ces pôles entre eux et avec* Y (fig. 269).

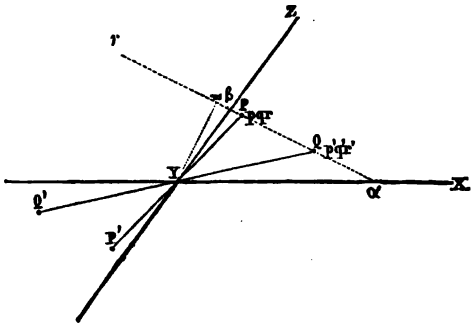


Fig. 269.

Soit r (fig. 269) l'intersection de la zone PQ avec ZX; π et π' les intersections de ZX avec YP et YQ.

Dans le triangle PQY de la projection gnomonique les longueurs PY et QY sont égales à tgPY et tgQY, YPQ $= 180 - \pi r$ et PQY $= \pi' r$; on en déduit sans peine la relation :

$$\frac{\text{tg PY}}{\text{tg QY}} = \frac{\sin \pi' r}{\sin \pi r},$$

d'où l'on déduit π et π' après avoir, dans le triangle PQY, dont on connaît les 3 côtés, calculé l'angle PYQ $= \pi\pi' = \pi r - \pi' r$. Dans la zone ZX, où l'on connaît les distances angulaires des 3 pôles π, π', r, de symboles connus, on calcule πX et πZ, d'où l'on déduit XZ. Les paramètres α et β s'obtiennent ensuite facilement, puisque les positions de P et Q par rapport aux axes sont connues.

Cas particuliers qui se rencontrent le plus habituellement dans la pratique. — Pour examiner le problème tel qu'il se présente habituellement dans la pratique, on supposera donné un cristal quelconque, dont on se propose de chercher la forme primitive et les symboles des faces. Il peut se présenter plusieurs cas.

I. *Le cristal ne possède aucune forme dont les pôles se trouvent dans la zone du plan de symétrie.*

On peut toujours prendre deux formes dont les pôles ne se tr pas dans une même zone passant par Y; on appelle (fig. 270) l $\{110\}$, l'autre e^1 $\{011\}$. Si l'on se donne ensuite les angles :

$$e^1e^1 \text{ par dessus } Y = 2e^1Y,$$

$$mm \quad \text{id.} \quad = 2mY,$$

$$me^1 \text{ par dessus } d^{\frac{1}{2}},$$

on aura :

$$\alpha = \operatorname{tg} mY \qquad \gamma = \operatorname{tg} e^1Y,$$

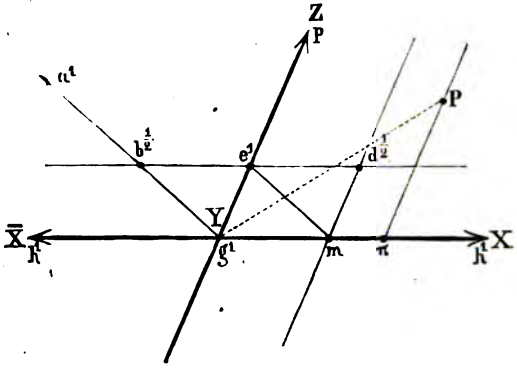


Fig. 270.

et la résolution du triangle e^1mY, dont les 3 côtés sont connus, don l'angle $e^1Ym = ZX$.

Après avoir choisi arbitrairement la forme m, on pourrait donne seconde forme le symbole $d^{\frac{1}{2}}$ $\{111\}$ ou $b^{\frac{1}{2}}$ $\{\bar{1}11\}$. Le triangle d où les 3 côtés devraient être connus, donnerait les angles $d^{\frac{1}{2}}Y$ $md^{\frac{1}{2}}Y$. Dans le triangle rectilatère $d^{\frac{1}{2}}YZ$, on connaîtrait $Yd^{\frac{1}{2}}Z =$ $-md^{\frac{1}{2}}Y$ et $d^{\frac{1}{2}}Y$; on pourrait donc calculer $ZYd^{\frac{1}{2}}$, ce qui permet de connaître $ZX = ZYd^{\frac{1}{2}} + d^{\frac{1}{2}}Ym$. On aurait enfin

$$\frac{\gamma}{\sin d^{\frac{1}{2}}Ym} = \frac{\alpha}{\sin\left(ZX - d^{\frac{1}{2}}Ym\right)} = \frac{\operatorname{tg} d^{\frac{1}{2}}Y}{\sin ZX}$$

II. *Une forme existe dans la zone du plan de symétrie.*

On appelle cette forme p ou h^1. Il faut ensuite faire appel à une autre forme simple, dont la zone ne se confonde pas avec celle de la première. Cette nouvelle forme est appelée m ou e^1 suivant que la première forme a été appelée p ou h^1. Supposons, pour fixer les idées, que la première forme ayant été nommée p, la seconde soit nommée m; on aura dans le triangle rectilatère pYm :

$$\cos mZ = \sin mY \cos ZX,$$

ce qui déterminera ZX étant connus mZ et mY. Dans la zone XY on aura d'ailleurs

$$\alpha = \operatorname{tg} mY.$$

Il ne reste donc plus à trouver que γ, et pour y arriver, il faut s'adresser à une troisième forme, dont la zone ne se confond pas avec celle de la seconde.

1° Si la zone de la troisième forme se confond avec ZY, on l'appelle e^1, et l'on a :

$$\gamma = \operatorname{tg} e^1Y.$$

2° Si la zone de la troisième forme se confond avec l'une des zones mZ, on la note $d^{\frac{1}{2}}$ ou $b^{\frac{1}{2}}$, suivant que le pôle vient tomber dans l'angle aigu ZX ou dans l'angle obtus ZX. Supposons le premier cas, on aura :

$$\frac{\alpha}{\sin d^{\frac{1}{2}} YZ} = \frac{\operatorname{tg} d^{\frac{1}{2}} Y}{\sin ZX},$$

ce qui détermine $d^{\frac{1}{2}}YZ$; et :

$$\frac{\gamma}{\sin\left(ZX - d^{\frac{1}{2}} YZ\right)} = \frac{\operatorname{tg} d^{\frac{1}{2}} Y}{\sin ZX},$$

ce qui détermine γ.

3° Si la zone de la troisième forme ne se confond avec aucune des deux premières, cette forme ne peut plus recevoir un symbole complétement arbitraire. Soit P (pqr) un des pôles de cette forme, on mène

le grand cercle ZP et on le prolonge jusqu'au grand cercle X (fig. 270). Dans le triangle rectilatère ZPY, on a :

$$\cos PZ = \sin PY \cos PYZ,$$

ce qui détermine PYZ, si l'on se donne PZ et PY.

La projection gnomonique donne ensuite aisément :

$$\frac{\operatorname{tg} PY}{\sin ZX} = \frac{\frac{p}{q}\alpha}{\sin PYZ} = \frac{\frac{r}{q}\gamma}{\sin (ZX - PYZ)},$$

ce qui fait connaître $\frac{p}{q}$, et permet de déterminer γ lorsqu'on se arbitrairement $\frac{r}{q} = 1$.

III. *Deux formes existent dans la zone du plan de symétrie.*

On appelle ces formes p et h^1, ce qui donne immédiatement ph

1° Si on a ensuite deux formes dont les zones comprennent, l'u pôles p, l'autre les pôles h^1, on note l'une e^1, et l'autre m, et on

$$\alpha = \operatorname{tg} mY = \operatorname{tg} \frac{1}{2} mm \qquad \gamma = \operatorname{tg} e^1Y = \operatorname{tg} \frac{1}{2} e^1e^1.$$

2° Si la zone d'une forme contenait les pôles h^1 par exemple, la zone d'aucune forme ne contînt les pôles p, on noterait la pr m, ce qui donnerait :

$$\alpha = \operatorname{tg} mY.$$

On prendrait ensuite une troisième forme dont le symbole ne plus complétement arbitraire et l'on terminerait comme dans II, 3°.

3° Si la zone d'aucune forme ne contient p ou h^1, on se don forme quelconque qu'on note $d^{\frac{1}{2}}$ ou $b^{\frac{1}{2}}$ suivant le cas. Supposo les pôles de cette troisième forme tombent dans les angles aigus qu'on doive, par conséquent, la noter $d^{\frac{1}{2}}$, on se donne $d^{\frac{1}{2}}Z$ et $d^{\frac{1}{2}}$ triangle rectilatère $d^{\frac{1}{2}}YZ$, donne

$$\cos d^{\frac{1}{2}} Z = \sin d^{\frac{1}{2}} Y \cos d^{\frac{1}{2}} YZ,$$

ce qui donne $d^{\frac{1}{2}}YZ$. Les relations

$$\frac{\operatorname{tg} d^{\frac{1}{2}} Y}{\sin ZX} = \frac{\alpha}{\sin d^{\frac{1}{2}} YZ} = \frac{\gamma}{\sin\left(ZX - d^{\frac{1}{2}} YZ\right)},$$

font ensuite connaître α et γ.

IV. *Trois formes existent dans la zone du plan de symétrie.*

On appelle ces trois formes p, h^1, a^1 ou p, h^1, o^1 suivant que les pôles de la troisième forme tombent dans les angles obtus ou les angles aigus formés par les pôles des deux premières. On a alors :

$$ph^1 = ZX,$$

$$\frac{\gamma}{\sin a^1X} = \frac{\alpha}{\sin a^1Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\gamma}{\sin o^1X} = \frac{\alpha}{\sin o^1Z}$$

Il faut se donner une quatrième forme. Si la zone de cette forme comprend les pôles p ou h^1, on la note e^1 ou m, et il vient :

$$\alpha = \operatorname{tg} \frac{1}{2} mm \quad \text{ou} \quad \gamma = \operatorname{tg} \frac{1}{2} e^1e^1.$$

Si la zône de la quatrième forme comprend o^1 ou a^1, on la note $d^{\frac{1}{2}}$ ou $b^{\frac{1}{2}}$, et on a :

$$\frac{\operatorname{tg} d^{\frac{1}{2}} Y}{\sin ZX} = \frac{\alpha}{\sin o^1Z} \quad \text{ou} \quad \frac{\operatorname{tg} b^{\frac{1}{2}} Y}{\sin ZY} = \frac{\alpha}{\sin a^1Z},$$

Si, enfin, la zone d'aucune des formes ne comprend les pôles p, h^1, a^1 ou o^1, on prend une forme quelconque dont le symbole ne peut plus être complétement arbitraire. On achèvera comme dans le cas II, 3e.

EXEMPLE

—

EUCLASE

Soit un cristal d'Euclase. La figure 271 qui le représente, est théoriq
il arrive le plus souvent que le cristal ne possède qu'une seule de ses
extrémités. L'autre est supprimée, soit
que le cristal a été brisé, soit parce qu'i
rait par une de ses extrémités sur la
d'où il a été détaché.

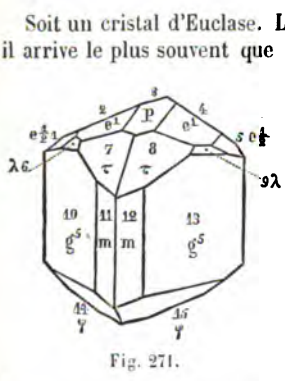


Fig. 271.

On constate que, de part et d'autre d'u
médian qui serait perpendiculaire à la f
et passerait par les arêtes [7.8], [11
[14.15], le cristal se répète symétriquem
ayant son symétrique en 4, 1 en 5, 6 en
en 8, 10 en 13, 11 en 12, 14 en 15,
faces symétriques l'une de l'autre, si elles
pas toujours le même développement, ont les mêmes propriétés
ques. Il est donc probable que le plan médian perpendiculaire à
un plan de symétrie, et l'on s'en assure d'une manière indubitable p
mesures goniométriques qui montrent que l'angle 4.8 est égal à l'angle
8.13 à 7.10, etc. Le plan de symétrie est évidemment parallèle à un plan
gent sur l'arête latérale [13.10']. On constate d'ailleurs qu'un clivage
peut être provoqué suivant cette direction, et tronque souvent l'arête précéd
Il n'y a pas d'autre plan de symétrie que celui qui vient d'être défini : c
faces postérieures ne sont pas symétriques de celles qui sont en avant,
faces inférieures ne sont pas symétriques non plus des faces supérieure
cristal ne peut donc appartenir qu'au mode holoédrique du système binai
On constate, d'ailleurs, que les faces 10, 11, 12, 13 forment une zone
vant l'axe de laquelle le cristal est ordinairement allongé. On prend cet a
zone pour l'axe Z, et l'on choisit la forme 10.12 pour lui donner le symbo
{110}.

A la partie supérieure du cristal se trouve une zone remarq
[1.2.3.4.5], composée de trois formes simples 1.5, 2.4 et de la forme 3 per
diculaire au plan de symétrie. On prend cette zone pour la zone [pg^1] ; la fa
sera la base p; la forme 2.4, qui est la plus développée de celles de la
reçoit le symbole le plus simple possible $e^1 = \{011\}$.

Les observations goniométriques ont donné les résultats suivants :

*11.12	65°.0′	2. 7	39°39′
10.13	87°20′	4.12	71°55′
* 2. 4	36°18′	14.15	74°11′
1. 5	66°28′	1.15′	41°34′
4. 9	80°12′	7.15′	84°18′
7. 8	23°48′	7. 1	42°46′
9.12	31°50′	2.12′	88°35′,5
5.12	60°40′	Zones constatées : [3.13.15] et [3.10.14]	

Données arbitraires :

$$2 \text{ et } 4 = e^1 \qquad 11 \text{ et } 12 = m,$$

I. Recherche de la forme primitive

$$\alpha = \operatorname{tg} mY \qquad \gamma = \operatorname{tg} e^1Y,$$

$$mY = \frac{1}{2}\left(11.12'\right) \qquad e^1Y = \frac{1}{2}\left(2.4'\right),$$

$$\alpha = 1,56967 \qquad \gamma = 0,48437.$$

Triangle mYe^1

$$m = (\bar{1}10),$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} ZY = \frac{\sin(p - e^1Y)\sin(p - mY)}{\sin e^1Y \sin mY},$$

$$me^1 = 2.12',$$

$$180 - ZX = 100°16' \qquad ZX = 79°44'.$$

II. Calculs des symboles des faces

Zone ZY

$$\frac{r}{q} = \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} PY,$$

$$P = 1 \qquad PY = \frac{1}{2}\left(180° - 1.5\right) \qquad \frac{r}{q} = 0,5003 = \frac{1}{2},$$

$$1 = \left\{021\right\} e^{\frac{1}{2}},$$

Zone XY

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\alpha} \operatorname{tg} PY,$$

$$P = 10 \quad PY = \frac{1}{2}\left(180 - 10.13\right) \quad \frac{p}{q} = 0.6674 = \frac{2}{3} \quad 10 = \left\{230\right\} g^{\frac{3}{2}},$$

Triangle $e^1 7 Y$

$$\sin^2 \frac{1}{2} e^1 Y 7 = \frac{\sin(p - 7Y)\sin(p - e^1 Y)}{\sin 7Y \sin e^1 Y};$$

$$7Y = \frac{1}{2}\left(180 - 7.8\right) \qquad e^1 7 = 2.7,$$

$$e^1 Y 7 = 40°38',$$

$$\frac{p}{q} = \frac{1}{\alpha} \sin e^1 Y 7 \frac{\operatorname{tg} 7.Y}{\sin ZX} \qquad \frac{r}{q} = \frac{1}{\gamma} \sin\left(ZX - e^1 Y 7\right) \frac{\operatorname{tg} 7.Y}{\sin ZX},$$

$$\frac{p}{q} = 2.0005 \qquad \frac{r}{q} = 0.9971,$$

$$7 \text{ et } 8 = \{211\} = \tau,$$

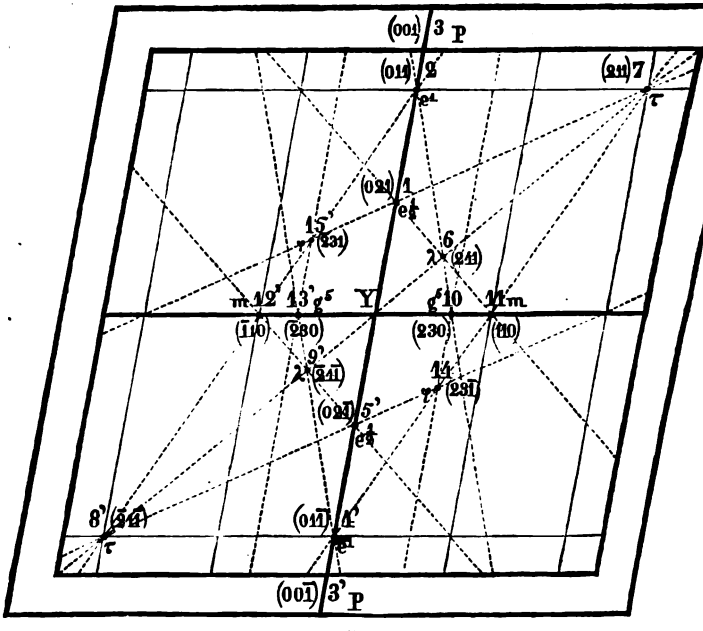


Fig. 272.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zone } [2.6.10] = [3\bar{2}2] \\ \text{Zone } [7.6.Y] = [10\bar{2}]\end{array}\right\} \; 6 \text{ et } 9 = \{241\} = \lambda.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zone } [1.7.15'] = [12\bar{4}] \\ \text{Zone } [3.13.15] = [320]\end{array}\right\} \; 14 \text{ et } 15 = \{\bar{2}31\} = \varphi.$$

A l'inspection de la projection gnomonique, on voit qu'il serait peu

éférable de doubler le paramètre de l'axe des X; la forme $\{7.8\}$ deviendrait $\frac{1}{2}$, la forme $\{10.12'\}$ deviendrait g^5, et la forme $\{11.13\}$ serait g^2.

On pourrait aussi substituer aux axes des X et des Z choisis, les diagonales du arallélogramme construit sur les paramètres 2α et γ. Les nouveaux axes seraient alors presque perpendiculaires, puisque $2\alpha = 2 \times 1{,}56967 = 3{,}13934$ st peu différent de $\gamma = 3{,}05050$.

III. Calculs inverses

$$\operatorname{tg} PYZ = \frac{\frac{p\alpha}{r\gamma} \sin ZX}{1 + \frac{p\alpha}{r\gamma} \cos ZX},$$

$$P = \tau\,(211) \qquad \varphi\,(\bar{2}31),$$

$$\frac{p}{r} = 2 \qquad -2,$$

$$PYZ = 40°33',2 \qquad 51°7'.$$

Calculs de PY.

1° Zone YZ

$$\operatorname{tg} PY = \frac{r}{q}\gamma,$$

$$1 = \qquad \frac{r}{q} = \frac{1}{2} \qquad PY = 56°45',$$

2° Zone XY

$$\operatorname{tg} PY = \frac{p}{q}\alpha,$$

$$P = g^2 \frac{p}{q} = \frac{2}{3} \qquad PX = 46°18'.$$

3° Zones quelconques.

$$\operatorname{tg} PY = \sin ZX \frac{\frac{p}{q}\alpha}{\sin PYZ},$$

$$P = \tau\,(211) \qquad (241) \qquad (\bar{2}31),$$

$$\frac{p}{q} = 2 \qquad \frac{1}{2} \qquad -\frac{2}{3}$$

$$PY = 78°,6',8 \qquad 49°54' \qquad 52°54'.$$

Angles de 2 pôles quelconques PP'.

$$\cos PP' = \cos P'Y \cos P'Y + \sin PY \sin P'Y \cos PYP',$$

	$me^{\frac{1}{2}}(110)(021)$	$\lambda e^{\frac{1}{2}}(241)(021)$	$\varphi e^{\frac{1}{2}}(\bar{2}31)(021)$
PP' =	65°10'	32°57'	41°18'
	$\tau e^{2}(211)(021)$	$g^{5}e^{1}(230)(011)$	$\lambda e^{1}(241)(011)$,
PP' =	42°46'	70°16'	41°9'
	$\tau e^{1}(211)(011)$	$me^{1}(011)(\bar{1}10)$	$me^{1}(011)(110)$.
PP' =	39°35'	88°38'	71°56'.

Angles des pôles avec Z (001).

$$\cos PZ = \sin PY \cos PYZ.$$

	$\tau(211)$	$m(110)$	$g^{5}(230)$	$\varphi(\bar{2}31)$	$\lambda(241)$,
PZ =	41°58'	81°21'	82°35'	59°57'	54°28'.

RÉCAPITULATION GÉNÉRALE

Forme primitive.

$xz = 100°\,16'$ $\quad a : b : c = 0{,}6474 : 1 : 0{,}3331.$

		ANGLES MESURÉS.	ANGLES CALCULÉS.
[XY] [001]	*mm sur g^1	115°	115°
	g^5g^5 id.	92°40'	92°36'.
[ZY] [$\bar{1}$00]	*e^1e^1 sur g^1	143°32'	143°42',
	$e^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}}$ id.	113°32'	113°30'.
[Zτ] [1$\bar{2}$0]	$p\tau$ adj^t.	»	41°58'.
[Zm] [110]	pm en av^t.	»	81°21'.

[Zλ] [2$\bar{1}$0]	$p\lambda$ en av^t.	»	54°28′.
[Zg^5] [3$\bar{2}$0]	pg^5 en av^t.	»	82°35′,
	$p\varphi$ en arrière.	»	59°57′.
[e^1X] [01$\bar{2}$]	$e^1\tau$ adj^t.	39°39′	39°35′.
[τY] [10$\bar{2}$]	ττ sur g^1	156°12′	156°13′,6,
	λλ sur g^1	99°48′	99°48′.
[me^1] [1$\bar{1}$1]	me^1 sur $d^{\frac{1}{2}}$	71°55′	71°56′.
[me^1] [11$\bar{1}$]	*me^1 sur φ	88°35′,5	88°35′,5.
[$me^{\frac{1}{2}}$] [1$\bar{1}$2]	$\lambda e^{\frac{1}{2}}$ adj^t.	32°50′	32°57,
	$me^{\frac{1}{2}}$ en av^t.	64°40′	65°10′.
[$\tau e^{\frac{1}{2}}$] [12$\bar{4}$]	$\bar{3}\tau e^{\frac{1}{2}}$ adj.	42°46′	42°46′,
	$\varphi e^{\frac{1}{2}}$ id.	41°34′	41°18′.
[e^1g^5] [3$\bar{2}$2]	e^1g^5 en av^t.	»	70°16′,
	λg^5 adj^t.	»	42°46′.

SYSTÈME TERBINAIRE.

Si le cristal possède au moins 2 axes binaires, ce qui en entraîne un troisième, et s'il possède en outre deux plans de symétrie seulement passant par l'un des axes binaires et non perpendiculaires aux deux autres, il appartient au mode antihémiédrique du système quadratique. Si, possédant 3 axes de symétrie binaire, il possède en outre 3 plans de symétrie respectivement perpendiculaires aux 3 axes, le cristal appartient au mode holoédrique du système terbinaire. Si aux 3 axes de symétrie ne viennent s'ajouter ni centre ni plans de symétrie,

la cristal appartient au mode holoaxe, à 2 faces conjugées non superposables, du système terbinaire. Une forme est droite si, en regardant en face le pôle d'un axe binaire, et plaçant l'un des 2 autres axes vertical et l'autre horizontal, le pôle de la face conservée se trouve en avant dans le quadrant supérieur antérieur droit. En général les cristaux ne possèdent pas en même temps de formes droites et de formes gauches. Il peut arriver cependant que deux formes conjuguées se présentent en même temps, mais alors l'une d'elles est beaucoup plus développée que la seconde. On appelle droits les cristaux dans lesquels les formes droites sont les plus développées, et gauches les autres.

Le sulfate de magnésie, celui de zinc, celui de nickel, etc., ainsi que l'oxalate neutre d'ammoniaque, les bitartrates d'ammoniaque, de soude, de potasse, l'asparagine, le glucosate de chlorure de sodium et le formiate de strontiane, etc., appartiennent à ce mode hémiédrique.

Si le cristal n'a qu'un axe binaire, mais 2 plans de symétrie passant par cet axe, le cristal appartient encore au système terbinaire, mais au mode antihémiédrique. Le cristal n'est pas terminé de la même manière aux deux extrémités de l'axe binaire conservé. La calamine, le phosphate ammoniaco-magnésien, le sucre de lait possèdent ce genre de symétrie.

On a, pour les cristaux de ce système, à déterminer deux quantités, qui sont les rapports de deux des paramètres au troisième. Si l'on suppose donnés les angles d'un pôle P avec deux autres P′ et P″, les équations qui donnent cos PP′ et cos PP″ sont deux équations du 2e degré par rapport aux deux inconnues qui sont ainsi déterminées.

Le calcul dans le cas général serait très-pénible ; on le simplifie toujours en choisissant les pôles P, P′, P″ de manière que les symboles de quelques-uns d'entre eux soient simples.

Cas particuliers. — I. Supposons, par exemple, qu'on ait mesuré pour une même forme simple les angles 2α, 2β, formés respectivement autour des axes X et Y par les pôles des faces opposées. Les angles α et β sont ceux qui sont formés par un pôle P (pqr) de la forme avec les axes X et Y ; l'angle γ formé par le même pôle avec Z est donné par la formule connue

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

On a d'ailleurs (page 32)

$$\frac{\cos\alpha}{\frac{p}{a}} = \frac{\cos\beta}{\frac{q}{b}} = \frac{\cos\gamma}{\frac{r}{c}},$$

d'où l'on tire les deux rapports $\frac{a}{c}$ et $\frac{b}{c}$.

On pourrait encore remarquer que, dans le triangle PXY, on a

$$\cos PXY = \frac{\cos PY}{\sin PX} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}.$$

On a ensuite

$$\frac{\sin PXY}{\sin PXZ} = \operatorname{tg} PXY = \frac{r}{c} : \frac{q}{b},$$

et

$$\frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = \frac{p}{a} : \frac{q}{b}.$$

Une construction graphique très-simple permettrait aussi de résoudre la question.

Soit XY, et XZ (fig. 273) les axes de la projection gnomonique. On construit un triangle rectangle XOP dont lequel OX est égal au paramètre de l'axe X pris pour unité, et l'angle O est égal à α. Avec XP pour rayon, on décrit un cercle; on mène Xl faisant avec XY un angle $\frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$, et par le point l, où cette droite rencontre le cercle, on mène une perpendiculaire à la ligne Xm faisant avec Xl un angle égal à β. Par le point m on mène mn perpendiculaire sur XY, et on la prolonge jusqu'à la rencontre avec le cercle en P; P est la projection du pôle donné. En effet, il est aisé de voir que PX $= tg$, et que cos PXY $=$ $\frac{Xm}{XP \sin \alpha} = \frac{Xl \cos \beta}{XP \sin \alpha} = \frac{\cos \beta}{\sin \alpha}$.

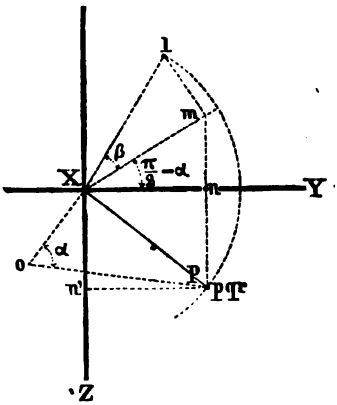


Fig. 273.

Le pôle P étant placé, il est aisé de trouver les paramètres au moyen des projections n et n' de P sur les deux axes. On a en effet :

$$Xn = \frac{q}{p} \cdot \frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad Xn' = \frac{r}{p} \cdot \frac{c}{a}.$$

II. On peut encore se donner les angles PX, P'X, qui correspond deux pôles P et P' appartenant à deux formes simples différentes. dans ce cas :

$$\cos PX = \frac{pA}{\sqrt{p^2A^2 + q^2B^2 + r^2C^2}},$$

$$\cos P'X = \frac{p'A}{\sqrt{p'^2A^2 + q'^2B^2 + r'^2C^2}},$$

d'où l'on tire aisément :

$$\frac{B^2}{A^2} = \frac{p^2r'^2 \operatorname{tg}^2 PX - p'^2r^2 \operatorname{tg}^2 P'X}{q^2r'^2 - q'^2r^2} = \frac{a^2}{b^2};$$

$$\frac{C^2}{A^2} = \frac{-p^2q'^2 \operatorname{tg}^2 PX + p'^2q^2 \operatorname{tg}^2 P'X}{q^2r'^2 - q'^2r^2} = \frac{a^2}{c^2}.$$

III. On peut donner les angles de 3 prismes rhomboïdaux, m, On aura :

$$\cos mm = \cos(110)(\bar{1}10) = \frac{-A^2 + B^2}{A^2 + B^2},$$

d'où l'on tire :

$$\frac{A}{B} = \frac{a}{b} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(110)(\bar{1}10) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} mm; (mm \text{ par dessus } h^1).$$

On trouverait de même :

$$\frac{C}{A} = \frac{a}{c} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(101)(\bar{1}01) = \operatorname{cotg} \frac{1}{2} e^1e^1; (e^1e^1 \text{ par dessus } p).$$

$$\frac{C}{B} = \frac{b}{c} = \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(011)(0\bar{1}1) \quad \operatorname{cotg} \frac{1}{2} a^1a^1; (a^1a^1 \text{ par dessus } p)$$

On a souvent l'occasion de prendre comme données les angles face (pqr) avec celles du prisme primitif $\{110\}$. On a dans ce cas

$$\operatorname{tg}(pqr)(110) = \frac{\sqrt{r^2(B^2C^2 + A^2C^2) + (p-q)^2A^2B^2}}{pA^2 + qB^2},$$

$$\text{ou } \cos(pqr)(110) = \frac{pA^2 + qB^2}{\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{p^2A^2 + q^2B^2 + r^2C^2}},$$

Si la forme simple était une protopyramide $b^{\frac{r}{2p}} = \{ppr\}$, on aura

$$\operatorname{tg} mb^{\frac{r}{2p}} = \operatorname{tg}(110)(ppr) = \frac{r}{p}\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}\,;\ mb^{\frac{r}{2p}} \text{adjacent.}$$

$$\operatorname{tg} mb^{\frac{1}{2}} = \operatorname{tg}(110)(111) = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

IV. Supposons les trois pôles P, P′, P″ sur la même zone. Cette zone prolongée rencontre en α, β, γ les zones XY, ZX et ZY. Les symboles et les distances angulaires de α, β, γ peuvent être connus.

Dans les deux triangles rectangles $Z\beta\gamma$ et $X\beta\gamma$ on a :

$$\operatorname{tg} z\beta = \operatorname{tg} \beta\gamma \cos \beta \qquad \operatorname{tg} X\beta = \operatorname{tg} \beta\alpha \cos \beta,$$

et, à cause de $tg\, X\beta = -\operatorname{cotg} Z\beta$,

$$\operatorname{tg}^2 Z\beta = -\frac{\operatorname{tg} \beta\gamma}{\operatorname{tg} \beta\alpha}.$$

On aura de même :

$$\operatorname{tg}^2 Z\gamma = \frac{\operatorname{tg} \beta\gamma}{\operatorname{tg} \alpha\gamma}.$$

On peut donc connaître $Z\beta$ et $Z\gamma$, ce qui donne la position des plans coordonnés par rapport à la zone. Les paramètres des axes se trouvent aisément, car si l'on appelle $(h0k)$ et $(0h'k')$ les symboles de β et de γ, on a :

$$\frac{\cos \beta X}{\cos \beta Z} = -\operatorname{tg} Z\beta = \frac{k}{c}\cdot\frac{a}{h},$$

et

$$\frac{\cos \gamma Y}{\cos \gamma Z} = \operatorname{tg} Z\gamma = \frac{h'}{b}\cdot\frac{c}{k'}.$$

On peut substituer au calcul une construction graphique très-simple. Par un point O_1 (fig. 274) quelconque on mène un faisceau de 3 lignes O_1P, O_1P', O_1P'' faisant entre elles les angles PP', $P'P''$. On prend sur l'une d'entre elles une longueur arbitraire O_1P, et par le point P on mène à

travers le faisceau une transversale telle que les segments int soient dans les rapports suivants :

$$\frac{PP'}{PP''}=\frac{\frac{p}{r}-\frac{p'}{r'}}{\frac{p}{r}-\frac{p''}{r''}}.$$

La ligne PP″ ainsi construite représente la projection gnomon la zone PP″ de l'espace sur un plan parallèle à XY. Il est fa

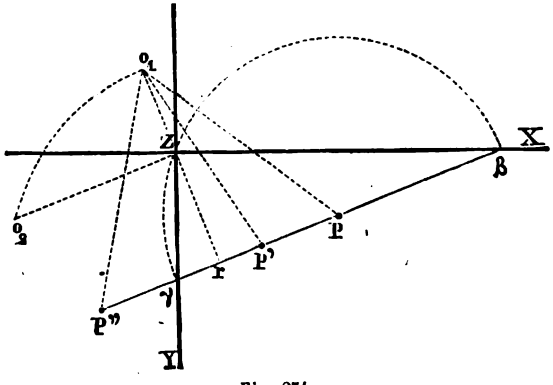


Fig. 274.

placer sur cette droite les points de rencontre γ et β avec ZY puisque

$$\frac{P\gamma}{PP'}=\frac{\frac{p}{r}}{\frac{p}{r}-\frac{p'}{r'}}, \quad \text{et} \quad \frac{P\beta}{PP'}=\frac{\frac{q}{r}}{\frac{q'}{r'}-\frac{q}{r}}.$$

La projection gnomonique du pôle Z doit se trouver sur la p diculaire menée de O_1 sur PP″ ; elle se trouve également sur la circonférence décrite avec $\beta\gamma$ pour rayon. Le point Z déterm droites $Z\beta$ et $Z\gamma$ donnent ZX et ZY, et les coordonnées numériqu nues de P, P′, P″ donnent immédiatement les paramètres A et B au paramètre C, on l'obtient en menant en Z une perpendicula O_1Z, et prenant $rO_1 = rO_2$.

Cas particuliers qui se rencontrent le plus habituellement dans tique. — Lorsqu'on a à calculer la forme primitive d'un cristal q que, il peut se présenter les cas principaux suivants :

I. *Il n'y a pas de pôles dans les plans de symétrie.* On assigne alors à une forme simple quelconque le symbole $b^{\frac{1}{2}}\{111\}$. On mesure les angles de $b^{\frac{1}{2}}$ avec deux des pôles d'axes binaires, X et Z, par exemple; on a :

$$\cos b^{\frac{1}{2}}X = \sin b^{\frac{1}{2}}Z \cos b^{\frac{1}{2}}ZX,$$

ce qui détermine $b^{\frac{1}{2}}ZX$ et, par conséquent, la position des axes coordonnés. Les équations

$$a \cos b^{\frac{1}{2}}X = b \cos b^{\frac{1}{2}}Y = c \cos b^{\frac{1}{2}}Z$$

donnent les paramètres.

Il peut arriver que, le cristal étant incomplet, il ne soit pas possible de mesurer les angles du pôle désigné sous le nom de $b^{\frac{1}{2}}$ avec deux pôles d'axes binaires. Supposons qu'on n'ait à sa disposition que le pointement formé par les 4 faces autour du pôle Z. On mesure alors l'angle $(111)(\bar{1}\bar{1}1) = 2b^{\frac{1}{2}}Z$ et l'un des angles $(111)(1\bar{1}1) = 2\left(\frac{\pi}{2} - b^{\frac{1}{2}}Y\right)$, $(111)(\bar{1}11) = 2\left(\frac{\pi}{2} - b^{\frac{1}{2}}X\right)$. Supposons que l'angle mesuré soit $(111)(1\bar{1}1)$, le triangle sphérique rectilatère $b^{\frac{1}{2}}ZY$ donne :

$$\cos b^{\frac{1}{2}}ZY = \cos b^{\frac{1}{2}}Y \operatorname{coséc} b^{\frac{1}{2}}Z.$$

La position des axes coordonnés étant ainsi fixée, on détermine les paramètres par les équations :

$$\frac{A}{C} = \operatorname{tg} b^{\frac{1}{2}}Z \cos b^{\frac{1}{2}}ZX \qquad \frac{B}{C} = \operatorname{tg} b^{\frac{1}{2}}Z \sin b^{\frac{1}{2}}ZX.$$

II. *Si l'on a une forme dont les pôles sont dans un plan de symétrie*, on la note m, a^1 ou e^1. On prend ensuite une autre forme quelconque à laquelle on ne peut plus donner un symbole complétement arbitraire.

Supposons que la forme du plan de symétrie soit notée m, et soit P un des pôles de la seconde forme; on a, dans le triangle rectilatère PZm,

$$\cos PZm = \cos Pm \operatorname{coséc} PZ;$$

PZm et par conséquent PZX = PZm + mZX sont ainsi connus. On d'ailleurs

$$\cot g\ PZX = \frac{p}{q};$$

$\frac{p}{q}$ ne peut donc pas être pris arbitrairement, mais on peut poser $\frac{r}{q} =$ et l'on a

$$\frac{A}{B} = tg\ mY \qquad \frac{A}{C} = tg\ PZ \cos PZX.$$

III. *Si les pôles de deux formes sont dans des plans de symétrie*, on l note m, e^1 ou a^1.

Supposons que l'une de ces formes étant notée m, l'autre soit notée e on calculera la forme primitive par les relations

$$tg\ mY = tg\frac{1}{2}mm = \frac{A}{B} \qquad tg\ e^1Z = tg\frac{1}{2}e^1e^1 = \frac{A}{C}.$$

EXEMPLE

HYPERSTHÈNE DU MONT DORE

Le cristal représenté figure 275 est symétrique par rapport à trois plans mé dians, l'un horizontal et parallèle à **3**, les deux autre verticaux et parallèles respectivement à **15** et à **17** Chacun de ces plans est perpendiculaire à un ax binaire. Le cristal appartient donc au système terbi naire. On donne arbitrairement à la forme **3** le sym bole p $\{100\}$, à la forme **15** le symbole h^1 $\{010$ et à la forme **17** le symbole g^1 $\{100\}$.

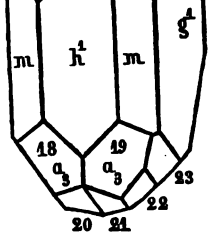


Fig. 275.

Dans la zone verticale, qui est la plus développée, o assigne à la forme **14.16** le symbole m $\{110\}$. La zon **[1.2.3.4.5]** est la zone pg^1, elle est moins développée que la zone inclinée **[6.8.11.17]**, et lesface y sont moins nettes. On choisit dans la zone **[6.8.11.17** une forme **7.10**, dont les faces se trouvant respectivement dans une même zone avec p et m doiven être notées $b^{\frac{r}{2p}}(ppr)$; on fait arbitrairement $p = r = 1$.

Les observations goniométriques sont les suivantes :

* 14.16	88°27′,5	11.17	53°18′
9.4	82°34′	* 10.17	63°16′,6
1.5	32°17′	9.17	76°18′
13.15	44°12′		
15.10	62°40′		
15.9	60°53′		
15.5	89°57′		

ZONES CONSTATÉES

[3.9.13] [3.10.16] [5.11.16]

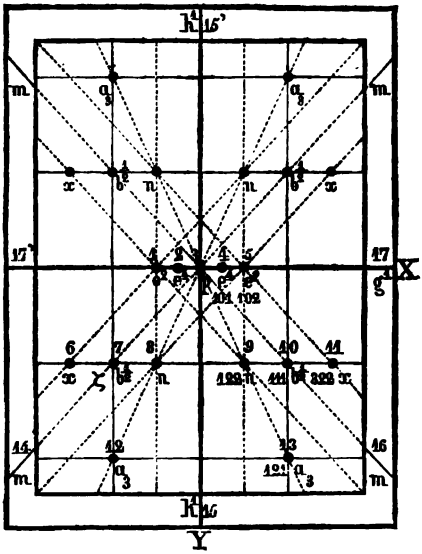


Fig. 276.

I. FORME PRIMITIVE

$$14.16 = m.m \text{ sur } h^1 = 88°27',5,$$

$$10.17 = b^{\frac{1}{2}} g^1 = 63°16',6.$$

$$\sin pb^{\frac{1}{2}} = \cos b^{\frac{1}{2}} g^1 \text{ séc } mg^1,$$

$$\text{tg } pb^{\frac{1}{2}} \cos mg^1 = \frac{\alpha}{\gamma}$$

$$\text{tg } pb^{\frac{1}{2}} \sin mg^1 = \frac{1}{\gamma}.$$

$$\frac{\alpha}{\gamma} = 0.588446 \qquad \log \frac{\alpha}{\gamma} = \bar{1}.76972.$$

$$\frac{1}{\gamma} = 0.60450 \qquad \log \frac{1}{\gamma} = \bar{1}.78140.$$

II. SYMBOLES DES FACES

Zone pg^1.

	4	5
PZ	16°,8′,5	7°26′,
$\frac{p}{r}$	2.03	4.51,
	e^2	$e^{\frac{9}{2}}$ ou e^4.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zone } [9.10.17] = [01\bar{1}] \\ \text{Zone } [5.9.15] = [20\bar{1}]\end{array}\right\} 9 = (122) = n.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zone } [3.9.13] = [2\bar{1}0] \\ \text{Zone } [10.13.15] = [10\bar{1}]\end{array}\right\} 16 = (121)\ a_3.$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{Zone } [5.11.16] = [2\bar{2}1] \\ \text{Zone } [9.11] = [01\bar{1}]\end{array}\right\} 11 = (322) = x.$$

III. CALCULS INVERSES

$$\text{tg PZX} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\alpha},$$

P = x (322)	m (110)	a_3 (121),	
PZX = 34°24′,3	45°46′,24	64°2′,78,	

$$\text{tg PZ} = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{r}\ \text{coséc PZX} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{p}{r}\ \text{coséc PZX},$$

	x (322)	$b^{\frac{1}{2}}$ (111)	n (122)	a_3 (121)	e^2 (102)	e^4 (104).
Pr =	46° 56	40° 9′,1	33° 54′,8	53° 21′,6	16° 23′	8° 28.

$$\cos PP' = \cos PZ \cos P'Z + \sin PZ \sin P'Z \cos PZP'.$$

nh^1 (122) (010)	$b^{\frac{1}{2}}h^1$ (111) (010)	a_3h^1 (121) (010)	xh^1 (332)
60° 34′	62° 29′	43° 49′	73° 38
a_3g^1 (121) (100)	ng^1 (122) (100)	$b^{\frac{1}{2}}g^1$ (111) (100)	xg^1 (322) (
43° 49′	75° 53′	63° 16′	52° 5
	e^2m (102) (110)	xm (322) (110).	
	76° 33′	44° 15′.	

RÉCAPITULATION

Forme primitive

$a : b : c = 0,97347 : 1 \quad : 1,65422.$

ZONES.	ANGLES.	MESURÉS.	CALCULÉS.
[XY] [001]	*mm sur h^1	88° 37′,5	88° 27′,5
[XZ] [010]	pe^4	7° 26′	8° 28′,
	pe^2	16° 8′,5	16° 23′.
[mZ] [10$\bar{1}$]	$pb^{\frac{1}{2}}$	»	40° 9′
[a_3Z] [2$\bar{1}$0]	pn	»	33° 54′,8,
	pa_3	»	53° 21′,6,
[e_2Y] [20$\bar{1}$]	nh^1 en av^t.	60° 53′	60° 34′.
[$b^{\frac{1}{2}}$Y] [10$\bar{1}$]	$b^{\frac{1}{2}}h^1$ id.	62° 40′	62° 29′,
	a_3h^1 id.	44° 12′	43° 49′.
[xY] [20$\bar{3}$]	xh^1 id.	»	73° 38′.
[$b^{\frac{1}{2}}$X] [01$\bar{1}$]	xg^1 adj^t.	53° 18′	52° 56′,
	*$b^{\frac{1}{2}}g^1$ id.	63° 16′	63° 16′,
	ng^1	76° 18′	75° 53′.
[e^2m] [2$\bar{2}\bar{1}$]	xm adj^t.	»	44° 15′,
	e^2m — sur x	»	76° 33′,
	nm sur e^2	»	120° 15′.

SYSTÈME QUADRATIQUE

Un cristal appartient à ce système lorsqu'il possède un ax naire et un seul. Dans tous les cristaux connus, cet axe s'acc d'un centre et, par conséquent, d'un plan de symétrie princi qu'il y a des plans de symétrie passant par l'axe quaternaire, est holoédrique; dans le cas contraire, il est parahémiédrique

Le cristal appartient encore au système quadratique lor possédant plus d'axe quaternaire, il possède 3 axes binaires plans de symétrie rectangulaires passant par l'un de ces axes, perpendiculaires aux deux autres. Il n'y a plus de centre; c'e hémiédrie du cuivre pyriteux.

Si l'on se donne l'angle de deux pôles quelconques de s connus (pqr) et $(p'q'r')$, on a

$$\cos \mathrm{PP}' = \frac{pp' + qq' + \frac{a^2}{c^2} rr'}{\sqrt{p^2 + q^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2}\sqrt{p'^2 + q'^2 + \frac{a^2}{c^2} r'^2}},$$

ce qui fait dépendre le calcul de $\frac{a^2}{c^2}$ d'une équation de 2e degré.

On peut résoudre la question par une construction grapl suffit de placer les deux pôles sur la projection gnomoniqu planche 1 qui convient à tous les cristaux quadratiques. On d la distance du point de vue au plan de projection par la condi la longueur comprise entre les deux pôles corresponde à l'angl

Les deux pôles P et P′ peuvent appartenir à la même forme Supposons, par exemple, les deux pôles situés d'un même côté principal et adjacents, l'un ayant pour symbole $(pqr,)$ le sym l'autre sera (qpr) ou $(p\bar{q}r)$. Dans le premier cas, on :

$$\cos (pqr)(qpr) = \frac{2pq + \frac{a^2}{c^2} r^2}{p^2 + q^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2},$$

d'où :

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{(p^2 + q^2)\cos \mathrm{PP}' - 2pq}{r^2(1 - \cos \mathrm{PP}')}.$$

Dans le second cas, il vient :

$$\cos(pqr)(p\bar{q}r) = \frac{p^2 - q^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2}{p^2 + q^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2},$$

d'où :

$$\frac{a^2}{c^2} = \frac{(p^2 + q^2) \cos PP' - (p^2 - q^2)}{r^2(1 - \cos PP')}.$$

Si les deux pôles sont, sur la projection gnomonique, opposés par le centre, ils ont pour symboles (pqr) et $(\bar{p}\bar{q}r)$. On a :

$$\cos(pqr)(\bar{p}\bar{q}r) = \frac{-(p^2 + q^2) + \frac{a^2}{c^2} r^2}{p^2 + q^2 + \frac{a^2}{c^2} r^2}.$$

d'où l'on tire

$$\frac{a}{c} = \sqrt{\frac{p^2 + q^2}{r^2}} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} PP'.$$

Si $(pqr) = (101)a^1$, on a simplement

$$\frac{a}{c} = \operatorname{tg} \frac{1}{2} PP'.$$

Si $(pqr) = (111)b^{\frac{1}{2}}$ on a simplement

$$\frac{a}{c} = \sqrt{2} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} PP'.$$

Ces deux derniers cas sont presque toujours ceux que l'on rencontre dans la pratique.

Lorsque la forme primitive est connue, on calcule les caractéristiques d'un pôle P soit par la méthode des zones lorsqu'elle est possible, soit par la méthode suivante.

On se donne PZ et PX soit par des observations directes, soit par des résolutions de triangles.

On calcule PZX par la formule

$$\cos PZX = \cos PX \operatorname{cosec} PZ$$

facile à établir dans le triangle rectilatère PZX.

Si par le point P de la projection gnomonique, on mène une
lèle à ZY prolongée jusqu'à sa rencontre en π avec ZX, on établit
ment dans le triangle PZπ les relations

$$\frac{p}{r} = \frac{c}{a} tg\,PZ \cos PZX \qquad \frac{q}{r} = \frac{c}{a} tg\,PZ \sin PZX,$$

qui donnent p, q, r.

Pour effectuer les calculs inverses qui servent à trouver l'an
deux pôles P et P′ dont les caractéristiques sont connues, on cacl
et PZX au moyen des équations précédentes qui se transforme
celles-ci :

$$tg\,PZX = \frac{q}{p} \qquad tg\,PZ = \frac{a}{c}\sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2}}.$$

On calcule de même P′Z et P′ZX, puis PZP′ = PZX — P′ZX,
obtient enfin PP′ par la relation

$$\cos PP' = \cos PZ \cos P'Z + \sin PZ \sin P'Z \cos PZP'.$$

On pourrait aussi se servir des formules générales qui do
cos PP′ et tgPP′ en fraction des paramètres et des caractéristiqu
pôles.

SYSTÈME HEXAGONAL

L'existence d'un axe sénaire caractérise suffisamment le sy
hexagonal, puisqu'on n'y a encore constaté qu'un seul cas de mér
caractérisé par la persistance de l'axe sénaire, du centre et du pl
symétrie principal accompagnée de la suppression des axes bina
des plans de symétrie passant par l'axe sénaire.

Toutefois il faut remarquer que tous les cristaux possédant u
modes de symétrie du système ternaire peuvent aussi bien être
dérés comme étant des cristaux mériédriques du système hexa
C'est ainsi que le quartz qui est ordinairement considéré comme h
drique holoaxe du système ternaire, est regardé par Bravais c
tétartoédrique du système hexagonal. Cette indécision vient de c
au point de vue de la symétrie du polyèdre extérieur, il revie
même, lorsque la molécule est de symétrie ternaire, que le résea
sénaire ou simplement ternaire. Il est évident cependant qu'il

eux cas correspondant à des structures très-différentes, et ces différences dans l'architecture interne doivent produire des différences correspondantes dans les phénomènes morphologiques, physiques, etc., que manifeste la substance. Mais dans l'état actuel de nos connaissances, nous savons peu de chose sur les phénomènes extérieurs au moyen desquels les deux structures internes peuvent être distinguées l'une de l'autre.

La symétrie sénaire étant reconnue, supposons qu'on ait mesuré l'angle de deux pôles quelconques P et P′ dont on choisit les symboles $(pq\bar{r}s)$ et $(p'q'\bar{r}'s')$ d'une manière compatible avec la symétrie du système. On aura :

$$\cos PP' = \frac{pp' + qq' + rr' + \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}ss'}{\sqrt{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s^2 + p^2 + q^2 + r^2}\sqrt{\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}s'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2}},$$

ce qui fera dépendre l'inconnue $\frac{a^2}{h^2}$ de la résolution d'une équation du deuxième degré.

Le problème se résoudrait simplement par une construction graphique. Il suffirait de placer les deux pôles de symboles connus sur la projection gnomonique de la planche II. Cette projection convient en effet à tous les cristaux hexagonaux, à la condition de changer, pour chacun d'eux, la distance H du point de vue au plan de projection, distance calculée en prenant pour unité la longueur qui sépare sur la projection le pôle (0001) du pôle $(10\bar{1}1)$, c'est-à-dire le paramètre A de l'axe binaire de première espèce du réseau polaire.

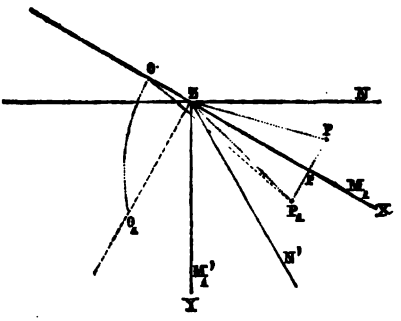


Fig. 276.

Lorsque les pôles P et P_1 (fig. 276) sont placés sur la projection, on imagine le rabattement autour de PP_1 du plan qui passe par P, P_1 et le point de vue O ; ce point de vue se rabat sur la perpendiculaire Zp menée de Z sur la droite PP_1, en un point O déterminé par l'intersection avec le seg-

ment capable de l'angle PP_1 décrit sur PP_1. Si du point p centre on décrit un cercle avec pO comme rayon, ce cerc rencontrer en O_1 la perpendiculaire menée de Z sur, Zp et Z

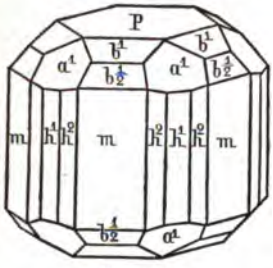


Fig. 277.

l'échelle du dessin, la longueur H à-dire la hauteur du prisme hexag réseau polaire.

Prenons pour exemple un cristal raude (fig. 277). Nous nous donnons b^1b^1 ou $(10\bar{1}1)$ $(01\bar{1}1)$, égal à 28° 54 aisé de voir qu'on aura

$$\frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}=\frac{2\cos PP_1-1}{1-\cos PP_1},$$

ce qui donne aisément :

$$\frac{a}{h}=2{,}004 \quad \text{ou} \quad \frac{h}{a}=0{,}4988.$$

La construction graphique donnerait sensiblement

$$\frac{a}{h}=2.$$

Les cristaux présentent presque toujours un ou deux prismes naux ; on donne au plus important le symbole $m\left\{10\bar{1}0\right\}$. Ils aussi toujours des formes $b^m\left\{p0\bar{p}s\right\}$ ou $a^m\left\{pp\overline{2p}s\right\}$. On donne à remarquable des formes b^m le symbole $b^1\left\{10\bar{1}1\right\}$ ou à la plus quable des formes a^m le symbole $a^1\left\{11\bar{2}1\right\}$.

Pour déterminer le rapport $\frac{a}{h}$ des paramètres du réseau prin prend une des deux équations

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{a}{h}=\operatorname{cotg} pb^1, \qquad \frac{a}{2h}=\operatorname{cotg} pa^1,$$

équations évidentes sur la projection gnomonique, si l'on se r (page 100) que

$$\frac{H}{A}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{a}{h} \quad \text{et} \quad \frac{H}{A'}=\frac{1}{2}\,\frac{a}{h},$$

A étant dans le réseau polaire le paramètre des axes X et Y, A

ıs le même réseau le paramètre des axes binaires qui bissèquent les ;les des premiers.

La forme primitive étant fixée, on calcule les symboles des diverses ·mes par la méthode des intersections de zones lorsque cela est pos- ıle. Lorsqu'il n'en est pas ainsi, on se procure soit par des observa- ıns directes, soit par des résolutions de triangles, les angles d'un ıle P ($pq\bar{r}s$) de la forme avec Z, ainsi qu'avec X, c'est-à-dire les angles ı et Pm. On suppose le pôle compris dans l'angle des axes positifs XY.

Le triangle rectilatère PZX donne

$$\cos PZX = \cos PX \operatorname{coséc} PZ,$$

ı l'on a

$$PZY = 60^\circ - PZX.$$

Si, par le point P de la projection gnomonique, on mène une paral- èle à ZY jusqu'à sa rencontre en π avec ZX, le triangle PπZ dont les :ôtés ont respectivement pour longueurs $\frac{p}{s}$A, $\frac{q}{s}$A, donne aisément les relations

$$\frac{H \operatorname{tg} PZ}{\sin 120^\circ} = \frac{\frac{p}{s} A}{\sin PZY} = \frac{\frac{q}{s} A}{\sin PZX},$$

d'où l'on tire

$$\frac{p}{s} = \frac{a}{h} \operatorname{tg} PZ \sin PZX \qquad \frac{q}{s} = \frac{a}{h} \operatorname{tg} PZ \sin PZY.$$

Quant aux calculs inverses qui ont pour but de chercher l'angle de deux pôles P, P′ dont les symboles sont connus, on les conduit de la façon suivante. Pour le pôle P, on calcule l'angle PZX an moyen de l'équation

$$\frac{\sin PZX}{\sin (60^\circ - PZX)} = \frac{p}{q},$$

d'où

$$\operatorname{tg} PZX = \frac{\frac{q}{p} \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{1}{2} \frac{q}{p}};$$

et l'angle PZ au moyen de l'équation

$$\operatorname{tg} PZ = \frac{h}{a} \cdot \frac{p}{s} \cos PZX.$$

II. SYMBOLES DES FACES

Zone pg^1.

	4	5
PZ	16°,8′,5	7°26′,
$\frac{p}{r}$	2.03	4.51,
	e^2	$e^{\frac{9}{2}}$ ou e^4.

Zone [9.10.17] = [01$\bar{1}$] } 9 = (122) = n.
Zone [5.9.15] = [20$\bar{1}$] }

Zone [3.9.13] = [$\bar{2}\bar{1}$0] } 16 = (121) a_3.
Zone [10.13.15] = [10$\bar{1}$] }

Zone [5.11.16] = [2$\overline{21}$] } 11 = (322) = x.
Zone [9.11] = [01$\bar{1}$] }

III. CALCULS INVERSES

$$\text{tg PZX} = \frac{p}{q} \cdot \frac{1}{\alpha},$$

P = x (322)	m (110)	a_3 (121),
PZX = 34°24′,3	45°46′,24	64°2′,78,

$$\text{tg PZ} = \frac{1}{\gamma}\frac{q}{r} \text{ coséc PZX} = \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{p}{r} \text{ coséc PZX},$$

	x (322)	$b^{\frac{1}{2}}$ (111)	n (122)	a_3 (121)	e^2 (102)	e^4 (104)
Pr =	46° 56	40° 9′,1	33° 54′,8	53° 21′,6	16° 23′	8° 28.

$$\cos PP' = \cos PZ \cos P'Z + \sin PZ \sin P'Z \cos PZP'.$$

nh^1 (122) (010)	$b^{\frac{1}{2}}h^1$ (111) (010)	a_3h^1 (121) (010)	xh^1 (332)
60° 34′	62° 29′	43° 49′	73° 3
a_3g^1 (121) (100)	ng^1 (122) (100)	$b^{\frac{1}{2}}g^1$ (111) (100)	xg^1 (322) (
43° 49′	75° 53′	63° 16′	52°
	e^2m (102) (110)	xm (322) (110).	
	76° 33′	44° 15′.	

RÉCAPITULATION

Forme primitive

$a : b : c = 0,97347 : 1 \quad : 1,65422.$

ZONES.	ANGLES.	MESURÉS.	CALCULÉS.
[XY] [001]	*mm sur h^1	88° 37′,5	88° 27′,5
[XZ] [010]	pe^4	7° 26′	8° 28′,
	pe^2	16° 8′,5	16° 23′.
[mZ] [10$\bar{1}$]	$p\overset{1}{b}^{\bar{2}}$	»	40° 9′
[a_3Z] [2$\bar{1}$0]	pn	»	33° 54′,8,
	pa_3	»	53° 21′,6,
[e_2Y] [20$\bar{1}$]	nh^1 en av^t.	60° 53′	60° 34′.
[$\overset{1}{b}^{\bar{2}}$Y] [10$\bar{1}$]	$\overset{1}{b}h^1$ id.	62° 40′	62° 29′,
	a_3h^1 id.	44° 12′	43° 49′.
[xY] [20$\bar{3}$]	xh^1 id.	»	73° 38′.
[$\overset{1}{b}^{\bar{2}}$X] [01$\bar{1}$]	xg^1 adj^t.	53° 18′	52° 56′,
	*$\overset{1}{b}^{\bar{2}}g^1$ id.	63° 16′	63° 16′,
	ng^1	76° 18′	75° 53′.
[e^2m] [2$\bar{2}$1]	xm adj^t.	»	44° 15′,
	e^2m — sur x	»	76° 33′,
	nm sur e^2	»	120° 15′.

SYSTÈME CUBIQUE.

Dès que l'étude du cristal montre qu'il possède au moins deux axes du degré 3 ou du degré 4, on peut affirmer qu'il appartient au système cubique. En général, au reste, les cristaux appartenant à ce système, en vertu de leur symétrie autour des 4 axes ternaires égaux groupés symétriquement autour d'un point, présentent des polyèdres sphéroïdaux, tandis que les cristaux des autres systèmes, ayant toujours au moins une direction différente de toutes les autres, sont généralement allongés ou aplatis suivant cette direction et présentent un aspect prismatique, tabulaire ou pyramidal.

Lorsque la symétrie du système cubique est reconnue, on jugera que le cristal est holoédrique dès qu'on reconnaîtra l'existence d'un axe quaternaire, puisque l'hémiédrie holoaxe ne paraît pas être réalisée dans la nature. L'absence de tout axe quaternaire fera conclure à la mériédrie. Il y a parahémiédrie lorsque les plans de symétrie sont perpendiculaires aux trois axes binaires conservés, qui sont rectangulaires entre eux, ou encore lorsque les faces sont parallèles entre elles deux à deux; il y a antihémiédrie dans le cas contraire. Il y a tétratoédrie lorsque les plans de symétrie sont complétement supprimés.

Lorsque la symétrie cubique du cristal est établie, il ne reste plus qu'à chercher les symboles des diverses formes simples.

Pour cette recherche, lorsque la méthode de l'intersection mutuelle des zones ne peut être employée pour un pôle P (pqr), on se procure PZ et PX ; on calcule PZX par la formule

$$\cos PZX = \cos PX \operatorname{cosec} PZ,$$

puis p, q, r, par les formules

$$\frac{p}{r} = tg\, PZ \cos PZX \qquad \frac{q}{r} = tg\, PZ \sin PZX,$$

faciles à établir sur la projection gnomonique en considérant le triangle PπZ formé en menant de P une parallèle πYZ jusqu'à sa rencontre en π avec ZX.

On peut aussi se servir d'un procédé graphique en plaçant P sur la projection gnomonique de la planche I, commune à tous les cristaux cubiques.

Lorsqu'on donne les angles des faces avec celles du cube, il est commode de se servir de la projection gnomonique sur un plan de symétrie perpendiculaire à un axe quaternaire. Mais lorsqu'on se donne les angles des faces avec celles de l'octaèdre, ou qu'on se propose d'étudier surtout la symétrie ternaire du cristal, il est préférable d'employer une projection gnomonique sur un plan perpendiculaire à un axe ternaire. La projection gnomonique qui peut servir à tous les cristaux rhomboédriques peut encore servir ici puisque l'on peut considérer le cube comme un rhomboèdre de 90 degrés. Il faut seulement déterminer la distance du point de vue au plan de projection. On peut employer la construction suivante. Sur l'un des côtés P_1P_2 (fig. 278) du triangle fondamental comme diamètre on décrit une demi-circonférence. On mène par le centre O du triangle une parallèle à P_1P_2 qu'on prolonge jusqu'à la circonférence en α. $O\alpha$ est la distance cherchée, car il est aisé de voir qu'avec cette distance du point de vue au plan de projection, on trouve pour les deux pôles P_1P_2 un angle droit. On verrait que

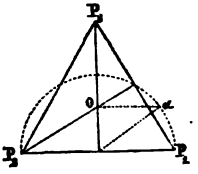


Fig. 278.

$$O\alpha = \frac{1}{\sqrt{6}} P_1P_2 = 0{,}408.P_1P_2.$$

Les calculs inverses se font aisément en calculant, pour chaque pôle P, PZ et PZX au moyen des formules

$$tg\ PZX = \frac{q}{p} \qquad tg\ PZ = \sqrt{\frac{p^2+q^2}{r^2}},$$

et calculant PP′ par la résolution du triangle PZP′.

DÉTERMINATION DE LA FORME PRIMITIVE LORSQU'ON EN CONNAIT UNE VALEUR APPROCHÉE.

Pour déterminer le réseau cristallin d'une substance donnée, la marche qui a été indiquée dans les pages précédentes consiste à choisir parmi toutes les formes simples observées dans les cristaux, une ou plusieurs d'entre elles auxquelles on assigne des symboles arbitraires.

Les distances angulaires des faces de ces formes, telles qu'elles sont données par l'observation, définissent le réseau.

Mais le réseau ainsi défini ne peut pas être le véritable réseau de la substance, puisque les angles qui ont servi à le calculer sont nécessairement inexacts, à cause de l'imperfection inévitable des observations. Si, au lieu de prendre pour point de départ des calculs les angles choisis arbitrairement, on en prenait d'autres, on obtiendrait un réseau légèrement différent du premier, et l'on conçoit qu'on se rapprocherait le plus possible du réseau véritable si l'on prenait un réseau qui fût une moyenne entre tous ceux que l'on pourrait ainsi obtenir.

On déduit de cette remarque le procédé de calcul suivant.

Supposons qu'on ait écrit les formules qui donnent cos PP′ pour tous les angles PP′ directement observés,

$$\cos PP' = \frac{N}{D},$$

N et D sont des fonctions de A^2, B^2, C^2, AB cos XY, AC cos XZ, BC cos YZ. Si l'on différentie les deux membres de cette équation, on aura

$$d \cos PP' = \frac{dN}{D} - \frac{N dD}{D^2} = -\sin PP' dPP'.$$

dN et dD ne contiennent que les différentielles dA^2, dB^2, dC^2, $dAB \cos XY$, etc.; N et D^2 peuvent être considérés comme étant les valeurs de N et D^2 lorsqu'on y substitue aux 6 paramètres les valeurs calculées; enfin le premier membre étant pris égal à la différence entre le cosinus de l'angle observé et le cosinus calculé au moyen du réseau obtenu, l'équation ci-dessus peut être regardée comme une équation de condition à laquelle doivent satisfaire les différentielles dA^2, dB^2, etc., pour annuler la différence entre le calcul et l'observation.

En appelant π et π' les paramètres des rangées qui vont respectivement de l'origine aux pôles P et P′, et se rappelant que $\cos PP' = \frac{N}{\pi\pi'}$, on pourra écrire l'équation sous la forme

$$\frac{dN}{\pi\pi' \sin PP'} - \frac{d\pi'}{\pi'} - \frac{d\pi}{\pi} + dPP' = 0.$$

équation dans laquelle π, π' et $\pi\pi'$ sin PP′ ou l'aire de la maille de plan PP′ peuvent être mesurés sur la projection gnomonique.

En posant :

$$\frac{A^2}{B^2} = \alpha^2 \quad \frac{C^2}{B^2} = \gamma^2 \qquad AB \cos XY = \lambda^2,$$
$$AC \cos XZ = \mu^2,$$
$$BC \cos YZ = \nu^2.$$

l'équation sera de la forme

$$md\alpha^2 + nd\gamma^2 + pd\lambda^2 + qd\mu^2 + rd\nu^2 + dPP' = 0.$$

Chaque observation donnera une équation de même forme,

$$m' d\alpha^2 + n' d\gamma^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$m'' d\alpha^2 + n'' d\gamma^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

.
.
.
.

En combinant entre elles toutes ces équations par la méthode des moindres carrés, on obtiendra cinq équations du premier degré qui détermineront les cinq inconnues $d\alpha^2$, $d\gamma^2$, dh^2, $d\mu^2$, $d\nu^2$. Ces équations seront de la forme

$$d\alpha^2 \Sigma m^2 + d\gamma^2 \Sigma mn + d\lambda^2 \Sigma mp + d\mu^2 \Sigma mq + d\nu^2 \Sigma nq + dPP' \Sigma m = 0,$$
$$d\alpha^2 \Sigma mn + d\gamma^2 \Sigma n^2 + d\lambda^2 \Sigma np + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$d\alpha^2 \Sigma mp + d\gamma^2 \Sigma np + d\lambda^2 \Sigma p^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

.
.
.
.

CHAPITRE XVI

DE L'IMPORTANCE PHYSIQUE RELATIVE DES DIVERSES FORMES SIMPLES

Nous avons suivi jusqu'ici une marche entièrement rationnelle, et nous nous sommes bornés, après avoir établi d'une manière irréfragable la constitution réticulaire des corps cristallins, à exposer les conséquences géométriques qui s'en déduisent. C'est ainsi que nous avons discuté d'une façon complète tous les cas théoriquement possibles que peut présenter la combinaison de la symétrie du réseau avec celle de la molécule, et que nous avons cherché, pour chacun d'eux, les formes cristallines qui le caractérisent. Nous avons pu, par cette discussion attentive, dresser un cadre dans lequel tous les faits morphologiques doivent nécessairement venir prendre place. Mais, après ce long travail, il reste encore, pour expliquer d'une manière complète la forme que revêt un cristal, à résoudre un problème important que nous n'avons même pas abordé.

La notion de la constitution réticulaire des corps suffit à montrer que la surface des cristaux ne peut être composée que par des plans réticulaires, c'est-à-dire par un certain nombre de formes simples. Mais ces formes sont-elles, sur un même cristal, en petit ou en grand nombre? Les formes qui se montrent sur un cristal se montrent-elles sur tous les autres cristaux de la même substance? Parmi toutes les formes théoriquement possibles, quelles sont celles que choisit la nature?

Sur toutes ces questions la théorie exposée ne peut nous donner aucune lumière, et nous devons nous adresser à l'observation directe. Nous reviendrons plus tard sur les faits constatés par cette observation; mais nous pouvons énoncer dès maintenant ceux qui se manifestent de la manière la plus évidente.

Limitation du nombre des formes simples réalisées par la nature. — Les cristaux sont limités en général par des faces planes; le

nombre des formes simples qui les limitent n'est donc jamais très-grand. Il y a, il est vrai, des cristaux terminés par des surfaces qui paraissent courbes, mais ils constituent une exception que l'on peut d'abord négliger, sauf à essayer de l'expliquer plus tard.

Importance physique des diverses formes cristallines. — En général les cristaux artificiels d'une même substance formés dans la même eau mère, ou les cristaux naturels qui se rencontrent dans le même gîte minéral, c'est-à-dire en résumé tous les cristaux d'une même substance qui ont été formés dans des circonstances extérieures identiques, sont limités par les mêmes formes simples qui présentent à peu près le même développement relatif.

Au contraire, les cristaux d'une même substance formés dans des circonstances extérieures différentes, ne sont pas limités, en général, par les mêmes formes.

Cependant il existe souvent des formes qui persistent à se montrer dans les cristaux de toutes les provenances ; d'autres formes ne disparaissent que rarement, tandis que d'autres ne se montrent que dans de très-rares circonstances, et, le plus souvent, avec un très-faible développement.

Les clivages, les plans que nous appellerons les plans de glissement, ceux que nous appellerons les plans d'hémitropie[1], restent ordinairement les mêmes dans les cristaux de toutes les provenances.

Il résulte de tout cela que l'observation nous permet de classer suivant un ordre décroissant d'importance physique les différentes formes qui se rencontrent limitant les cristaux d'une substance donnée. Les formes parallèles aux plans de clivage, de glissement, d'hémitropie auront dans ce classement le premier rang, puisqu'elles ne dépendent guère que de la structure intérieure du corps et paraissent à peu près indépendantes des circonstances extérieures et accidentelles au milieu desquelles s'est constituée la surface qui limite le cristal. Parmi les autres formes, l'importance physique la plus grande appartiendra à celles qui prennent d'ordinaire le plus grand développement ou qui disparaissent le plus rarement. La classification des formes suivant leur importance physique décroissante sera donc le résultat d'un travail de statistique suivi d'un travail d'appréciation nécessairement un peu arbitraire puisque les caractères qui fixent le degré d'importance d'une forme pourront être contradictoires.

[1] Nous parlerons plus tard des plans de glissement et des plans d'hémitropie; nous nous bornons à en indiquer ici l'existence.

Loi de la simplicité des symboles. — Si l'on fixe les données du réseau cristallin en attribuant des symboles simples à un nombre suffisant de formes choisies parmi les plus importantes de celles qui ont été observées, toutes les autres formes sont représentées par des symboles simples.

La loi reste encore ici assez vague, car il est impossible de dire à quelle limite s'arrête la simplicité d'un symbole. Toutefois, on peut fixer davantage les idées en ajoutant que l'observation montre que les caractéristiques des formes importantes sont presque toujours 0 ou 1 ; on va quelquefois jusqu'à 2, exceptionnellement jusqu'à 3. Les caractéristiques 4, 5, 6 ne se rencontrent que dans des formes d'importance secondaire, et encore assez rarement. Les caractéristiques supérieures à celles-là ne se montrent guère que dans des faces tout à fait subordonnées, et très-exceptionnellement.

Il faut ajouter que le plus souvent les formes dont l'importance physique, appréciée comme il a été dit ci-dessus, est la plus grande, sont aussi celles dont les symboles les plus simples.

Cette loi de la simplicité des symboles a été pour la première fois énoncée par Haüy. Elle paraît presque nécessaire et représente à peu près, en cristallographie, l'équivalent de ce qu'est en chimie la loi de Dalton si improprement appelée loi des proportions multiples. Mais en cristallographie, pas plus qu'en chimie d'ailleurs, cette loi ne présente un sens nettement défini. Lorsqu'on compare par exemple l'ordre d'importance physique des formes avec l'ordre de simplicité des symboles, on se trouve arrêté bientôt, dans cette comparaison, par la difficulté de préciser ce qu'on peut appeler le degré de simplicité. Pour ne citer qu'un exemple, on peut se demander quel est, dans le système terbinaire, le plus simple d'entre les symboles $\{112\}$, $\{211\}$, $\{121\}$.

Loi de Bravais établissant un rapport entre l'aire élémentaire et l'importance physique d'une face. — Le seul moyen de donner à la loi une signification précise semble être de chercher à substituer à la notion vague de la simplicité des symboles, une notion physique susceptible d'une définition rigoureuse. Or, au point de vue cristallin, les différents plans réticulaires qui peuvent limiter le cristal ne diffèrent les uns des autres, si on laisse de côté la forme propre de la molécule, que par l'aire élémentaire du réseau plan. La seule inspection de la formule qui donne cette aire élémentaire montre d'ailleurs

que cette aire est d'autant plus petite que le symbole du plan est plus simple, c'est-à-dire que les caractéristiques sont plus petites.

Il est donc permis de donner à la loi d'Haüy l'énoncé suivant : *La nature choisit les formes simples qui limitent le cristal parmi celles dont l'aire élémentaire est la plus petite.*

Ce nouvel énoncé a ce grand avantage que les formes simples y sont définies par un caractère précis, car l'aire élémentaire d'un plan réticulaire est connue lorsque le système réticulaire est connu. On peut donc, lorsqu'on a fixé le système réticulaire par des hypothèses arbitraires convenables, ranger toutes les formes simples suivant l'ordre croissant de leurs aires élémentaires, et comparer l'ordre ainsi obtenu avec celui qu'on obtient en rangeant les mêmes formes suivant leur importance physique décroissante. Il semble très-vraisemblable *à priori* que les deux classements doivent coïncider, puisque lorsque l'aire élémentaire prend une valeur trop forte, la forme prend une importance physique si faible qu'elle ne se produit plus. Si l'on admettait la nécessité de cette coïncidence, on y trouverait un moyen bien plus parfait que tous les autres, de déterminer avec précision le système réticulaire du cristal, le nombre des hypothèses arbitraires initiales qui donneraient la coïncidence entre les deux séries étant toujours très-petit.

On pourrait démontrer la loi expérimentalement; il suffirait de chercher pour un grand nombre de cristaux, à déterminer un mode de réseau qui amènerait la coïncidence entre les deux séries. Si l'on parvenait, pour tous les cristaux, à obtenir un semblable résultat, la loi pourrait être considérée comme établie. Malheureusement, dans des recherches de ce genre, on se trouve très-vite arrêté. La première raison en est que s'il est toujours aisé, le système réticulaire étant supposé connu, de classer les formes suivant la grandeur croissante de l'aire élémentaire, il l'est beaucoup moins de les classer suivant l'ordre décroissant de l'importance physique à cause du vague avec lequel cette importance est définie.

En second lieu, il est très-évident que la loi qu'il s'agirait de démontrer ne peut être rigoureuse, puisqu'elle n'établit un lien qu'entre la forme cristalline et le réseau, tandis que la forme cristalline doit être nécessairement modifiée, en outre, par la nature du polyèdre cristallin; car, s'il n'en était pas ainsi, l'importance physique des deux formes conjuguées d'une substance hémièdre serait la même, ce qui reviendrait à dire que la dissymétrie de la molécule ne se traduirait pas dans

le polyèdre cristallin. L'observation dément absolument une semblable conclusion.

Nous devons donc nous attendre à trouver, en essayant de vérifier l'exactitude de la loi, non-seulement des difficultés tenant à l'imperfection de nos connaissances, mais encore de véritables contradictions qui tiendront à ce que la loi est, sinon inexacte, du moins très-certainement incomplète.

Démonstration théorique de la loi de Bravais. — Il vaut donc mieux suivre une marche différente, et essayer d'établir la loi non par l'observation, mais par des raisons théoriques. Si l'on y parvient, les faits d'observation contradictoires avec la loi ne feront pas douter de l'exactitude de celle-ci, mais pourront servir à apprécier l'influence de la forme du polyèdre moléculaire sur la forme cristalline et, par conséquent, à acquérir de nouvelles et précieuses données sur ce point si important et si mystérieux de la constitution des corps.

Nous avons déjà acquis sur la structure intérieure d'un corps cristallisé une donnée certaine; nous savons qu'un semblable solide est formé par des agrégats matériels tous identiques entre eux, et qu'*on* peut appeler les molécules cristallines. Les centres de gravité de ces molécules, toutes orientées de la même façon, marquent les nœuds d'*un* réseau à maille parallélipipédique. Il est facile de voir que les centres géométriques de ces mailles forment à leur tour les nœuds d'un réseau identique au premier, orienté de la même façon, et dont les mailles ont chacune une molécule en leur centre. On peut donc dire encore que le cristal est constitué de telle sorte que les centres de gravité des molécules cristallines occupent les centres géométriques des mailles parallélipipédiques d'un certain réseau.

Le centre de gravité de chaque molécule cristalline est d'ailleurs immobile, car il ne pourrait avoir qu'un mouvement oscillatoire, qui serait identique pour tous les centres à cause de l'identité complète du milieu autour de chacun d'eux. Le mouvement moléculaire serait ainsi transformé en un déplacement vibratoire du centre de gravité du corps. Les vibrations calorifiques d'un cristal ne peuvent donc être que des vibrations autour du centre de gravité, lesquelles s'exécutent vraisemblablement, de telle sorte que les éléments de symétrie de la molécule sont conservés.

Faisons passer par le centre de gravité A d'une molécule un plan réticulaire quelconque P, qui divise le milieu cristallin en deux parties, l'une supérieure M, et l'autre inférieure N. Les actions moléculaires

exercées sur la molécule considérée par toutes celles du plan se font nécessairement équilibre, puisque à toute molécule en correspond une autre opposée par le centre et agissant en sens contraire. Il faut donc que les actions exercées par les molécules de M fassent équilibre à celles qui sont exercées par les molécules de N. Appelons φ la résultante exercée sur A par les molécules de M, celles de N exerceront sur A une force $-\varphi$ égale et contraire. Toutes les molécules du plan P seront soumises de la part des molécules de M à des forces égales et parallèles à φ, et si l'on supposait appliquées toutes ces forces en leurs points d'application, on pourrait supprimer la partie M du cristal sans que l'équilibre des centres de gravité des molécules de P fût troublé.

Il est clair que l'équilibre subsistera encore si l'on substitue aux forces appliquées aux centres de gravité des molécules une pression uniforme appliquée sur le plan P, parallèle à φ, et telle que la valeur ϖ de cette pression par unité de surface, multipliée par l'aire ω de la maille du plan P, soit égale à φ. Nous appellerons *pression cohésive*, cette pression ϖ, idéalement appliquée sur l'unité de surface d'un plan réticulaire, et qu'on peut substituer aux forces réellement appliquées aux centres de gravité des molécules, sans modifier les conditions d'équilibre statique. Il faut d'ailleurs remarquer que l'équivalence statique des deux systèmes de forces ne s'étend pas nécessairement aux phénomènes dynamiques.

Il serait aisé de voir, en suivant un mode de raisonnement très-connu dans la physique mathématique, et que nous développerons lorsque nous nous occuperons, dans la seconde partie de cet ouvrage, des phénomènes élastiques des cristaux, que si l'on considère les plans réticulaires en nombre infini qui passent par un même point, et si l'on mène par ce point des droites représentant en grandeur et en direction les pressions cohésives exercées sur ces différents plans, les extrémités de ces droites sont sur un certain ellipsoïde. A des plans très-voisins correspondent donc des pressions cohésives très-peu différentes. Le phénomène de ces pressions est continu.

Mais, au lieu de considérer la pression cohésive exercée sur l'unité de surface d'un plan réticulaire dans un très-petit rayon autour du centre de gravité O d'une molécule, on peut considérer la force φ réellement appliquée en ce centre de gravité. Cette force φ varie lorsque le centre de gravité de la molécule restant le même, on fait varier le plan réticulaire, mais il n'y a plus continuité entre toutes les for-

ces φ que l'on peut ainsi imaginer. Cela résulte, en effet, de l'é

$$\varphi = \varpi\omega$$

dans laquelle ϖ variant d'une manière continue, comme il vien dit, ω est, au contraire, essentiellement discontinu. Si l'on pre exemple, un plan réticulaire de symbole très-simple, ω aura un valeur; si l'on prend un plan réticulaire très-voisin de celui-là une valeur extrêmement grande, et, comme dans les deux cas, ϖ sensiblement le même, la force φ sera considérablement plus dans le second cas que dans le premier.

En d'autres termes, pour tous les plans réticulaires très-peu di l'un de l'autre, φ sera proportionnel à ω, et cette proportionnalité drait même à tous les plans réticulaires, si l'ellipsoïde de c était une sphère, c'est-à-dire si ϖ était constant. Cette circonst se trouve sans doute jamais réalisée rigoureusement; mais, dans grand nombre de cristaux, elle se rapproche beaucoup de la ré

En laissant de côté les variations de ϖ, toujours maintenu d'assez étroites limites, on peut donc dire que φ est d'autant plu que l'aire de la maille du plan réticulaire correspondant est plus et réciproquement.

Cette considération n'a pas d'importance dans le jeu des phén purement statiques, ou dans celui des phénomènes dynamiqu tendant à séparer un cristal en deux parties limitées par un certa réticulaire, se produisent de telle sorte que les forces mises s'exercent sur une étendue assez grande de la surface de ce pla qu'elle contienne un nombre très-grand de molécules. Si, au co les forces mises en jeu, par des chocs par exemple, se concent quelque sorte sur une seule molécule ou sur un nombre relati très-restreint de celles-ci, c'est incontestablement suivant le pla lequel φ est le plus petit que la séparation du cristal se produira aura d'ailleurs aucune tendance à ce que la rupture se produise des plans peu différents de celui-là, puisque si peu que l'on s du plan pour lequel φ est minimum, φ devient extrêmement gra aura donc une cassure non pas approximativement plane comm a lieu quelquefois dans les corps non cristallins isotropes, m cassure mathématiquement plane, pourvue de la propriété réf sante des faces cristallines, c'est-à-dire un *clivage*.

Cette théorie très-simple nous montre à la fois que les corps c lisés seuls peuvent présenter des clivages, et que ces clivages so

ours parallèles à des plans pour lesquels ω est très-petit. En admettant la constance rigoureuse de π, nous pourrions même dire que le clivage est toujours parallèle au plan pour lequel ω est minimum, si le phénomène n'était pas influencé par la forme de la molécule, dont nous n'avons pas tenu compte.

Nous n'entrerons pas dans une discussion plus approfondie du phénomène du clivage, auquel il faudrait joindre celui des plans de glissement de Reusch ; nous y reviendrons ailleurs. Mais nous ferons remarquer que des considérations analogues à celles qui expliquent le clivage peuvent expliquer aussi, jusqu'à un certain point, la manière dont la nature choisit, entre toutes les formes simples possibles, celles qui doivent limiter le cristal.

En effet, si nous considérons un cristal s'accroissant dans une dissolution saturée, à chaque instant le cristal est en équilibre sous l'action de forces moléculaires intérieures puissantes et de forces extérieures beaucoup moins énergiques provenant principalement des molécules diffusées dans le liquide. L'équilibre ne subsistera qu'à la condition que les faces intérieures qui s'exercent sur les molécules contenues dans les plans qui limitent le cristal, seront assez faibles pour pouvoir être équilibrées par les forces extérieures. Il faut donc que les plans limites correspondent, pour les molécules qu'ils contiennent, à des forces φ de faible valeur. L'équilibre sera d'autant plus facile que les forces φ seront plus petites, c'est-à-dire, toutes restrictions faites, que les aires ω correspondant aux plans limites seront plus petites. Les plans pour lesquels ω sera le plus petit seront donc, en général, ceux qui se produiront le plus aisément et qui acquerront le plus de développement. Il est vrai que cette loi peut être troublée par le changement du dissolvant, et par les forces différentes que peuvent exercer sur les molécules du cristal les molécules de ces différents dissolvants ; mais les formes simples qui pourront ainsi disparaître ou apparaître seront celles pour lesquelles φ sera le plus voisin de la limite, c'est-à-dire pour lesquels ω sera relativement le plus grand. L'importance physique des formes, marquée par la fréquence ou le développement relatif de ces formes, doit donc être ordinairement en rapport avec l'ordre décroissant de grandeur de l'aire ω.

En résumé, les idées théoriques qui précèdent montrent la raison d'être de la loi énoncée par Haüy, que les symboles des plans cristallins sont toujours simples. Elles nous permettent de poser, quoique avec beaucoup de réserves, cette autre loi, que l'importance physique des

formes cristallines, manifestée par les phénomènes morphologiq
en général, en raison inverse de l'aire élémentaire qui leur cor
Elles nous permettent enfin de poser cette loi, moins sujette aux
tions que la précédente, que les clivages ne peuvent se rencon
parallèlement aux formes pour lesquelles l'aire élémentaire est
petite possible. Nous verrons plus tard que la même conclus
s'appliquer aux formes parallèlement auxquelles se produit
tropie[1].

Admettons donc, en écartant pour le moment toutes les rest
sur lesquelles nous reviendrons ensuite, que l'ordre d'imp
décroissante des faces du polyèdre cristallin est le même que
croissant des densités réticulaires des plans réticulaires correspo
et nous allons tirer de cette remarque un moyen de pénétr
avant dans la structure intime du cristal.

Nous pouvons, en effet, avec Bravais, énoncer la règle sui
*Il faut choisir le réseau cristallin de telle sorte que si l'on range le
plans réticulaires de ce réseau suivant l'ordre croissant des densit
culaires, cet ordre représente l'ordre croissant des facultés de prod
soit matérielle (par la cristallisation), soit artificielle (par le cliva
faces cristallines correspondantes.*

En appliquant cette règle, nous pourrons chercher à détermine
seulement les paramètres du réseau, mais encore le mode auq
réseau appartient. Nous pourrons, par exemple, dans le systè
prisme rhomboïdal droit, non-seulement déterminer le
rhomboïdal droit qui est la forme primitive, mais encore ar
savoir si ce prisme est centré, à faces centrées, à bases centrée

**Théorèmes sur les aires élémentaires des réseaux do
parallélipipèdes sont centrés ou à faces centrées.**

Mais, avant d'examiner attentivement cette question pour chac
systèmes cristallins, il est nécessaire de démontrer quelques thé
dont nous aurons à nous servir.

I. *Si l'on centre tous les parallélipipèdes d'un réseau* A, *on aura le
polaire en centrant les* 6 *faces du parallélipipède du polaire de* A *et
dissant ensuite dans le rapport de* $1 : \sqrt[3]{2}$.

En effet, pour construire le réseau polaire, il faut mener des no
aux plans réticulaires du réseau primitif et prendre sur chacune

[1] L'étude des phénomènes d'hémitropie ne pouvant se séparer de celle des
ments cristallins, et cette dernière ne pouvant se faire sans le secours des phén
optiques, nous avons rejeté l'une et l'autre dans la seconde partie.

normales des paramètres égaux à l'aire de la maille du plan divisée par l'intervalle moyen des sommets. Si l'on mène les normales à xy et yz, les paramètres correspondants du réseau polaire seront C et A; la normale au plan diagonal $(\bar{1}01)$ sera la diagonale du parallélogramme construit sur A et C. Or, lorsque le réseau primitif sera centré, l'aire de la maille du plan diagonal sera moitié moindre, le paramètre de la diagonale du polaire sera donc moitié moindre, et toutes les faces du parallélipipède du polaire devront être centrées. D'ailleurs le volume de la maille du réseau primitif a diminué de moitié, l'intervalle moyen a donc diminué dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$, et comme $P[ghk] = \frac{s(ghk)}{E}$, il faut, puisque E a diminué dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$, que P [*ghk*] augmente dans le même rapport.

II. *Si l'on centre les 6 faces du parallélipipède d'un réseau* A, *on obtient le polaire du nouveau réseau en centrant le polaire de* A *et diminuant toutes les dimensions dans le rapport de* 1 *à* $\sqrt[3]{2}$.

Ce théorème pourrait être démontré directement, mais il est une suite nécessaire de la réciprocité du réseau primitif et de son polaire.

III. *Si l'on centre les bases du parallélipipède d'un réseau* A, *on obtient le polaire du nouveau réseau en centrant les bases du polaire de* A *et multipliant les paramètres de* X *et* Y *par* $\sqrt[3]{2}$, *celui de* Z *par* $\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

En effet, il faut diviser par 2 le paramètre perpendiculaire à la base du primitif, puisque l'aire de cette base est devenue moitié moindre; il faut diviser par 2 le paramètre des diagonales de la base du polaire, ce qui revient à centrer ces bases; enfin il faut agrandir tous les paramètres dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$, puisque le volume de la maille du primitif a diminué de moitié.

Ces théorèmes permettent de conclure du mode que présente le réseau polaire à celui que doit présenter le réseau primitif. On peut donc se borner à la considération du réseau polaire.

IV. *Si l'on centre tous les parallélipipèdes générateurs du réseau, l'aire de la maille du plan* (ghk) *restera le même si* $g+h+k$ *est impair et deviendra moitié moindre si* $g+h+k$ *est pair.*

En effet, considérons tous les plans parallèles à (111) dans le réseau polaire dont toutes les faces sont centrées, et appelons-les 0, 1, 2, 3 à partir de celui qui passe par l'origine; tous les plans impairs ont

leur maille diminuée de moitié; les mailles de tous les plans pa prouvent pas de changement. Le pôle (ghk) se trouve dans le rang $(g+h+k)$. Or, si le pôle se trouve dans un plan pai exemple, les rayons vecteurs passent par des pôles ajoutés dans 3; donc la longueur du paramètre du rayon est diminuée de m

Si, au contraire, $g+h+k$ est impair, le rayon recteur ne pa aucun nœud ajouté.

V. *Si l'on centre, dans les plans* $z=0$ $z=1$, *les bases du p pipède générateur d'un réseau, la face* (ghk) *conservera l'aire de rallélogramme générateur si* $g+h$ *est impair, et celle-ci deviendr moindre si* $g+h$ *est pair.*

En effet, dans le réseau polaire, les faces sont centrées; la d tration s'achèverait comme précédemment.

VI. *Si l'on centre les* 6 *faces du parallélipipède générateur d'un l'aire du parallélogramme générateur de la face* (ghk) *deviendra moindre si toutes les caractéristiques ne sont pas impaires, et* 4 *foi dre si cette condition est remplie.*

En effet les parallélipipèdes du réseau polaire sont centrés. U gée partant de l'origine et rencontrant d'abord un de ces centr contre un sommet symétrique de l'origine par rapport au cen nombre des parallélipipèdes traversés par la rangée entre l'origi sommet est impair, puisque ce nombre est le même de part et de celui qui comprend le centre. Les caractéristiques du s sont donc l'unité augmentée de trois nombres pairs; elles son toutes impaires.

Il en résulte que lorsque les caractéristiques de la rangée son impaires, le paramètre est diminué de moitié par le centrage rallélipipèdes; ce paramètre n'est pas modifié dans le cas co Toutes les dimensions du réseau polaire ayant dû être diminué le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$ (théorème II), l'intervalle moyen des nœ polaire est de ce fait diminué dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$; il est diminué dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{2}$ par le centrage, il est donc d dans le rapport de 1 à $\sqrt[3]{4}$. On aura donc

$$s(ghk)=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\cdot\frac{P[ghk]}{\sqrt[3]{2}}=\frac{P[ghk]}{2},$$

en appelant $P\,[ghk]$ le paramètre du polaire du réseau primitif non centrées.

Grâce à ces théorèmes, il sera facile, lorsque la projection gnomonique du cristal sera construite, de connaître graphiquement l'aire de la maille plane correspondant à chaque pôle, quel que soit le mode suivant lequel le réseau est édifié. Supposons, en effet, qu'il s'agisse d'un cristal du système orthorhombique et d'une face (135). Dans la projection gnomonique sur le plan XY, cette face est représentée par le point dont les coordonnées numériques sont $\frac{1}{5}$ et $\frac{3}{5}$. En prenant la distance de ce point au point de vue, on aura donc le cinquième de la distance P, qui joint le point de vue au nœud (135) du réseau polaire. Si le cristal appartient au mode hexaédral rectangle, c'est-à-dire si le réseau a pour maille un prisme rectangulaire droit, P est égal à s (135) à un facteur constant près. Si le cristal a pour maille un prisme rectangulaire centré, le réseau polaire a pour maille un prisme rectangulaire à faces centrées, et la somme $1+3+5$ étant impaire, P est encore égal à s (135); si la somme des caractéristiques était paire, il faudrait prendre non plus P, mais $\frac{P}{2}$. Si la maille du réseau était un prisme rectangulaire droit à faces centrées, on prendrait $\frac{P}{4}$ pour l'aire de la maille plane, puisque les 3 caractéristiques sont impaires. Enfin, si le prisme rectangulaire droit était à bases centrées, et si les bases centrées étaient dans le plan des xy, la somme $1+3$ étant paire, il faudra prendre $\frac{P}{2}$ pour l'aire cherchée; si la base centrée était dans le plan zx, ce serait la somme des caractéristiques relatives à z et à x qu'il faudrait prendre en considération, etc.

Il est d'ailleurs bon d'ajouter que l'ordre de grandeur des aires correspondantes aux diverses faces étant seul important, il est inutile de connaître ces aires avec une grande approximation et que la construction graphique est toujours suffisante.

Examen des divers systèmes cristallins. — Nous pouvons maintenant passer en revue, au point de vue qui nous occupe en ce moment, les divers systèmes cristallins.

SYSTÈME CUBIQUE

Trois modes :

1° Mode hexaédral ou réseau cubique.

2° Mode octaèdral ou cube à faces centrées.

3° Mode dodécaèdral ou cube centré.

Comme il n'y a point ici de paramètres à considérer, on peut fo
le tableau suivant donnant, pour chacun des modes et pour les fo
les plus simples, la grandeur du carré de l'aire de la maille plane

MODE HEXAÈDRAL.		MODE OCTAÈDRAL.		MODE DODÉCAÈDRAL.	
Forme	s^2	Forme	s^2	Forme	s^2
p 100	1	a^1 111	3	b^1 110	2
b^1 110	2	p 100	4	p 100	4
a^1 111	3	b^1 110	8	a^2 211	6
b^2 210	5	a^3 311	11	b^3 310	10
a^2 211	6	$a^{\frac{1}{3}}$ 331	19	a^1 111	12
$a^{\frac{1}{2}}$ 221	9	b^2 210	20	321	14
b^3 310	10	a^2 211	24	a^3 411	18
a^3 311	11	a^5 511	27	b^2 210	20
$b^{\frac{3}{2}}$ 320	13	531	35	$a^{\frac{2}{3}}$ 332	22
321	14	$a^{\frac{1}{2}}$ 221	36	431	26

On voit que, dans le mode hexaèdral, c'est le cube qui doit être t
riquement la forme dominante; dans le mode octaèdral, cette fo
dominante est l'octaèdre; c'est le dodécaèdre rhomboïdal dans le m
dodécaèdral.

EXEMPLES. — MODE HEXAÈDRAL.

Sel gemme. Ordre d'importance physique décroissante : p, b^1, a^1 (r
Clivages faciles parallèles à p. Plans de glissement parallèles à b^1
ne se présentent jamais dans les cristaux.

Galène. Ordre d'importance physique décroissante : p, b^1, a^1.

Argent sulfuré. Ordre d'importance physique décroissante : p
a^1, a^2.

MODE OCTAÉDRAL.

Spinelle. Ordre d'importance physique décroissante : a^1, b^1, a^3, p rare).

Clivage a^1 imparfait. La théorie place p immédiatement après a^1, ce qui est en contradiction avec l'observation.

Spath fluor. Ordre d'importance physique décroissante : a^1, p, b^1, a^3.

Les cristaux ne présentent que rarement la forme a^1 dominante, mais le clivage facile parallèle à cette forme lui donne une importance physique supérieure à celle de p.

MODE DODÉCAÉDRAL.

Grenat. Ordre d'importance physique décroissante : b^1, a^2, $\{321\}$.

L'observation ne présente jamais la forme p que la théorie placerait immédiatement après b^1.

Sodalite. Ordre d'importance physique décroissante : b^1, p, a^2, a^1.

Cet ordre est conforme à la théorie, sauf en ce qui concerne l'absence de b^3 dans les cristaux observés.

SYSTÈME HEXAGONAL

On a

$$s^2(pqrs) = (p^2 + q^2 + r^2 + \lambda s^2)\tfrac{1}{2}s^2\,(10\bar{1}0).$$

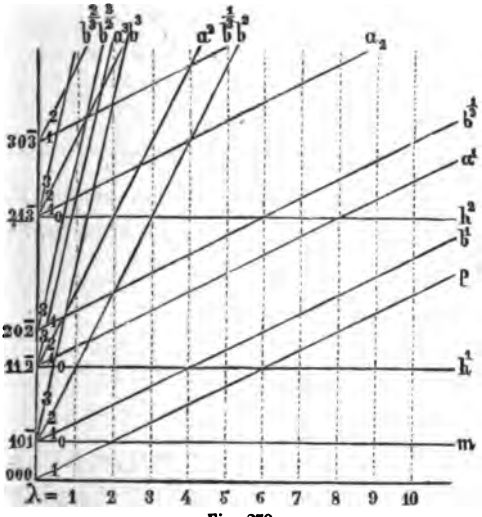


Fig. 279.

Pour chaque forme, $s^2\,(pqrs)$ peut donc être représenté par l'ordonnée d'une droite dont $\lambda = \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}$ est l'abscisse. En traçant (fig. 279) les droites

correspondant aux diverses formes, il n'y aura plus, pour obtenir le respondant à un λ quelconque, qu'à mener une droite parallèle à des ordonnées et ayant pour abscisse le λ donné. L'ordonnée du d'intersection de cette droite avec la droite correspondant à la $\{pqrs\}$ représentera s^2 $(pqrs)$.

Les formes dominantes seront toujours m, p, h^1, b^1, etc. L $\lambda < 2$, p l'emporte théoriquement sur m; le contraire a lieu l $\lambda > 2$. Dans le premier cas, le clivage tend à se produire parallè à la base, et dans le second cas, parallèlement aux faces du pris première espèce.

Exemples. — *Apatite.* $\frac{h}{a} = 0.735$ $\lambda = 2.78$.

Formes dominantes rangées à peu près suivant l'ordre décr de leur importance : m (clivage principal), p (clivage secon b^1, h^1, a^1, $b^{\frac{1}{2}}$, b^2, h^2, a_2 (hémiédrique), a^2 (rare), etc.

Ordre théorique : m, p, b^1, h^1, a^1, $b^{\frac{1}{2}}$, b^2, h^2, a^2, a_2, $b^{\frac{1}{3}}$, etc.

La coïncidence entre les deux classements est presque parfaite

Néphéline. $\frac{h}{a} = 0.835$ $\lambda = 2.13$.

Formes principales rangées à peu près suivant l'ordre décroiss leur importance physique : m, p, b^1, h^1, $b^{\frac{1}{2}}$, b^2, a^1, etc.

Clivages imparfaits, et dont il est difficile d'apprécier la facil lative, suivant m et p.

Ordre théorique : m, p, b^1, h^1, a^1, $b^{\frac{1}{2}}$, b^2, etc.

Contrairement à la théorie, l'observation semble donner à b d'importance qu'à a^1. A part cette légère discordance, l'accord en deux classements est très-satisfaisant.

Émeraude. $\frac{h}{a} = 0.996$ $\lambda = 1.50$.

Ordre d'importance physique décroissante : p, m, a^1, h^1, h^2, b^1, a_2, etc.

Clivage p distinct.

Ordre théorique : p, m, b^1, h^1, a^1, b^2, $b^{\frac{1}{2}}$, a^2, h^2, a_2, b^3, etc.

L'accord est encore assez satisfaisant, sauf quelques anomalie que la prédominance donnée par la nature à a^1 sur b^1, etc.

Greenockite (cadmium sulfuré). $\frac{h}{a} = 0.8247$ $\lambda = 2.20$.

Ordre d'importance physique décroissante : m, p, b^1, $b^{\frac{1}{2}}$, etc.

Clivage : m distinct, p imparfait.

Ordre théorique : m, p, b^1, h^1, a^1, $b^{\frac{1}{2}}$, etc.

Les formes h^1 et a^1 que la théorie place avant $b^{\frac{1}{2}}$ n'ont jamais été rencontrées.

SYSTÈME TERNAIRE

$$s^2(ghk) = \left[g^2 + h^2 + k^2 - 2(gh + hk + gk)\cos\xi\right] s^2(100),$$

ou, en remplaçant $\cos\xi$ par sa valeur $\frac{1-\lambda}{\lambda+2}$:

$$\frac{s^2(ghk)}{s^2(100)} = (g-h)^2 + (h-k)^2 + (k-g)^2 + (g+h+k)^2\lambda.$$

La figure 280 représente un abaque construit de la même façon que

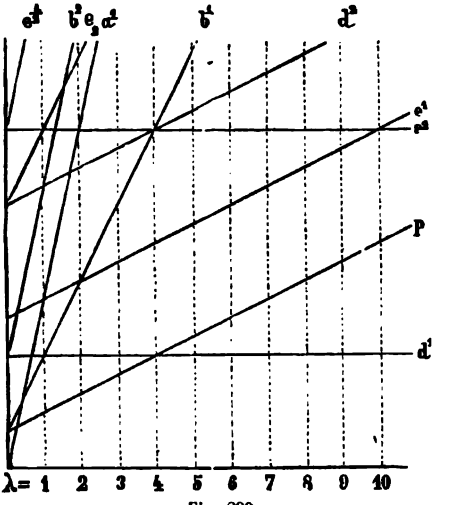


Fig. 280.

celui qui est relatif au système hexagonal. On voit que pour tous les cristaux ayant λ compris entre 1 et 4, p sera la forme dominante. Le rhomboèdre dominant devra donc presque toujours être appelé p, ce qui suffira à définir le réseau. Le prisme de seconde espèce d^1 l'emporte toujours théoriquement sur le prisme e^2.

Il est intéressant de remarquer que la forme $e^{\frac{1}{2}}$ (birhomboédrique

de p) n'a qu'une importance théorique très-faible. Or, dans le q
on trouve toujours associées les formes p et $e^{\frac{1}{2}}$, dont l'impor
physique est presque égale, avec une légère supériorité de p. En
le prisme e^2 est tout à fait prédominant. On doit conclure de ce
que le réseau du quartz n'est point ternaire, mais sénaire, ave
tétartoèdrie rhomboédrique. Ainsi se trouve levée, dans ce cas
culier, l'indétermination que nous avons signalée dans le système
culaire de tous les cristaux qui présentent un des modes de sy
propres au système ternaire.

SYSTÈME QUATERNAIRE

Le réseau peut être construit suivant deux modes différents :

1° Mode hexaédral. — La face primitive est un prisme droit à
carrée. Si l'on pose $\lambda = \frac{a^2}{c^2}$, on a :

$$\frac{s^2\,(ghk)}{s^2\,(100)} = p^2 + q^2 + r^2\lambda.$$

On peut construire un abaque (fig. 281) dont la construction et l
ploi sont les mêmes que pour les systèmes précédents.

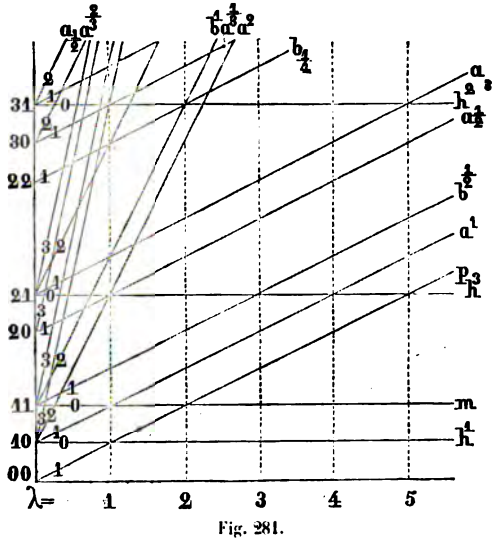


Fig. 281.

Le prisme h^1 l'emporte toujours sur le prisme m ; il faut
prendre les axes de première espèce parallèles aux côtés de la
du prisme le plus important. Lorsque $\lambda < 1$, c'est p qui l'emport

ont une tendance à être tabulaires et à avoir le clivage basique.
aire a lieu lorsque $\lambda > 1$.

LES. — *Uranite.* — $\frac{c}{a} = 2.915$ $\lambda = 0.1176$.

d'importance physique décroissante : p, h^1, a^1, m, b^1, a^3.
e très-facile, parallèle à p. — Aspect tabulaire.

théorique : $p, h^1, a^1, a^2, a^3, m, b^{\frac{1}{2}}, b^1$, etc.
ord est très-satisfaisant, car l'importance physique relative des
rès-rares, m, b^1, a^3 est difficile à fixer avec précision (*).

ase. — $\frac{c}{a} = 0.760$ (**) $\lambda = 1.733$.

d'importance physique décroissante : $h^1, p, m, a^1, b^1, a^{\frac{1}{3}}$,
), $h^3, h^2, b^{\frac{1}{2}}$, etc.
eules formes importantes sont h^1, p, m, a^1. Clivages peu nets sui-
p, m.

théorique : $h^1, p, m, a^1, b^{\frac{1}{2}}, h^3, a^{\frac{1}{2}}, a_{\frac{1}{3}}, a^2, b^1$, etc.
ord peut être considéré comme satisfaisant. Il cesserait de l'être
adoptait la forme primitive donnée par M. Des Cloizeaux, avec
e le prisme dominant est noté m.

ODE OCTAÉDRAL. — La forme primitive est un prisme carré centré.
la formule précédente, il faudra quadrupler $s^2(pqr)$ quand
$+ r$ sera impair. La figure 282 est un abaque semblable aux pré-
. On y voit que m l'emporte toujours sur h^1 ; il faudra donc
e pour les axes de première espèce les diagonales de la base du
dominant. Comme a^1 est toujours l'octaèdre dominant, la forme
elle sera celle d'un prisme surmonté par un octaèdre placé sur
les du prisme.

PLES. — *Zircon* (***). — $\frac{c}{a} = 0.9057$ $\lambda = 1.219$.

e d'importance physique décroissante : $m\, a^1\, h^1\, a_3\, b^1\, a^{\frac{1}{2}}\, a^{\frac{1}{3}}\, p$.
ges assez nets suivant h^1 et a^1. Les faces m sont presque tou-
es plus développées.

ccord serait moins satisfaisant, si l'on donnait, avec Naumann, au prisme do-
le symbole m.
n double l'axe vertical adopté par M. Des Cloizeaux.
n appelle ici a^1 la forme notée b^1 par M. Des Cloizeaux.

Ordre théorique : $m\, a^1\, h^1\, p\, a_3\, b^1\, h^2\, a^{\frac{1}{3}}\, a^3\, b^{\frac{1}{2}}$.

Il y a ici deux anomalies assez considérables : d'une part, il clivage suivant h^1 et il n'y en a pas suivant m ; de l'autre, la fac la théorie donne comme importante est d'une telle rareté qu'on naît pas plus d'un ou deux échantillons qui la possèdent. La indique comme probable une forme $a_3 = \{211\}$ de notation p moins simple que beaucoup d'autres. L'observation confirme ce portance relative donnée à la forme a_3.

Wernérite. — $\frac{c}{a} = 0{\cdot}621 \quad \lambda = 2.591$.

Ordre d'importance physique décroissante : m, h^1, a^1, p, h^2, a_3
Clivage net suivant m, moins net suivant h^1.

Ordre théorique : $m, h^1, a^1, h^2, a_3, a^{\frac{1}{3}}, b^1, p$.

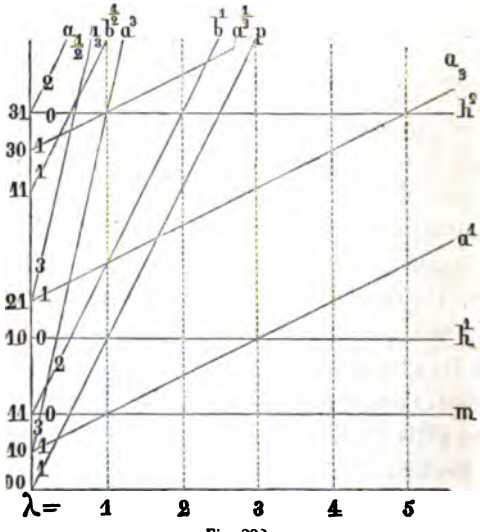


Fig. 282.

Sauf une anomalie peu considérable qui a rapport à l'imp relative de la forme p, l'accord entre les deux séries est satisfai

Apophyllite. — $\frac{c}{a} = 1.770 \quad \lambda = 0.319$.

Ordre d'importance physique décroissante : p, a^1, m, h^2, b^2, b^5.

Les formes qui suivent les trois premières sont à peu près s portance.

e très-facile parallèlement à p.

théorique : p, a^1, m, b^1, a^3, etc.

es formes dominantes dont l'importance est seule bien établie, est satisfaisant. On voit que la petitesse de λ est accompagnée age basique.

SYSTÈME TERBINAIRE

quatre modes pour le réseau :

E HEXAÉDRAL RECTANGLE. — La forme primitive est un prisme laire.

ant :

$$\lambda' = \frac{c^2}{a^2} \qquad \lambda = \frac{c^2}{b^2},$$

$$\frac{s^2(pqr)}{s^2(001)} = p^2\lambda' + q^2\lambda + r^2.$$

it tableau suivant montre ce que devient le second membre de ation pour les valeurs les plus simples de p, q, r :

	g^1	h^1	p	m	e^1	a^1	$b\frac{1}{2}$
	100	010	001	110	101	011	111
$\frac{s^2(pqr)}{s^2(001)} =$	λ'	λ	1	$\lambda'+\lambda$	$\lambda'+1$	$\lambda+1$	$\lambda'+\lambda+1$

néral, ce sont donc les faces du prisme rectangulaire g^1, h^1, p, dominent. De là la justification de la dénomination de mode al rectangle.

LE. — *Anhydrite.* — Trois clivages suivant p, g^1, h^1.

DE OCTAÉDRAL RECTANGLE. — La forme primitive est un prisme ulaire centré.

la formule qui donne $s^2(pqr)$, il faut doubler les trois caractè- s lorsque la somme est impaire. On a le tableau suivant :

	e^1	a^1	g^1	h^1	p	$b\frac{1}{2}$	e_3	a_3	b^1
	101	011	100	010	001	111	211	121	112
	$\lambda'+1$	$\lambda+1$	$4\lambda'$	4λ	4	$4\lambda'+4\lambda+4$	$4\lambda'+\lambda+1$	$\lambda'+4\lambda+1$	$\lambda'+\lambda+4$

Les formes dominantes seront donc deux des trois formes m, e^1, a^1. Ces deux formes, m et e^1 par exemple, combinées, donnent un octaèdre à base rectangulaire. De là le nom imposé à ce mode cristallin.

Exemple. — *Perchlorate de potasse.* — $a : b : c = 0.7817 : 1 : 0,6408$.

Ordre d'importance physique décroissante : m, a^1, e^1, p, g^1, h^1.

Ordre théorique :	m	a^1	h^1	e^1	g^1	p
	1.08	1.41	1.64	1.67	2.68	4.

3° Mode hexaédral rhombique. — La forme primitive est un prisme droit à base rhombe, ou, ce qui revient au même, un prisme rectangulaire à bases centrées. Dans la formule qui donne $s^2(pqr)$, il faut multiplier par 2 les caractéristiques p et q lorsque la somme en est impaire. On obtient ainsi la série suivante :

	p	m	g^1	h^1	$b^{\frac{1}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}}$	$a^{\frac{1}{2}}$	e^1	a^1
	001	110	100	010	111	201	021	101	011
$\frac{s^2(pqr)}{s^2(001)} =$	1	$\lambda'+\lambda$	$4\lambda'$	4λ	$\lambda'+\lambda+1$	$4\lambda'+1$	$4\lambda+1$	$4\lambda'+4$	$4\lambda+4$

On voit que les formes dominantes seront, en général, p et m, ce qui donne un prisme hexaédral rhombique. De là le nom du mode cristallin. Il faut remarquer, en outre, que $e^{\frac{1}{2}}$ et $a^{\frac{1}{2}}$ seront toujours plus importants que e^1 et a^1.

Exemple. — *Barytine.* — $a : b : c = 1.6107 : 1 : 1,2276$.

Ordre d'importance physique décroissante : p, m, g^1, h^1, e^1, a^2.

Clivage parfait suivant p, un peu moins parfait suivant m, imparfait suivant g^1.

Ordre théorique :	p	m	g^1	$e^{\frac{1}{2}}$	h^1	e^1	$a^{\frac{1}{2}}$	a^1	a^2
	1	2.19	2.72	3.72	6.04	6.72	7.04	10.04	22.04

La forme $e^{\frac{1}{2}}$ qui devrait théoriquement être plus importante que e^1, dans la nature l'est beaucoup moins, et la forme a^2 qui n'a qu'une importance théorique très-faible en a, dans la réalité, une assez considérable. Ce sont des anomalies inexpliquées. On pourrait essayer de les faire disparaître en diminuant c de moitié, ce qui donnerait au brachydome le plus important dans la nature le symbole $e^{\frac{1}{2}}$; mais alors l'importance théorique de m et de g^1 deviendrait plus considérable que celle de p, ce qui serait une anomalie plus considérable encore.

upposé dans ce qui précède que la base rhombe était dans le ; c'est toujours ainsi qu'on choisit ce plan. La forme des cris-ique toujours d'une façon suffisamment claire la position de se.

and nombre de cristaux appartenant au système terbinaire ont me primitive un prisme rhombique dont l'angle est très-voisin . Tous ces cristaux appartenant au mode hexaèdral rhombique réseau presque identique à celui d'un cristal hexagonal.

résulte que les aires des mailles planes correspondant aux diffé-ormes simples sont sensiblement les mêmes pour celles de ces dont la combinaison donnerait une forme simple du système nal. Aussi ces cristaux présentent-ils presque toujours une quasi-e sénaire.

ce qui se présente pour l'*aragonite :*

$$a : b : c = 849 : 528 : 612$$

$$\lambda = 1{,}35 \qquad \lambda' = 0.522$$

p	m	g^1	$b^{\frac{1}{2}}$	$e^{\frac{1}{2}}$	h^1	e^1	b^1
1	1.87	2.08	2.87	3	5.40	5.87	6

cristaux sont très-souvent formés du prisme m ($s^2 = 1.87$), com-vec la face g^1 ($s^2 = 2.08$) et figurent ainsi un prisme hexagonal régulier ; ce prisme est surmonté par la face p, ou par un poin-quasi-isoscéloédrique, formé par la combinaison de $b^{\frac{1}{2}}$ ($s^2 = 2.87$) $s^2 = 3$), ou par celle de e^1 ($s^2 = 6$) et b^1 ($s^2 = 5.87$).

ODE OCTAÉDRAL RHOMBIQUE. — La forme primitive est un prisme or-mbique centré ou un prisme rectangle à faces centrées.

s la formule qui donne s^2, on multipliera p, q, r par le nombre 2, e toutes ces caractéristiques ne seront pas paires. On forme ainsi eau suivant :

$b^{\frac{1}{2}}$	g^1	h^1	p	m	c^1	a^1
111	100	010	001	110	101	011
$\lambda' + \lambda + 1$	$4\lambda'$	4λ	4	$4\lambda' + 4\lambda$	$4\lambda' + 4$	$4\lambda + 4$

La forme dominante est presque toujours $b^{\frac{1}{2}}$; elle imprime la forme d'un octaèdre rhomboïdal plus ou moins modifiée par secondaires. Dans la recherche des paramètres, il faut donc l'octaèdre principal le symbole $b^{\frac{1}{2}}\left\{111\right\}$.

Le soufre, qui se présente presque toujours sous la forme taèdre à base rhombe, doit appartenir à ce mode cristallin.

SYSTÈME BINAIRE

Il y a deux modes possibles pour le réseau.

1° Mode hexaédral. — La forme primitive est un prisme obl métrique par rapport à un plan médian.

On a, à un facteur constant près :

$$s^2\,(pqr) = p^2\alpha + q^2 + r^2\gamma^2 - 2pr\,\alpha\gamma\cos\eta;$$

α étant égal à $\frac{A}{B}$ et γ à $\frac{C}{B}$. η est supposé plus grand que 90°.

Dans la zone du plan de symétrie ZX, on a :

	p	h	a^1	o^1
	001	100	$\bar{1}01$	101
$s^2 =$	γ^2	α^2	$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos\eta$	$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos\eta$

Puisque $\cos\eta$ est négatif, $s^2(a^1)$ est plus petit que $s^2(o^1)$, et formes dominantes de la zone seront p, h^1, a^1.

On a, dans les zones ZY, XY, a^1Y, o^1Y :

Zone ZY	p	g^1	e^1
	001	010	011
	γ^2	1	$1+\gamma^2$
Zone XY	g^1	h^1	m
	010	100	110
	1	α^2	α^2+1
Zone a^1Y	g^1	$b^{\frac{1}{2}}$	a^1
	010	$\bar{1}11$	$\bar{1}01$
	1	$\alpha^2+1+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos\eta$	$\alpha^2+\gamma^2 2\alpha\gamma$ cos

Y	g^1	$d^{\frac{1}{2}}$	o^1
	010	111	101
	1	$\alpha^2+1+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$	$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$

ninera la zone XY, qui est ordinairement la plus développée
ı cristal une apparence prismatique; dans cette zone, le
lus important est le prisme m, qui fixe la valeur de α. On
nsuite une des zones ZY, a^1Y ou o^1Y. C'est généralement la
i est la plus développée; le prisme le plus important de
st nommé e^1.

es dominantes dans les cristaux appartenant à ce mode cris-
en résumé, p, g^1, h^1, m, a^1, $b^{\frac{1}{2}}$.

ÉDRAL. — Il dérive du précédent en centrant le prisme ou
ces zy, xy.

ormule qui donne s^2,

'on centre les rectangles zy, on double les caractéristiques
impair;

'on centre les rectangles xy, on double les caractéristiques
impair;

'on centre le prisme, on double les caractéristiques si
st impair.

ge zy :

p	h^1	a^1	o^1
001	100	$\bar{1}01$	101
$4\gamma^2$	α^2	$4(\alpha^2+\gamma^2 2\alpha\gamma\cos n)$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$

g^1	h^1	m
010	100	110
4	α^2	$4(\alpha^2+1)$

p	g^1	e^1
001	010	011
$4\gamma^2$	4	$1+\gamma^2$

g^1	$b^{\frac{1}{2}}$	a^1
010	$\bar{1}11$	$\bar{1}01$
4	$\alpha^2+1+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos n$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$

g^1	$d^{\frac{1}{2}}$	o^1
010	111	101
4	$\alpha^2+1+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$

Les formes dominantes sont $h^1, e^1, b^{\frac{1}{2}}$.

II. *Centrage* xy :

Zone ZX	p	h^1	a^1	o^1
	001	100	$\bar{1}01$	101
	γ^2	$4\gamma^2$	$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos n$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2$
Zone XY	g^1	h^1	m	
	010	100	110	
	4	$4\alpha^2$	α^2+1	
Zone ZY	p	g^1	e^1	
	001	010	011	
	γ^2	4	$4(1+\gamma^2)$	
Zone a^1Y	g^1	$b^{\frac{1}{2}}$	a^1	
	010	$\bar{1}11$	$\bar{1}01$	
	4	$\alpha^2+1+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos n$	$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos n$	
Zone o^1Y	g^1	$d^{\frac{1}{2}}$	o^1	
	010	111	101	
	4	$\alpha^2+1+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$	

Les formes dominantes sont $p, m, a^1, b^{\frac{1}{2}}$.

III. *Centrage du prisme :*

Zone ZX	p	h^1	a^1	o^1
	001	100	$\bar{1}01$	101
	$4\gamma^2$	$4\alpha^2$	$\alpha^2+\gamma^2+2\alpha\gamma\cos n$	$4(\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma$ co
Zone XY	g^1	h^1	m	
	010	100	110	
	4	$4\alpha^2$	$1+\alpha^2$	
Zone ZY	p	g^1	e^1	
	001	010	011	
	$4\gamma^2$	4	$1+\gamma^2$	
Zone a·Y	g^1	$b^{\frac{1}{2}}$	a^1	
	010	$\bar{1}11$	$\bar{1}01$	
	4	$4(\alpha^2+1+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$	$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$	
Zone o^1Y	g^1	$d^{\frac{1}{2}}$	o^1	
	010	111	101	
	4	$4(\alpha^2+1+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n)$	$\alpha^2+\gamma^2-2\alpha\gamma\cos n$	

dominantes sont e^1, m, a^1, o^1.

- *Amphibole.* — Ordre d'importance physique décroissante :

m. — Plan d'hémitropie parallèle à h^1.

$a : b : c = 1.096 : 2 : 0.586 \qquad zx = \pi - 75°2'$.

sur la projection gnomonique les quantités suivantes :

g^1	h^1	m	p	$b^{\frac{1}{2}}$	e^1	a^1
= 1	1.75	2	3.35	3.5	3.5	3.9.

e de nombres ne rend pas compte de la prédominance tout éristique de m sur les autres faces ; on rend mieux compte llisation en supposant centrées les faces rectangles xy, ce série :

g^1	p	$b^{\frac{1}{2}}$	h^1	a^1	e^1	o^1	$d^{\frac{1}{2}}$
2	3.35	3.5	3.5	3.9	7.0	8.4	8.6.

e expliquant très-bien les principales particularités de la lline, on est amené à penser que le mode de structure du mphibole est le mode hexaédral, avec centrage des faces xy.

SYSTÈME ASYMÉTRIQUE

vons rien à dire de particulier sur ce système, qui n'offre mode de disposition du réseau.

en résumé, que la loi de Bravais, si elle est encore incom- et dans beaucoup de cas de se rendre un compte assez pré- ations qui lient la forme du réseau cristallin et celle du térieur. Cette loi mérite donc d'attirer plus qu'elle ne l'a fait ttention des cristallographes. Elle nous fait en effet, plus autre, pénétrer dans les problèmes d'arrangement intérieur les, problèmes obscurs et mystérieux sans doute, mais qui e j'ai essayé de le montrer, du domaine de la science la ie des hypothèses, et que l'on doit, par conséquent, s'effor- udre avec la certitude d'y arriver un jour.

TABLEAUX

ONTRANT POUR CHAQUE SYSTÈME CRISTALLIN

LA CONCORDANCE

IVERS MODES DE NOTATIONS SYMBOLIQUES

TABLEAUX

MONTRANT POUR CHAQUE SYSTÈME CRISTALLIN

LA CONCORDANCE

DIVERS MODES DE NOTATIONS SYMBOLIQUES

Système terquaternaire ou cubique.

.	MILLER.	LÉVY.	NAUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSER-VATIONS.
.	100	p	$\infty\, 0 \infty$	$a : \infty\ a : \infty\ a$	a	
. .	111	a^1	0	$a : a : a$	o	
DRE.	110	b^1	$\infty\, 0$	$a : a : \infty\ a$	d	
ES. .	$pq0$	$b^{\frac{p}{q}}$	$\infty\, 0 \frac{p}{q}$	$a : \frac{p}{q} a : \infty\ a$	$\frac{q}{p} d$	$p > q$
	320	$b^{\frac{3}{2}}$	$\infty\, 0 \frac{3}{2}$	$a : \frac{2}{3} a : \infty\ a$	$\frac{2}{3} d$	
	310	b^3	$\infty\, 0 3$	$a : \frac{1}{3} a . \infty\ a$	$\frac{1}{3} d$	
	210	b^2	$\infty\, 0 2$	$a : \frac{1}{2} a : \infty\ a$	$\frac{1}{2} d$	
	110	b^1	$\infty\, 0$	$a : a : \infty\ a$	d	
s. . .	pqq	$a^{\frac{p}{q}}$	$\frac{p}{q}\, 0 \frac{p}{q}$	$a : a : \frac{q}{p} a$	$\frac{q}{p} o$	$p > q$
	322	$a^{\frac{3}{2}}$	$\frac{3}{2}\, 0 \frac{3}{2}$	$a : a : \frac{2}{3} a$	$\frac{2}{3} o$	
	311	a^3	$3\, 0 3$	$a : a : \frac{1}{3} a$	$\frac{1}{3} o$	
	211	a^2	$2\, 0 2$	$a : a : \frac{1}{2} a$	$\frac{1}{2} o$	
s. . .	ppq	$a^{\frac{q}{p}}$	$\frac{p}{q} 0$	$a : \frac{q}{p} a : \frac{q}{p} a$	$\frac{p}{q} o$	$p > q$
	332	$a^{\frac{2}{3}}$	$\frac{3}{2} 0$	$a : \frac{2}{3} a : \frac{2}{3} a$	$\frac{3}{2} o$	
	331	$a^{\frac{1}{3}}$	$3\, 0$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{3} a$	$3o$	
	221	$a^{\frac{1}{2}}$	$2\, 0$	$a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a$	$2o$	
s. . .	pqr	$b^{\frac{1}{r}}\, b^{\frac{1}{q}}\, b^{\frac{1}{p}}$	$\frac{p}{r}\, 0 \frac{p}{q}$	$a : \frac{r}{q} a : \frac{r}{p} a$		$p > q > r$
	432	$b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$	$2 0 \frac{4}{3}$	$a : \frac{2}{3} a : \frac{1}{2} a$		
	431	$b^1\, b^{\frac{1}{3}}\, b^{\frac{1}{4}}$	$4 0 \frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{4} a$		
	421	$b^1\, b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{4}}$	$4\, 0 2$	$a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{4} a$		
	321	$b^1\, b^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{1}{3}}$	$3 0 \frac{2}{3}$	$a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{3} a$		

NOMS DES FORMES.	BRAVAIS.	LÉVY.
BASE.	0001	p
PRISMES.		
— Protoprisme.	$10\bar{1}0$	m
— Deutéroprisme	$11\bar{2}0$	h^1
— Prismes dodécagones.	$pq\bar{r}0$	$h^{\frac{p}{q}}$
— — —	$21\bar{3}0$	h^2
— — —	$31\bar{4}0$	h^3
— — —	$32\bar{5}0$	$h^{\frac{3}{2}}$
ISOSCÉLOÈDRES.		
— Protoisoscéloèdres. . . .	$p0\bar{p}s$	$b^{\frac{s}{p}}$
— —	$10\bar{1}1$	b^1
— —	$10\bar{1}2$	b^2
— —	$20\bar{2}1$	$b^{\frac{1}{2}}$
— Deutéroisoscéloèdres . .	$pp\overline{2p}s$	$a^{\frac{s}{p}}$
— —	$11\bar{2}1$	a^1
— —	$11\bar{2}2$	a^2
— —	$22\bar{4}1$	$a^{\frac{1}{2}}$
DIDODÉCAÈDRES.	$pq\bar{r}s$	$b^{\frac{1}{q}}\ b^{\frac{1}{p}}\ h^{\frac{1}{s}}$
— —	$21\bar{3}3$	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{3}}$
— —	$21\bar{3}2$	$a_{\frac{1}{2}}$
— —	$21\bar{3}1$	a_2
— —	$31\bar{4}3$	$a_{\frac{1}{3}}$
— —	$31\bar{4}2$	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$
— —	$31\bar{4}1$	a_3
— —	$32\bar{5}3$	$a_{\frac{2}{3}}$
— —	$32\bar{5}2$	$a_{\frac{3}{2}}$
— —	$32\bar{5}1$	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$

hexagonal.

WEISS-ROSE.		MILLER — FORMES BIRHOMBOÉDRIQUES — Directes.	MILLER — FORMES BIRHOMBOÉDRIQUES — Inverses.
$\infty a : \infty a : \infty a : c$	c	111	
$a : a : \infty a : \infty c$	g	$2\bar{1}\bar{1}$	
$2a : a : 2a : \infty c$	a	$10\bar{1}$	
$a : \frac{q}{r} a : \frac{q}{p} a : \infty c$	$\frac{q}{r} g$	$2p+q,\ q-p,\ -(2q+p)$	
$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \infty c$	$\frac{1}{3} g$	$5\bar{1}\bar{4}$	
$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \infty c$	$\frac{1}{4} g$	$7\bar{2}\bar{5}$	
$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : \infty c$	$\frac{2}{5} g$	$8\bar{1}\bar{7}$	
$a : a : \infty a : \frac{p}{s} c$	$\frac{p}{s} r$	$s+2p,\ s-p,\ s-p$	$s+p,\ s+p.\ s-2p$
$a : a : \infty a : c$	r	100	$22\bar{1}$
$a : a : \infty a : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} r$	411	110
$a : a : \infty a : 2c$	$2r$	$5\bar{1}\bar{1}$	$11\bar{1}$
$2a : a : 2a : \frac{2p}{s} c$	$\frac{2p}{s} d$	$s+3p,\ s,\ s-3p$	
$2a : a : 2a : 2c$	$2d$	$41\bar{2}$	
$2a : a : 2a : c$	d	$52\bar{1}$	
$2a : a : 2a : 4c$	$4d$	$71\bar{5}$	
$a : \frac{q}{r} a : \frac{q}{p} a : \frac{q}{s} c$	....	$s+2p+q$ $s+q-p$ $s-2q-p$	$s+2q+p$ $s+p-q$ $s-2p-q$
$a : \frac{1}{5} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{5} c$	....	$82\bar{1}$	$74\bar{2}$
$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} c$	....	$71\bar{2}$	$21\bar{1}$
$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : c$	....	$20\bar{1}$	$52\bar{4}$
$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{3} c$	....	$10.1.\bar{2}$	$85\bar{4}$
$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} c$	....	$30\bar{1}$	$74\bar{5}$
$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : c$	....	$8\bar{1}\bar{4}$	$21\bar{2}$
$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : \frac{2}{5} c$	....	$11.2.\bar{4}$	$10.4\bar{5}$
$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : c$	....	$10.1.\bar{5}$	$31\bar{2}$
$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : 2c$	....	$30\bar{2}$	$82\bar{7}$

Systèr

TRANSFORMATION DES SYMBOLES DE

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BRAV
BASE.	111	a^1	 000
RHOMBOÈDRE PRIMITIF . . .	100	p	. . . . . 10$\bar{1}$
PRISMES.			
— Protoprisme . . .	11$\bar{2}$	e^2	. . . . . 10$\bar{1}$
— Deutéroprisme . .	10$\bar{1}$	d^1	. . . . . 11$\bar{2}$
— Prismes dodéc. . .	$gh\ \overline{g+h}$	$b^{\frac{1}{g+h}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ g+2h,$
— — —	21$\bar{3}$	$b^{\frac{1}{3}}\ d^1\ d^{\frac{1}{2}}$	. . . . . 14$\bar{5}$0
— — —	31$\bar{4}$	$b^{\frac{1}{4}}\ d^1\ d^{\frac{1}{3}}$	. . . . . 25$\bar{7}$0
RHOMBOÈDRES.			
— 1° Sur b inverse. .	110	b^1	. . . . . 01$\bar{1}$2
— 2° Sur a directs. .	ghh	$a^{\frac{g}{h}}$	$g-h,\ 0,\ h-$
— — —	211	a^2	. . . . . 10$\bar{1}$4
— — —	311	a^3	. . . . . 20$\bar{2}$5
— — —	322	$a^{\frac{3}{2}}$	. . . . . 10$\bar{1}$7

hexagonal.

WEISS-ROSE.		MILLER — FORMES BIRHOMBOÉDRIQUES — Directes.	Inverses.
$c\ a : \infty\ a : \infty\ a : c$	c	 111	
$a : a : \infty\ a : \infty\ c$	g	. . . . . $2\bar{1}\bar{1}$	
$2a : a : 2a : \infty\ c$	a	. . . . . $10\bar{1}$	
$a : \frac{q}{r}\ a : \frac{q}{p}\ a : \infty\ c$	$\frac{q}{r}\ g$	. . . . $2p+q,\quad q-p,$	$-(2q+p)$
$a : \frac{1}{3}\ a : \frac{1}{2}\ a : \infty\ c$	$\frac{1}{3}\ g$	. . . . . $5\bar{1}\bar{4}$	
$a : \frac{1}{4}\ a : \frac{1}{3}\ a : \infty\ c$	$\frac{1}{4}\ g$	. . . . . $7\bar{2}\bar{5}$	
$a : \frac{2}{5}\ a : \frac{2}{3}\ a : \infty\ c$	$\frac{2}{5}\ g$	. . . . . $8\bar{1}\bar{7}$	
$a : a : \infty\ a : \frac{p}{s}\ c$	$\frac{p}{s}\ r$	$s+2p,\quad s-p,\quad s-p$	$s+p,\quad s+p.\quad s-2p$
$a : a : \infty\ a : c$	r	. . . . . 100	. . . . . $22\bar{1}$
$a : a : \infty\ a : \frac{1}{2}\ c$	$\frac{1}{2}\ r$	. . . . . 411	 110
$a : a : \infty\ a : 2c$	$2r$	. . . . . $5\bar{1}\bar{1}$	. . . . . $11\bar{1}$
$2a : a : 2a : \frac{2p}{s}\ c$	$\frac{2p}{s}\ d$	. . . . . $s+3p,\quad s,\quad s-3p$	
$2a : a : 2a : 2c$	$2d$	. . . . . $41\bar{2}$	
$2a : a : 2a : c$	d	. . . . . $52\bar{1}$	
$2a : a : 2a : 4c$	$4d$	. . . . . $71\bar{5}$	
$a : \frac{q}{r}\ a : \frac{q}{p}\ a : \frac{q}{s}\ c$	. . . .	$s+2p+q$ $s+q-p$ $s-2q-p$	$s+2q+p$ $s+p-q$ $s-2p-q$
$a : \frac{1}{5}\ a : \frac{1}{2}\ a : \frac{1}{3}\ c$	. . . .	. . . . . $82\bar{1}$	. . . . . $74\bar{2}$
$a : \frac{1}{3}\ a : \frac{1}{2}\ a : \frac{1}{2}\ c$	. . . .	. . . . . $71\bar{2}$	. . . . . $21\bar{1}$
$a : \frac{1}{3}\ a : \frac{1}{2}\ a : c$	. . . .	. . . . . $20\bar{1}$	. . . . . $52\bar{4}$
$a : \frac{1}{4}\ a : \frac{1}{3}\ a : \frac{1}{3}\ c$	. . . .	. . . . . $10.1.\bar{2}$	. . . . . $85\bar{4}$
$a : \frac{1}{4}\ a : \frac{1}{3}\ a : \frac{1}{2}\ c$	. . . .	. . . . . $30\bar{1}$	. . . . . $74\bar{5}$
$a : \frac{1}{4}\ a : \frac{1}{3}\ a : c$	. . . .	. . . . . $8\bar{1}\bar{4}$	. . . . . $21\bar{2}$
$a : \frac{2}{5}\ a : \frac{2}{3}\ a : \frac{2}{5}\ c$	. . . .	. . . . . $11.2.\bar{4}$	. . . . $10.4\ \bar{5}$
$a : \frac{2}{5}\ a : \frac{2}{3}\ a : c$	. . . .	. . . . . $10.1.\bar{5}$	. . . . . $31\bar{2}$
$a : \frac{2}{5}\ a : \frac{2}{3}\ a : 2c$	. . . .	. . . . . $30\bar{2}$	. . . . . $82\bar{7}$

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BR
RHOMBOÈDRES.			
— 2° Sur a inverses.	ggh	$a^{\frac{h}{g}}$	$0,\ g-h,\ h$
— — —	221	$a^{\frac{1}{2}}$	 0
— — —	331	$a^{\frac{1}{3}}$	 0
— — —	332	$a^{\frac{2}{3}}$	 0
— 3° Sur e directs. .	$g\bar{h}\bar{h}$	$e^{\frac{g}{h}}$	$g+h,\ 0,\ \bar{g}$
— — —	$2\bar{1}\bar{1}$	e^{2}	 1
— — —	$3\bar{1}\bar{1}$	e^{3}	 4
— — —	$5\bar{2}\bar{2}$	$e^{\frac{5}{2}}$	 7
— — inverses. .	$gg\bar{h}$	$e^{\frac{h}{g}}$	$0,\ g+h,\ \bar{g}$
— — —	$11\bar{2}$	e^{2}	 01
— — —	$11\bar{1}$	e^{1}	 02
— — —	$22\bar{1}$	$e^{\frac{1}{2}}$	 01
ISOSCÉLOÈDRES.			
— 1° Sur les angles a.	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ g-h,$
— — —	321	$b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$	 11
— — —	432	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{4}}$	 11
— — —	531	$b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{5}}$	 22
— 2° Sur l'arête b. .	210	b^{2}	 11
— 3° Sur les angles e.	$gh\bar{k}$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ g-h,$
— — —	$31\bar{1}$	$b^{1}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}=e_{3}$	 22
— — —	$41\bar{2}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{4}}$	 11
— — —	$52\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	 11

III

ou rhomboédrique

EN SYMBOLES DE BRAVAIS, NAUMANN ET WEISS.

NAUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
. . . $0\mathrm{R}$	$\infty a : \infty a : \infty a : c$	c	
. . . $+\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : c$	r	
. . . $\infty\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : \infty c$	g	
. . . $\infty\mathrm{R}2$	$2a : a : 2a : \infty c$	a	
. . . $\infty\mathrm{R}\frac{2g}{g+2h}$	$a : \frac{g-h}{2g+h}a : \frac{g-h}{g+2h}a : \infty c$	$\frac{g-h}{2g+h}g$	
. . . $\infty\mathrm{R}\frac{5}{4}$	$a : \frac{1}{5}a : \frac{1}{4}a : \infty c$	$\frac{1}{5}g$	
. . . $\infty\mathrm{R}\frac{7}{5}$	$a : \frac{2}{7}a : \frac{2}{5}a : \infty c$	$\frac{2}{7}g$	
. . . $-\frac{1}{2}\mathrm{R}$	$\left(a : a : \infty a : \frac{1}{2}c\right)'$	$\frac{1}{2}r'$	
$+\frac{g-h}{2h+g}\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : \frac{g-h}{2h+g}c$	$\frac{g-h}{2h+g}r$	
. . . $+\frac{1}{4}\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : \frac{1}{4}c$	$\frac{1}{4}r$	
. . . $+\frac{2}{5}\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : \frac{2}{5}c$	$\frac{2}{5}r$	
. . . $+\frac{1}{7}\mathrm{R}$	$a : a : \infty a : \frac{1}{7}c$	$\frac{1}{7}r$	

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BRA
SCALÉNOÈDRES.			
— 1° Sur b directs. .	$gh0$	$b^{\frac{g}{h}}$	$g-h,\ h$
— — —	310	b^3	 2
— — —	410	b^4	 3
— — —	520	$b^{\frac{5}{2}}$	 3
— — inverses. .	$gh0$	$b^{\frac{g}{h}}$	$g-h,\ h,$
— — —	320	$b^{\frac{3}{2}}$	 12
— — —	430	$b^{\frac{4}{3}}$	 13
— — —	530	$b^{\frac{5}{3}}$	 23
— 2° Sur d directs. .	$g0\bar{k}$	$d^{\frac{g}{k}}$	$g,\ k,\ \overline{g+}$
— — —	$20\bar{1}$	d^2	 21
— — —	$30\bar{1}$	d^3	 31
— — —	$30\bar{2}$	$d^{\frac{3}{2}}$	 32
— 3° Sur a directs. .	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h-k,\ k-$
— — —	421	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}$	 21
— — —	521	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{5}}$	 31
— — —	621	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{6}}$	 41

mboédrique.

UMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$\frac{g}{+h}$ R $\frac{g}{g-h}$	$a : \frac{h}{g} a : \frac{h}{g-h} a : \frac{h}{g+h} c$	.....	$\frac{g}{h} > 2$
$+\frac{3}{4}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{4} c$		
$+\frac{4}{5}$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{5} c$		
$+\frac{5}{7}$ R $\frac{5}{3}$	$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : \frac{2}{7} c$		
$\frac{g}{g+h}$ R $\frac{g}{h}$	$a : \frac{g-h}{g} a : \frac{g-h}{h} a : \frac{g-h}{g+h} c$	.....	$\frac{g}{h} < 2$
$-\frac{3}{5}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{5} c$		
$-\frac{4}{7}$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{7} c$		
$-\frac{5}{8}$ R $\frac{5}{3}$	$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : \frac{1}{4} c$		
$+\frac{g+k}{g-k}$ R $\frac{g+k}{g}$	$a : \frac{k}{g+k} a : \frac{k}{g} a : \frac{k}{g-k} c$		
$+3$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : c$		
$+2$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} c$		
$+5$ R $\frac{5}{3}$	$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : 2c$		
$\frac{g-k}{+h+k}$ R $\frac{g-k}{g-h}$	$a : \frac{h-k}{g-k} a : \frac{h-k}{g-h} a : \frac{h-k}{g+h+k} c$	.....	$g+k > 2h$
$+\frac{3}{7}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{7} c$		
$+\frac{1}{2}$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{8} c$		
$+\frac{5}{9}$ R $\frac{5}{4}$	$a : \frac{1}{5} a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{9} c$		

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BRAVAIS.
SCALÉNOÈDRES.			
— 3° Sur *a* inverses. .	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h-k,\ k-g,\ g$
— — —	431	$b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{4}}$	. . . . . $12\bar{3}8$ . .
— — —	541	$b^{1}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{5}}$	. . . . . $1\ 3.\bar{4}.10$
— — —	542	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{5}}$	. . . . . $1.2.\bar{3}.11$
— 4° Sur *e* directs. .	$g\bar{h}\bar{k}$	$b^{\frac{1}{g}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{k}}$	$g+h,\ k-h,\ \overline{k+g},\ g-$
— — —	$41\bar{2}$	$b^{\frac{1}{4}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{2}}$	. . . . . $51\bar{6}1$.
— — —	$51\bar{3}$	$b^{\frac{1}{5}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}$	. . . . . $62\bar{8}1$ . . .
— — —	$62\bar{3}$	$b^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{3}}$	. . . . . $81\bar{9}1$ . . .
— — —	$gh\bar{k}$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h+k,\ \overline{g+k},\ g+$
— — —	$41\bar{1}$	e_4	. . . . . $32\bar{5}4$ . . .
— — —	$51\bar{1}$	e_5	. . . . . $42\bar{6}5$ . . .
— — —	$51\bar{2}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}$	. . . . . $43\bar{7}4$ . . .
— — —	$52\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	. . . . . $11\bar{2}2$ . . .
— — inverses. .	$gh\bar{k}$	$d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}\ b^{\frac{1}{k}}$	$g-h,\ h+k,\ \overline{g+k},\ g+$
— — —	$21\bar{1}$	e_2	. . . . . $12\bar{5}2$ . . .
— — —	$32\bar{1}$	$d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{3}}\ b^{1}$	. . . . . $13\bar{4}4$ . . .
— — —	$32\bar{2}$	$e_{\frac{3}{2}}$	. . . . . $14\bar{5}3$ . . .
— — —	$32\bar{3}$	$e_{\frac{2}{3}}$	. . . . . $15\bar{6}2$ . . .

mboles de Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.

MILLER.	LÉVY.	OBSERVATIONS.
$s+r,\ s+r,\ \overline{2r-s}$	$e^{\frac{2r-s}{s+r}}$	$s<2r$ ou $\frac{r}{s}>\frac{1}{2}$
$77\bar{2}$	$e^{\frac{3}{7}}$	
$22\bar{1}$	$e^{\frac{1}{2}}$	
$55\bar{4}$	$e^{\frac{5}{4}}$	
$11\bar{1}$	e^{1}	
$2s+3r,\ 2s,\ 2s-3r$	$b^{\frac{1}{2s-3r}}\ b^{\frac{1}{2s}}\ b^{\frac{1}{2s+3r}}$	$2s-3r>0$ ou $\frac{r}{s}<\frac{2}{3}$
741	$b^{1}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{7}}$	
321	$b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$	
852	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{8}}$	
201	b^{2}	
$2s+3r,\ 2s,\ \overline{3r-2s}$	$b^{\frac{1}{3r-2s}}\ d^{\frac{1}{2s}}\ d^{\frac{1}{2s+3r}}$	$2s-3r<0$ ou $\frac{r}{s}>\frac{2}{3}$
$52\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	
$41\bar{2}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{4}}$	
$11.2.\bar{7}$	$b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{11}}$	
$17.8.\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{17}}$	
$r,\ s-r,\ 0$	$b^{\frac{r}{s-r}}$	$s+p-2r=0$
310	b^{3}	
410	b^{4}	
510	b^{5}	
$p,\ 0,\ \overline{p-s}$	$d^{\frac{p}{p-s}}$	$s+r-2p=0$
$20\bar{1}$	d^{2}	
$30\bar{1}$	d^{3}	
$40\bar{1}$	d^{4}	

Système ternaire ou rhomboédrique. Transform

NOMS DES FORMES.	NAUMANN.	
BASE.	0R	. . . .
RHOMBOÈDRE PRIMITIF.	+ R	. . . .
PRISMES.		
— Protoprisme.	∞ R	. . . .
— Deutéroprisme.	∞ R2	. . . .
— Prismes dodécag. . .	$\infty R \frac{r}{q}$	r —
— —	$\infty R \frac{5}{2}$	. . . . .
— —	$\infty R \frac{4}{3}$	. . . . .
— —	$\infty R \frac{5}{3}$	. . . . .
RHOMBOÈDRES —		
— Directs 1° sur *a*. . .	$+\frac{r}{s} R$	. . . . .
— — —	$+\frac{1}{2} R$	. . . . .
— — —	$+\frac{1}{3} R$	. . . . .
— — —	$+\frac{2}{3} R$	. . . . .
— — —	$+\frac{3}{4} R$	. . . . .
— — 2° sur *e*. . . .	$+\frac{r}{s} R$	. . . . .
— — —	+ 2R	. . . . .
— — —	+ 3R	. . . . .
— — —	$+\frac{3}{2} R$	. . . . .
— inverses 1° sur *b*. . .	$-\frac{1}{2} R$	. . . . .
— — 2° sur *a*. . .	$-\frac{r}{s} R$	. . . . .
— — —	$-\frac{1}{3} R$	. . . . .
— — —	$-\frac{1}{4} R$	. . . . .
— — —	$-\frac{2}{5} R$	. . . . .

Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.

MILLER.	LÉVY.	OBSERVATIONS.
. . . 111	. . . . a^1	
. . . 100	. . . . p	
. . . $11\bar{2}$	. . . . e^2	
. . . $10\bar{1}$	. . . . d^1	
$r-q,\ 2q-r,\ \overline{q+r}$.	. . $b^{\frac{1}{q+r}}\ d^{\frac{1}{2q-r}}\ d^{\frac{1}{2r-q}}$	
. . . . $41\bar{5}$	. . . . $b^{\frac{1}{5}}\ d^{\frac{1}{4}}\ d^{\frac{1}{4}}$	
. . . . . $52\bar{7}$	. . . . $b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	
. . . . . $71\bar{8}$	. . . . $b^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{1}}\ d^{\frac{1}{7}}$	
$s+2r,\ s-r,\ s-r$ . .	. . . . . $a^{\frac{s+2r}{s-r}}$	$s > r$
. . . . . 411	. . . . a^4	
. . . . . 522	. . . $a^{\frac{5}{2}}$	
. . . . . 711	. . . . a^7	
. . . . . 10 1.1	. . . . a^{10}	
. $s+2r,\ \overline{r-s},\ \overline{r-s}$ . .	. . . . $e^{\frac{s+2r}{r-s}}$	$s < r$
. . . . . $5\bar{2}\bar{2}$	. . . . $e^{\frac{5}{2}}$	
. . . . . $7\bar{3}\bar{3}$	. . . . $e^{\frac{7}{3}}$	
. . . . . $8\bar{1}\bar{1}$	. . . . e^8	
. . . . . 110	. . . . b^1	
. $s+r,\ s+r,\ s-2r$ . .	. . . . $a^{\frac{s-2r}{s+r}}$	$s > 2r$ ou $\frac{r}{s} < \frac{1}{2}$
. . . . . 441	. . . . $a^{\frac{1}{4}}$	
. . . . . 552	. . . . $a^{\frac{5}{2}}$	
. . . . . 771	. . . . $a^{\frac{1}{7}}$	

Système ternaire ou rhomboédrique. Tran

NOMS DES FORMES.	NAUMANN.	
RHOMBOÈDRES INVERSES. 3° sur *e*. . .	$-\frac{r}{s}$ R	. . .
— — —	$-\frac{3}{4}$ R	. . .
— — —	$-$ R	. . .
— — —	$-\frac{3}{2}$ R	. . .
— — —	$-$ 2R	. . .
ISOSCÉLOÈDRES.		
— 1° sur *a*. . .	$\frac{r}{s}$ P2	. . .
— —	$\frac{1}{2}$ P2	. . .
— —	$\frac{1}{3}$ P2	. . .
— —	$\frac{2}{3}$ P2	. . .
— 2° sur *b*. . .	$\frac{2}{3}$ P2	. . .
— 3° sur *e*. . .	$\frac{r}{s}$ P2	. . .
— —	P2	. . .
— —	2P2	. . .
— —	3P2	. . .
— —	$\frac{3}{4}$ P2	. . .
SCALÉNOÈDRES.		
— Directs 1° sur *b*. . .	$+\frac{r}{s}$ R $\frac{r}{p}$	. . *p*
— — —	$+\frac{3}{4}$ R $\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$+\frac{4}{5}$ R $\frac{3}{4}$	. . . .
— — —	$+\frac{5}{6}$ R $\frac{5}{4}$	. . . .
— — 2° sur *d*. . .	$+\frac{r}{s}$ R $\frac{r}{p}$	. . *p*,
— — —	$+3$ R $\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$+2$ R $\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$+\frac{5}{3}$ R $\frac{5}{4}$	. . . .

de Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.

MILLER.	LÉVY.	OBSERVATIONS.
$+r,\ s+r,\ \overline{2r-s}$ . .	. . . . . $e^{\frac{2r-s}{s+r}}$	$s<2r$ ou $\frac{r}{s}>\frac{1}{2}$
. . . 77$\bar{2}$	. . . . . $e^{\frac{2}{7}}$	
. . . . 22$\bar{1}$	. . . . . $e^{\frac{1}{2}}$	
. . . . 55$\bar{4}$	. . . . . $e^{\frac{5}{4}}$	
. . . . 11$\bar{1}$	. . . . . e^{1}	
$2s+3r,\ 2s,\ 2s-3r$ . .	. . $b^{\frac{1}{2s-3r}}\ b^{\frac{1}{2s}}\ b^{\frac{1}{2s+3r}}$ . .	$2s-3r>0$ ou $\frac{r}{s}<\frac{2}{3}$
. . . . 741	. . . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{7}}$	
. . . . 321	. . . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$	
. . . . 852	. . . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{8}}$	
. . . . 201	. . . . . b^{2}	
$2s+3r,\ 2s,\ \overline{3r-2s}$ . .	. . $b^{\frac{1}{3r-2s}}\ d^{\frac{1}{2s}}\ d^{\frac{1}{2s+3r}}$ . .	$2s-3r<0$ ou $\frac{r}{s}>\frac{2}{3}$
. . . . . 52$\bar{1}$	. . . . $b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	
. . . . . 41$\bar{2}$	. . . . $b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{4}}$	
. . . . . 11.2.$\bar{7}$	. . . . $b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{11}}$	
. . . . . 17.8.$\bar{1}$	. . . . $b^{1}\ d^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{17}}$	
. . . $r,\ s-r,\ 0$	. . . . . $b^{\frac{r}{s-r}}$	$s+p-2r=0$
. . . . . 310	. . . . . b^{3}	
. . . . . 410	. . . . . b^{4}	
. . . . . 510	. . . . . b^{5}	
. . . . $p,\ 0,\ \overline{p-s}$	. . . . . $d^{\frac{p}{p-s}}$	$s+r-2p=0$
. . . . . 20$\bar{1}$	. . . . . d^{2}	
. . . . . 30$\bar{1}$	. . . . . d^{3}	
. . . . . 40$\bar{1}$	. . . . . d^{4}	

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BRA
RHOMBOÈDRES.			
— 2° Sur a inverses.	ggh	$a^{\frac{h}{g}}$	$0,\ g-h,\ h$
— — —	221	$a^{\frac{1}{2}}$	 0
— — —	331	$a^{\frac{1}{3}}$	 0
— — —	332	$a^{\frac{2}{3}}$	 0
— 3° Sur e directs. .	$g\bar{h}\bar{h}$	$e^{\frac{g}{h}}$	$g+h,\ 0,\ \overline{g}$
— — —	$2\bar{1}\bar{1}$	e^{2}	 10
— — —	$3\bar{1}\bar{1}$	e^{3}	 40
— — —	$5\bar{2}\bar{2}$	$e^{\frac{5}{2}}$	 70
— — inverses. .	$gg\bar{h}$	$e^{\frac{h}{g}}$	$0,\ g+h,\ \overline{g}$
— — —	$11\bar{2}$	e^{2}	 01
— — —	$11\bar{1}$	e^{1}	 02
— — —	$22\bar{1}$	$e^{\frac{1}{2}}$	 01
ISOSCÉLOÈDRES.			
— 1° Sur les angles a.	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ g-h,$
— — —	321	$b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$	 11
— — —	432	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{4}}$	 11
— — —	531	$b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{5}}$	 22
— 2° Sur l'arête b. .	210	b^{2}	 11
— 3° Sur les angles e.	$gh\bar{k}$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ g-h,$
— — —	$31\bar{1}$	$b^{1}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}=e_{3}$	 22
— — —	$41\bar{2}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{4}}$	 11
— — —	$52\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	 11

AUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$\frac{-h}{+h}$R	$\left(a : a : \infty a : \frac{g-h}{2g+h} c\right)'$	$\frac{g-h}{2g+h} r'$	
$-\frac{1}{5}$R	$\left(a : a : \infty a : \frac{1}{5} c\right)'$	$\frac{1}{5} r'$	
$-\frac{2}{7}$R	$\left(a : a : \infty a : \frac{2}{7} c\right)'$	$\frac{2}{7} r'$	
$-\frac{1}{8}$R	$\left(a : a : \infty a : \frac{1}{8} c\right)'$	$\frac{1}{8} r'$	
$\frac{+h}{-2h}$R	$a : a : \infty a : \frac{g+h}{g-2h} c$	$\frac{g+h}{g-2h} r$	$\frac{g}{h} > 2$
$+\infty$R	$a : a : \infty a : \infty c$	g	
$+4$R	$a : a : \infty a : 4c$	$4r$	
$+7$R	$a : a : \infty a : 7c$	$7r$	
$\frac{+h}{g-h}$R	$\left(a : a : \infty a : \frac{g+h}{2g-h} c\right)'$	$\frac{g+h}{2g-h} r'$	$\frac{h}{g} < 2$
∞R	$a : a : \infty a : \infty c$	g	
-2R	$(a : a : \infty a : 2c)'$	$2r'$	
$-$R	$(a : a : \infty c : c)'$	r'	
$\frac{(g-h)}{3h}$P2	$2a : a : 2a : \frac{2(g-h)}{3h} c$	$\frac{2(g-h)}{3h} d$	$g+k=2h$
$\frac{1}{3}$P2	$2a : a : 2a : \frac{1}{3} c$	$\frac{1}{3} d$	
$\frac{2}{9}$P2	$2a : a : 2a : \frac{2}{9} c$	$\frac{2}{9} d$	
$\frac{4}{9}$P2	$2a : a : 2a : \frac{4}{9} c$	$\frac{4}{9} d$	
$\frac{2}{3}$P2	$2a : a : 2a : \frac{2}{3} c$	$\frac{2}{3} r$	
$\frac{(g-h)}{3h}$P2	$2a : a : 2a : \frac{2(g-h)}{3h} c$	$\frac{2(g-h)}{3h} d$	$g-k=2h$
$\frac{4}{3}$P2	$2a : a : 2a : \frac{4}{3} c$	$\frac{4}{3} d$	
2P2	$2a : a : 2a : 2c$	$2d$	
P2	$2a : a : 2a : 2c$	d	

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BRA
SCALÉNOÈDRES.			
— 1° Sur b directs. .	$gh0$	$b^{\frac{g}{h}}$	$g-h,\ h,$
— — —	310	b^3	 21
— — —	410	b^4	 31
— — —	520	$b^{\frac{5}{2}}$	 32
— — inverses. .	$gh0$	$b^{\frac{g}{h}}$	$g-h,\ h,$
— — —	320	$b^{\frac{3}{2}}$	 12
— — —	430	$b^{\frac{4}{3}}$	 13
— — —	530	$b^{\frac{5}{3}}$	 23
— 2° Sur d directs. .	$g0\bar{k}$	$d^{\frac{g}{k}}$	$g,\ k,\ \overline{g+}$
— — —	$20\bar{1}$	d^2	 21
— — —	$30\bar{1}$	d^3	 31
— — —	$30\bar{2}$	$d^{\frac{3}{2}}$	 32
— 3° Sur a directs. .	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h-k,\ k$
— — —	421	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}$	 21
— — —	521	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{5}}$	 31
— — —	621	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{6}}$	 41

V (2)

quadratique.

	SYMBOLES			
	lorsque l'ancien $b^{\frac{1}{2}}$ devient a^1 $\frac{h'}{a'}=\sqrt{2}\,\frac{h}{a}$		lorsque l'ancien a^1 devient $b^{\frac{1}{2}}$ $\frac{h'}{a'}=\frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{h}{a}$	
$\frac{p}{r}\,d$	. . . . pp 2r	$b^{\frac{r}{2}}$	. . . . ppr	$b^{\frac{r}{2p}}$
d	. . . . 112	b^1	. . . . 111	$b^{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}\,d$	. . . . 114	b^2	. . . . 112	b^1
$2d$	. . . . 111	$b^{\frac{1}{2}}$	. . . . 221	$b^{\frac{1}{4}}$
$\frac{2}{3}\,d$	. . . . 113	$b^{\frac{3}{2}}$	. . . . 223	$b^{\frac{3}{4}}$
	$p+q,\ p-q,\ 2r$	$b^{\frac{1}{q}}\ b^{\frac{1}{p}}\ h^{\frac{1}{r}}$	$p+q,\ p-q,\ r$	$b^{\frac{1}{2q}}\ b^{\frac{1}{2p}}\ h^{\frac{1}{r}}$
	. . . . 312	a_2	. . . . 311	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^1$
	. . . . 314	$a_{\frac{1}{2}}$	. . . . 312	a_2
	. . . . 316	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{3}}$	. . . . 313	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{3}}$
	. . . . 211	a_3	. . . . 421	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$
	. . . . 212	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$	. . . . 211	a_3
	. . . . 213	$a_{\frac{1}{3}}$	. . . . 423	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^{\frac{1}{3}}$
	. . . . 512	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$	. . . . 511	$b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^1$
	. . . . 514	$a_{\frac{3}{2}}$	. . . . 512	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	BR
SCALÉNOÈDRES.			
— 3° Sur *a* inverses. .	ghk	$b^{\frac{1}{k}}\ b^{\frac{1}{h}}\ b^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h-k,$
— — —	431	$b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ b^{\frac{1}{4}}$	 1
— — —	541	$b^{1}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{5}}$	. . . . . 1 3
— — —	542	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{5}}$	. . . . . 1.2
— 4° Sur *e* directs. .	$gh\bar{k}$	$b^{\frac{1}{g}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{k}}$	$g+h,\ k-h,$
— — —	$41\bar{2}$	$b^{\frac{1}{4}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{2}}$	 5
— — —	$51\bar{3}$	$b^{\frac{1}{5}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}$	 6
— — —	$62\bar{3}$	$b^{\frac{1}{6}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{3}}$	 8
— — —	$gh\bar{k}$	$b^{\frac{1}{k}}\ d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}$	$g-h,\ h+k,$
— — —	$41\bar{1}$	e_4	 3
— — —	$51\bar{1}$	e_5	 4
— — —	$51\bar{2}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{3}}$	 4
— — —	$52\bar{1}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{3}}$	 1
— — inverses. .	$gh\bar{k}$	$d^{\frac{1}{h}}\ d^{\frac{1}{g}}\ b^{\frac{1}{k}}$	$g-h,\ h+k,$
— — —	$21\bar{1}$	e_2	 12
— — —	$32\bar{1}$	$d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{3}}\ b^{1}$	 13
— — —	$32\bar{2}$	$e_{\frac{3}{2}}$	 14
— — —	$32\bar{3}$	$e_{\frac{2}{3}}$	 15

ombohédrique.

AUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$\frac{-k}{h+k}$ R $\frac{g-k}{h-k}$	$a : \frac{g-h}{g-k} a : \frac{g-h}{h-k} a : \frac{g-h}{g+h+k} c$	.....	$g+k<2h$
. $-\frac{3}{8}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{8} c$		
. $-\frac{1}{2}$ R $\frac{5}{3}$	$a : \frac{1}{5} a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{10} c$		
. $-\frac{3}{11}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{11} c$		
$\frac{+g}{-h-k}$ R $\frac{k+g}{g+h}$	$a : \frac{k-h}{g+k} a : \frac{k-h}{g+h} a : \frac{k-h}{g-h-k} c$		
. $+6$ R $\frac{6}{5}$	$a . \frac{1}{6} a : \frac{1}{5} a : c$		
.. $+8$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{1}{4} a : \frac{1}{3} a : 2c$		
.. $+9$ R $\frac{9}{8}$	$a : \frac{1}{9} a : \frac{1}{8} a : c$		
$\frac{g+k}{+h-k}$ R $\frac{g+k}{g-h}$	$a : \frac{h+k}{g+k} a : \frac{h+k}{g-h} a : \frac{h+k}{g+h-k} c$	.....	$g-k>2h$
.. $+\frac{5}{4}$ R $\frac{5}{3}$	$a : \frac{2}{5} a : \frac{2}{3} a : \frac{1}{2} c$		
.. $+\frac{6}{5}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{2} a : \frac{2}{5} c$		
.. $+\frac{7}{4}$ R $\frac{7}{4}$	$a : \frac{3}{7} a : \frac{3}{4} a : \frac{3}{4} c$		
.. $+$ R 2	$a : \frac{1}{2} a : a : \frac{1}{2} c$		
$\frac{g+k}{g+h-k}$ R $\frac{g+k}{g-h}$	$a : \frac{h+k}{g+k} a : \frac{h+k}{g-h} a : \frac{h+k}{g+h-k} c$	.....	$g-k<2h$
.. $-\frac{3}{2}$ R $\frac{3}{2}$	$a : \frac{2}{3} a : 2a : c$		
.. $-$ R $\frac{4}{3}$	$a : \frac{3}{4} a : 3a : \frac{3}{4} c$		
. $-\frac{5}{3}$ R $\frac{5}{4}$	$a : \frac{4}{5} a : 4a : \frac{4}{3} c$		
. . -3 R $\frac{6}{5}$	$a : \frac{5}{6} a : 5a : \frac{5}{2} c$		

Système ternaire ou rhomboédrique. Transfor

NOMS DES FORMES.	NAUMANN.	
BASE.	0R	. . .
RHOMBOÈDRE PRIMITIF.	+ R	. . .
PRISMES.		
— Protoprisme.	∞ R	. . .
— Deutéroprisme.	∞ R2	. . .
— Prismes dodécag. . .	∞ R $\frac{r}{q}$	r
— —	∞ R $\frac{3}{2}$	. . .
— —	∞ R $\frac{4}{3}$	. . .
— —	∞ R $\frac{5}{3}$	. . .
RHOMBOÈDRES —		
— Directs 1° sur *a*. . .	+ $\frac{r}{s}$ R	. . . .
— — —	+ $\frac{1}{2}$ R	. . . .
— — —	+ $\frac{1}{3}$ R	. . . .
— — —	+ $\frac{2}{3}$ R	. . . .
— — —	+ $\frac{3}{4}$ R	. . . .
— — 2° sur *e*. . . .	+ $\frac{r}{s}$ R	. . . .
— — —	+ 2R	. . . .
— — —	+ 3R	. . . .
— — —	+ $\frac{3}{2}$ R	. . . .
— inverses 1° sur *b*. . .	— $\frac{1}{2}$ R	. . . .
— — 2° sur *a*. . .	— $\frac{r}{s}$ R	. . . .
— — —	— $\frac{1}{3}$ R	. . . .
— — —	— $\frac{1}{4}$ R	. . . .
— — —	— $\frac{2}{5}$ R	. . . .

Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.

MILLER.	LÉVY.	OBSERVATIONS.
. . . 111	. . . . a^1	
. . . 100	. . . . p	
. . . $11\bar{2}$	. . . . e^2	
. . . $10\bar{1}$	. . . . d^1	
$-q,\ 2q-r,\ \overline{q+r}$.	. . $b^{\frac{1}{q+r}}\ d^{\frac{1}{2q-r}}\ d^{\frac{1}{2r-q}}$	
. . . . $41\bar{5}$	. . . . $b^{\frac{1}{5}}\ d^1\ d^{\frac{1}{4}}$	
. . . . $52\bar{7}$	. . . . $b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	
. . . . $71\bar{8}$	. . . . $b^{\frac{1}{8}}\ d^1\ d^{\frac{1}{7}}$	
$s+2r,\ s-r,\ s-r$ . .	. . . . . $a^{\frac{s+2r}{s-r}}$	$s>r$
. . . . 411	. . . . a^4	
. . . . 522	. . . $a^{\frac{5}{2}}$	
. . . . . 711	. . . . a^7	
. . . . . 10 1.1	. . . . a^{10}	
$s+2r,\ \overline{r-s},\ \overline{r-s}$ . .	. . . . $e^{\frac{s+2r}{r-s}}$	$s<r$
. . . . . $5\bar{2}\bar{2}$	. . . . $e^{\frac{5}{2}}$	
. . . . . $7\bar{3}\bar{3}$	. . . . $e^{\frac{7}{3}}$	
. . . . . $8\bar{1}\bar{1}$	. . . . e^8	
. . . . 110	. . . . b^1	
$s+r,\ s+r,\ s-2r$ . .	. . . . $a^{\frac{s-2r}{s+r}}$	$s>2r$ ou $\frac{r}{s}<\frac{1}{2}$
. . . . . 441	. . . . $a^{\frac{4}{3}}$	
. . . . . 552	. . . . $a^{\frac{5}{3}}$	
. . . . . 771	. . . . $a^{\frac{7}{5}}$	

Système ternaire ou rhomboédrique. Tran

NOMS DES FORMES.	NAUMANN.	
RHOMBOÈDRES INVERSES. 3° sur *e*. . .	$-\frac{r}{s}$ R	. . .
— — —	$-\frac{3}{4}$ R	. . .
— — —	$-$ R	. . .
— — —	$-\frac{3}{2}$ R	. . .
— — —	$-$ 2R	. . .
ISOSCÉLOÈDRES.		
— 1° sur *a*. . .	$\frac{r}{s}$ P2	. . .
— —	$\frac{1}{2}$ P2	. . .
— —	$\frac{1}{3}$ P2	. . .
— —	$\frac{2}{5}$ P2	. . .
— 2° sur *b*. . .	$\frac{2}{3}$ P2	. . .
— 3° sur *e*. . .	$\frac{r}{s}$ P2	. . .
— —	P2	. . .
— —	2P2	. . .
— —	3P2	. . .
— —	$\frac{3}{4}$ P2	. . .
SCALÉNOÈDRES.		
— Directs 1° sur *b*. . .	$+\frac{r}{s}$ R $\frac{r}{p}$	. . *p*
— — —	$+\frac{3}{4}$ R $\frac{3}{2}$	. . .
— — —	$+\frac{4}{5}$ R $\frac{3}{4}$	. . .
— — —	$+\frac{5}{6}$ R $\frac{3}{4}$	. . .
— — 2° sur *d*. . .	$+\frac{r}{s}$ R $\frac{r}{p}$	. . *p*,
— — —	$+3$ R $\frac{3}{2}$	. . .
— — —	$+2$ R $\frac{4}{3}$	. . .
— — —	$+\frac{5}{3}$ R $\frac{3}{4}$	. . .

de Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.

MILLER.	LÉVY.	OBSERVATIONS.
$+r,\ s+r,\ \overline{2r-s}$ . .	. . . . . $e^{\frac{2r-s}{s+r}}$	$s<2r$ ou $\frac{r}{s}>\frac{1}{2}$
. . . $77\bar{2}$	. . . . . $e^{\frac{2}{7}}$	
. . . $22\bar{1}$	. . . . . $e^{\frac{1}{2}}$	
. . . $55\bar{4}$	. . . . . $e^{\frac{5}{4}}$	
. . . . $11\bar{1}$	. . . . . e^{1}	
$2s+3r,\ 2s,\ 2s-3r$ . .	. . $b^{\frac{1}{2s-3r}}\ b^{\frac{1}{2s}}\ b^{\frac{1}{2s+3r}}$ . .	$2s-3r>0$ ou $\frac{r}{s}<\frac{2}{3}$
. . . . 741	. . . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{7}}$	
. . . . 321	. . . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}$	
. . . . 852	. . . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{5}}\ b^{\frac{1}{8}}$	
. . . . 201	. . . . . b^{2}	
$2s+3r,\ 2s,\ \overline{3r-2s}$ . .	. . $b^{\frac{1}{3r-2s}}\ d^{\frac{1}{2s}}\ d^{\frac{1}{2s+3r}}$ . .	$2s-3r<0$ ou $\frac{r}{s}>\frac{2}{3}$
. . . . . $52\bar{1}$	. . . . $b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{5}}$	
. . . . . $41\bar{2}$	. . . . $b^{\frac{1}{2}}\ d^{1}\ d^{\frac{1}{4}}$	
. . . . . 11.2.$\bar{7}$	. . . . $b^{\frac{1}{7}}\ d^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{11}}$	
. . . . . 17.8.$\bar{1}$	. . . . $b^{1}\ d^{\frac{1}{8}}\ d^{\frac{1}{17}}$	
. . . $r,\ s-r,\ 0$	. . . . . $b^{\frac{r}{s-r}}$	$s+p-2r=0$
. . . . . 310	. . . . . b^{3}	
. . . . . 410	. . . . . b^{4}	
. . . . . 510	. . . . . b^{5}	
. . . . $p,\ 0,\ \overline{p-s}$	. . . . . $d^{\frac{p}{p-s}}$	$s+r-2p=0$
. . . . . $20\bar{1}$	. . . . . d^{2}	
. . . . . $30\bar{1}$	. . . . . d^{3}	
. . . . . $40\bar{1}$	. . . . . d^{4}	

NOMS DES FORMES.	NAUMANN.	
SCALÉNOÈDRES. Directs 3° sur *a*. .	$+\frac{r}{s}R\frac{r}{p}$	*p*,
— — —	$+\frac{3}{5}R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$+\frac{2}{3}R\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$+\frac{5}{8}R\frac{5}{3}$	. . . .
— — 4° sur *e*. . .	$+\frac{r}{s}R\frac{r}{p}$	*p*,
— — —	$+\frac{3}{2}R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$+R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$+\frac{4}{3}R\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$+\frac{r}{s}R\frac{r}{p}$	*p*, *r*
— — —	$+4R\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$+6R\frac{3}{2}$	. . . .
— Inverses 1° sur *b*. . .	$-\frac{r}{s}R\frac{r}{q}$	*r* —
— — —	$-\frac{3}{5}R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$-\frac{4}{7}R\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$-\frac{5}{8}R\frac{5}{3}$	. . . .
— — 2° sur *a*. . .	$-\frac{r}{s}R\frac{r}{q}$	*r* —
— — —	$-\frac{3}{2}R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$-\frac{4}{2}R\frac{4}{3}$	. . . .
— — —	$-\frac{5}{9}R\frac{5}{3}$	. . . .
— — 3° sur *e*. . .	$-\frac{r}{s}R\frac{r}{q}$	*r* —
— — —	$-3R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$-\frac{3}{2}R\frac{3}{2}$	. . . .
— — —	$-5R\frac{5}{3}$	. . . .
— — —	$-\frac{5}{2}R\frac{5}{3}$	. . . .

ou clinorhombique.

NAÜMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$-\frac{p}{r}\mathrm{P}\infty$	$a:\infty b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d$	
$-2\mathrm{P}\infty$	$a:\infty b:2c$	$2d$	
$-\mathrm{P}\infty$	$a:\infty b:c$	d	
$-\frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$	$a:\infty b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d$	
$+\frac{p}{r}\mathrm{P}\infty$	$a':\infty b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d'$	
$+2\mathrm{P}\infty$	$a':\infty b:2c$	$2d'$	
$+\mathrm{P}\infty$	$a':\infty b:c$	d'	
$+\frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$	$a':\infty b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d'$	
$-\frac{p}{r}\mathrm{P}$	$a:b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o$	
$-\frac{1}{2}\mathrm{P}$	$a:b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}o$	
$-\mathrm{P}$	$a:b:c$	o	
$-2\mathrm{P}$	$a:b:2c$	$2o$	
$+\frac{p}{r}\mathrm{P}$	$a':b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o'$	
$+\frac{1}{2}\mathrm{P}$	$a':b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}o'$	
$+\mathrm{P}$	$a':b:c$	o'	
$+2\mathrm{P}$	$a':b:2c$	$2o'$	
$-\frac{q}{r}\mathrm{P}\frac{q}{p}$	$a:\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$	.....	$p<q$
$-3\mathrm{P}\frac{3}{2}$	$a:\frac{2}{3}b:2c$		
$-3\mathrm{P}3$	$a:\frac{1}{3}b:c$		
$-2\mathrm{P}2$	$a:\frac{1}{2}b:c$		
$-\frac{3}{2}\mathrm{P}\frac{3}{2}$	$a:\frac{2}{3}b:c$		

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	NAUMANN.
BASE.	001	. . p . .	OP
PRISMES.			
— Protoprisme. . . .	110	. . m . .	∞ P
— Deutéroprisme. . .	100	. . h^1 . .	∞ P ∞
— Prismes octogones.	$pq0$	. $h^{\frac{p+q}{p-q}}$ . .	∞ P $\frac{p}{q}$
— —	320	. . . h^5 . . .	∞ P $\frac{3}{2}$
— —	310	. . . h^2 . . .	∞ P3
— —	210	. . . h^3 . . .	∞ P2
PYRAMIDES.			
— Protopyramides. . .	ppr	. . $b^{\frac{r}{2p}}$ . .	$\frac{p}{r}$ P
— —	111	. . . $b^{\frac{1}{2}}$ . . .	P
— —	112	. . . b^1 . . .	$\frac{1}{2}$ P
— —	221	. . . $b^{\frac{1}{4}}$ . . .	2P
— —	223	. . . $b^{\frac{3}{4}}$ . . .	$\frac{2}{3}$ P
— —	332	. . . $b^{\frac{1}{3}}$ . . .	$\frac{3}{2}$ P
— —	331	. . . $b^{\frac{1}{6}}$ . .	3P

ou clinorhombique.

NAÜMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$-\frac{p}{r}\,\mathrm{P}\,\infty$	$a : \infty b : \frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d$	
$-2\,\mathrm{P}\,\infty$	$a : \infty b : 2c$	$2d$	
$-\mathrm{P}\,\infty$	$a : \infty b : c$	d	
$-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\infty$	$a : \infty b : \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d$	
$+\frac{p}{r}\,\mathrm{P}\,\infty$	$a' : \infty b : \frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d'$	
$+2\,\mathrm{P}\,\infty$	$a' : \infty b : 2c$	$2d'$	
$+\mathrm{P}\,\infty$	$a' : \infty b : c$	d'	
$+\frac{1}{2}\,\mathrm{P}\,\infty$	$a' : \infty b : \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d'$	
$-\frac{p}{r}\,\mathrm{P}$	$a : b : \frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o$	
$-\frac{1}{2}\,\mathrm{P}$	$a : b : \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}o$	
$-\mathrm{P}$	$a : b : c$	o	
$-2\,\mathrm{P}$	$a : b : 2c$	$2o$	
$+\frac{p}{r}\,\mathrm{P}$	$a' : b : \frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o'$	
$+\frac{1}{2}\,\mathrm{P}$	$a' : b : \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}o'$	
$+\mathrm{P}$	$a' : b : c$	o'	
$+2\,\mathrm{P}$	$a' : b : 2c$	$2o'$	
$-\frac{q}{r}\,\mathrm{P}\,\frac{q}{p}$	$a : \frac{p}{q}b : \frac{p}{r}c$	.....	$p < q$
$-3\,\mathrm{P}\,\frac{3}{2}$	$a : \frac{2}{3}b : 2c$		
$-3\,\mathrm{P}\,3$	$a : \frac{1}{3}b : c$		
$-2\,\mathrm{P}\,2$	$a : \frac{1}{2}b : c$		
$-\frac{3}{2}\,\mathrm{P}\,\frac{3}{2}$	$a : \frac{2}{3}b : c$		

NOMS DES FORMES.	MILLER.	LÉVY.	NAUMA
PYRAMIDES. Deutéropyram.	$p0r$	. . . $a^{\frac{r}{p}}$ . . .	$\frac{p}{r}$ P ∞
— —	101	. . . a^{1} . . .	P ∞
— —	102	. . . a^{2} . . .	$\frac{1}{2}$ P ∞
— —	201	. . . $a^{\frac{1}{2}}$ . . .	2 P ∞
— —	203	. . . $a^{\frac{3}{2}}$ . . .	$\frac{2}{3}$ P ∞
DIOCTAÈDRES.	pqr	$b^{\frac{1}{p-q}}\ b^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{r}}$	$\frac{p}{r}$ P $\frac{p}{q}$
—	211	. . . a_3 . . .	2 P2
—	212	. . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$ . .	P2
—	213	. . . $a_{\frac{1}{2}}$ . .	$\frac{2}{3}$ P 2
—	311	. . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$ . .	3 P3
—	312	. . . a_2 . . .	$\frac{3}{2}$ P 3
—	313	. . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{3}}$ . .	P3
—	321	. . . a_5 . . .	3 P $\frac{3}{2}$
—	322	. . $b^{1}\ b^{\frac{1}{5}}\ h^{\frac{1}{2}}$ . .	$\frac{3}{2}$ P $\frac{3}{2}$

tique.

SYMBOLES			
lorsque l'ancien $b^{\frac{1}{2}}$ devient a^1 $\frac{h'}{a'} = \sqrt{2}\,\frac{h}{a}$		lorsque l'ancien a^1 devient $b^{\frac{1}{2}}$ $\frac{h'}{a'} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{h}{a}$	
. . . pp 2r	$b^{\frac{r}{2}}$	. . . . ppr	$b^{\frac{r}{2p}}$
. . . . 112	b^1	. . . . 111	$b^{\frac{1}{2}}$
. . . . 114	b^2	. . . . 112	b^1
. . . . 111	$b^{\frac{1}{2}}$	. . . . 221	$b^{\frac{1}{4}}$
. . . . 113	$b^{\frac{3}{2}}$	. . . . 223	$b^{\frac{3}{4}}$
p+q, p−q, 2r	$b^{\frac{1}{2q}}\ b^{\frac{1}{2p}}\ h^{\frac{1}{r}}$	p+q, p−q, r	$b^{\frac{1}{2q}}\ b^{\frac{1}{2p}}\ h^{\frac{1}{r}}$
. . . . 312	a_2	. . . . 311	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^1$
. . . . 314	$a_{\frac{1}{2}}$	. . . . 312	a_2
. . . . 316	$b^1\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{\frac{1}{3}}$	. . . . 313	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{3}}$
. . . . 211	a_2	. . . . 421	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$
. . . . 212	$b^1\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$	. . . . 211	a_3
. . . . 213	$a_{\frac{1}{3}}$	. . . . 423	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^{\frac{1}{3}}$
. . . . 512	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^1$	. . . . 511	$b^{\frac{1}{4}}\ b^{\frac{1}{12}}\ h^1$
. . . . 514	$a_{\frac{3}{2}}$	. . . . 512	$b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{6}}\ h^1$

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAUMANN.	MILLER la 1re caractéristique se rapporte à l'axe horizontal maximum.	LÉVY.
PINACOÏDES. — Base.	. . 001 . .	. . . p . .
— Brachypinacoïde . . .	. . 100 . .	. . . g^1 . .
— Macropinacoïde . . .	. . 010 . .	. . . h^1 . .
PRISMES.		
— Brachyprismes	. . $pq0$ . .	. . . $g^{\frac{p+q}{p-q}}$
— —	. . 310 . .	. . . g^2 .
— —	. . 210 . .	. . . g^3 .
— —	. . 320 . .	. . . g^5 .
— Protoprisme	. . 110 . .	. . . m . .
— Macroprismes	. . $pq0$ . .	. . . $h^{\frac{p+q}{q-p}}$
— —	. . 230 . .	. . . h^3 .
— —	. . 120 . .	. . . h^5 .
— —	. . 130 . .	. . . h^2 .
DÔMES.		
— Brachydomes.	. . $p0r$ . .	. . . $e^{\frac{r}{p}}$ . .
— —	. . 101 . .	. . . e^1 . .
— —	. . 102 . .	. . . e^2 . .
— —	. . 302 . .	. . . $e^{\frac{2}{3}}$ . .
— Macrodomes	. . $0qr$ . .	. . . $a^{\frac{r}{q}}$ . .
— —	. . 011 . .	. . . a^1 . .
— —	. . 012 . .	. . . a^2 . .
— —	. . 032 . .	. . . $a^{\frac{2}{3}}$.
PYRAMIDES OU OCTAÈDRES.		
— Protopyramides. . . .	. . ppr . .	. . . $b^{\frac{2}{2p}}$ . .
— —	. . 113 . .	. . . $b^{\frac{3}{2}}$.
— —	. . 112 . .	. . . b^1 .
	. . 223 . .	. . . $b^{\frac{3}{4}}$.

orhombique.

WEISS-ROSE a est l'axe horizontal minimum.		MILLER la 1re caractéristique se rapporte à l'axe horizontal minimum.	OBSERVATIONS.
$1 : \infty\, b : c$	c	001	
$2 : b : \infty\, c$	b	010	
$3 : \infty\, b : \infty\, c$	a	100	
$2 : \frac{q}{p} b : \infty\, c$	$\frac{q}{p} g$	$qp0$	$p > q$
$a : \frac{1}{3} b : \infty\, c$	$\frac{1}{3} g$	130	
$a : \frac{1}{2} b : \infty\, c$	$\frac{1}{2} g$	120	
$a : \frac{2}{3} b : \infty\, c$	$\frac{2}{3} g$	230	
$a : b : \infty\, c$	g	110	
$a : \frac{q}{p} b : \infty\, c$	$\frac{q}{p} g$	$qp0$	$p < q$
$a : \frac{3}{2} b : \infty\, c$	$\frac{3}{2} g$	320	
$a : 2\, b : \infty\, c$	$2\, g$	210	
$a : 3\, b : \infty\, c$	$3\, g$	310	
$\infty\, a : b : \frac{p}{r} c$	$\frac{p}{r} f$	$0pr$	
$\infty\, a : b : c$	f	011	
$\infty\, a : b : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} f$	201	
$\infty\, a : \; : \frac{3}{2} c$	$\frac{3}{2} f$	205	
$a : \infty\, b\, \frac{q}{r} c$	$\frac{q}{r} d$	$q0r$	
$a : \infty\, b : c$	d	101	
$a : \infty\, b : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} d$	102	
$a : \infty\, b : \frac{1}{2} c$	$\frac{3}{2} d$	302	
$a : b : \frac{p}{r} c$	$\frac{p}{r} o$	ppr	
$a : b : \frac{1}{3} c$	$\frac{1}{3} o$	113	
$a : b : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} o$	112	
$a : b : \frac{2}{3} c$	$\frac{2}{3} o$	223	

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAUMANN.	MILLER p se rapporte à l'axe horizontal maximum.	LÉVY.
PYRAMIDES OU OCTAÈDRES.		
— Protopyramides . . .	. . . 111 . . .	. . . . $b^{\frac{1}{2}}$ . .
— —	. . . 332 . . .	. . . . $b^{\frac{1}{3}}$ . .
— —	. . . 221 . . .	. . . . $b^{\frac{1}{4}}$ . .
— Brachypyramides. . .	. . . pqr . . .	$b^{\frac{1}{p+q}}\ b^{\frac{1}{p-q}}\ g$
— —	. . . 321 . . .	. . . . $e_{\frac{3}{2}}$ . .
— —	. . . 311 . . .	. . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ g^{1}$.
— —	. . . 211 . . .	. . . . e_{3} . .
— —	. . . 322 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ g^{\frac{1}{2}}$.
— —	. . . 312 . . .	. . . . e_{2} . .
— —	. . . 212 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ g^{\frac{1}{2}}$.
— —	. . . 323 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ g^{\frac{1}{3}}$.
— —	. . . 313 . . .	. . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ g^{\frac{1}{3}}$.
— —	. . . 213 . . .	. . . . $e_{\frac{1}{3}}$ . .
— Macropyramides . . .	. . . pqr . . .	$b^{\frac{1}{q-p}}\ b^{\frac{1}{p+q}}\ h$
— —	. . . 231 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{1}$.
— —	. . . 131 . . .	. . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$.
— —	. . . 121 . . .	. . . . a_{3} . .
— —	. . . 232 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$.
— —	. . . 132 . . .	. . . . a_{2} . .
— —	. . . 122 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{2}}$.
— —	. . . 233 . . .	. . . $b^{1}\ b^{\frac{1}{3}}\ h^{\frac{1}{3}}$.
— —	. . . 133 . . .	. . . $b^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{\frac{1}{3}}$.
— —	. . . 123 . . .	. . . . $a_{\frac{1}{3}}$ . .

NOTA. — La forme $b^{\frac{n}{l}}$ de Lévy est notée par Miller (l'axe des x étant l'axe m
$\{\ ll\,2n\ \}$.

La forme $b^{\frac{1}{l}}\ b^{\frac{1}{m}}\ g^{\frac{1}{n}}$ de Lévy est notée par Miller (l'axe des x étant
$\{\ m+l,\quad m-l.\quad 2n\ \}$.

ombique.

WEISS-ROSE a est l'axe horizontal minimum.		MILLER p se rapporte à l'axe horizontal minimum.	OBSERVATIONS.
$: b : c$	o	111	
$: b : \frac{3}{2}c$	$\frac{3}{2}o$	332	
$: b : 2c$	$2o$	221	
$: \frac{q}{p}b : \frac{q}{r}c$		qpr	$p > q$
$: \frac{2}{3}b : 2c$		231	
$: \frac{1}{3}b : c$		131	
$: \frac{1}{2}b : c$		121	
$: \frac{2}{3}b : c$		232	
$: \frac{1}{3}b : \frac{1}{2}c$		132	
$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{2}c$		122	
$a : \frac{2}{3}b : \frac{2}{3}c$		233	
$a : \frac{1}{3}b : \frac{1}{3}c$		133	
$a : \frac{1}{2}b : \frac{1}{3}c$		123	
$a : \frac{q}{p}b : \frac{q}{r}c$		qpr	$p < q$
$.a : \frac{3}{2}b : 3c$		321	
$.a : 3b : 3c$		311	
$.a : 2b : 2c$		211	
$..a : \frac{3}{2}b : \frac{3}{2}c$		322	
$..a : 3b : \frac{3}{2}c$		312	
$..a : 2b : c$		212	
$..a : \frac{3}{2}b : c$		322	
$..a : 3b : c$		313	
$.a : 2b : \frac{2}{3}c$		213	

La forme $b^{\frac{1}{l}}\ b^{\frac{1}{m}}\ h^{\frac{1}{n}}$ de Lévy est notée par Miller (l'axe des x étant l'axe maximum) :

$$\{ m-l,\ m+l,\ 2n \}.$$

Sy

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAUMANN.	MILLER.	
PINACOÏDES. — Base	001	
— Clinopinacoïde	010	
— Orthopinacoïde	100	
PRISMES.		
— Clinoprismes	*pq*0	
— —	230	
— —	130	
— —	120	
— Protoprisme	110	
— Orthoprismes	*pq*0	
— —	320	
— —	310	
— —	210	
HÉMIDOMES.		
— Hémiclinodomes	0*qr*	
— —	021	
— —	011	
— —	012	

linorhombique.

NAUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
0 P . . .	. . $\infty a : \infty b : c$	c	
∞ P ∞ . .	. . $\infty a : b : \infty c$	b	
∞ P ∞ . .	. . . $a : \infty b : \infty c$ . . .	a	
∞ P $\frac{q}{p}$ . .	. . . $a : \frac{p}{q} b : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q} g$	$p < q$
∞ P $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a : \frac{2}{3} b : \infty c$ . . .	$\frac{2}{3} g$	
∞ P 3 . . .	. . . $a : \frac{1}{3} b : \infty c$ . . .	$\frac{1}{3} g$	
∞ P 2 . . .	. . . $a : \frac{1}{2} b : \infty c$ . . .	$\frac{1}{2} g$	
∞ P . . .	. . . $a : b : \infty c$ . . .	g	
∞ P $\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a : \frac{p}{q} b : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q} g$	$p > q$
∞ P $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a : \frac{3}{2} b : \infty c$ . . .	$\frac{3}{2} g$	
∞ P 3 . . .	. . . $a : 3b : \infty c$ . . .	$3g$	
∞ P 2 . . .	. . . $a : 2b : \infty c$ . . .	$2g$	
$\frac{q}{r}$ P ∞ . .	. . . $\infty a : b : \frac{q}{r} c$ . . .	$\frac{q}{r} f$	
2 P ∞ . .	. . . $\infty a : b : 2c$ . . .	$2f$	
P ∞ . .	. . . $\infty a : b : c$ . . .	f	
$\frac{1}{2}$ P ∞ . .	. . . $\infty a : b : \frac{1}{2} c$ . . .	$\frac{1}{2} f$	

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAÜMANN.	MILLER.	
HÉMIDOMES. Hémiorthodomes antér.	. . $p0r$ . .	. . . .
— — —	. . 201 . .	. . . .
— — —	. . 101 . .	. . . .
— — —	. . 102 . .	. . . .
— — postérieurs.	. . $\bar{p}0r$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{2}01$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{1}01$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{1}02$ . .	. . . .
HÉMIPYRAMIDES.		
— Protohémipyram. antérieures.	. . ppr . .	. . . .
— — —	. . 112 . .	. . . .
— — —	. . 111 . .	. . . .
— — —	. . 221 . .	. . . .
— — postérieures.	. . $\bar{p}pr$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{1}12$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{1}11$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{2}21$ . .	. . . .
— Hémiclinopyram. antérieures.	. . pqr . .	. . $d^{\frac{1}{q-p}}$
— — —	. . 231 . .	. . . . d
— — —	. . 131 . .	. . . . d
— — —	. . 121 . .	. . . . d
— — —	. . 232 . .	. . . . d

orhombique.

MANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$-\frac{p}{r}\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a:\infty b:\frac{p}{r}c$ . . .	$\frac{p}{r}d$	
$-2\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a:\infty b:2c$ . . .	$2d$	
$-\mathrm{P}\infty$ . .	$a:\infty b:c$	d	
$-\frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a:\infty b:\frac{1}{2}c$ . . .	$\frac{1}{2}d$	
$+\frac{p}{r}\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a':\infty b:\frac{p}{r}c$ . . .	$\frac{p}{r}d'$	
$+2\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a':\infty b:2c$ . . .	$2d'$	
$+\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a':\infty b:c$ . . .	d'	
$+\frac{1}{2}\mathrm{P}\infty$ . .	. . . $a':\infty b:\frac{1}{2}c$ . . .	$\frac{1}{2}d'$	
$-\frac{p}{r}\mathrm{P}$ . . .	. . . $a:b:\frac{p}{r}c$ . . .	$\frac{p}{r}o$	
$-\frac{1}{2}\mathrm{P}$ . . .	. . . $a:b:\frac{1}{2}c$ . . .	$\frac{1}{2}o$	
$-\mathrm{P}$ . . .	. . . $a:b:c$ . . .	o	
$-2\mathrm{P}$ . . .	. . . $a:b:2c$ . . .	$2o$	
$+\frac{p}{r}\mathrm{P}$ . . .	. . . $a':b:\frac{p}{r}c$ . . .	$\frac{p}{r}o'$	
$+\frac{1}{2}\mathrm{P}$ . . .	. . . $a':b:\frac{1}{2}c$ . . .	$\frac{1}{2}o'$	
$+\mathrm{P}$ . . .	. . . $a':b:c$ . . .	o'	
$+2\mathrm{P}$ . . .	. . . $a':b:2c$ . . .	$2o'$	
$-\frac{q}{r}\mathrm{P}\frac{q}{p}$ . . .	. . . $a:\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$ . . .	. . . . .	$p<q$
$-5\mathrm{P}\frac{5}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{2}{5}b:2c$ . . .		
$-5\mathrm{P}5$ . . .	. . . $a:\frac{1}{5}b:c$ . . .		
$-2\mathrm{P}2$ . . .	. . . $a:\frac{1}{2}b:c$ . . .		
$-\frac{5}{2}\mathrm{P}\frac{5}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{2}{5}b:c$ . . .		

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAÜMANN.	MILLER.	
HÉMIPYRAMIDES. Hémiclinopyr. antér.	. . 132 . .	. . . .
— — —	. . 122 . .	. . . .
— — —	. . 233 . .	. . . .
— — —	. . 133 . .	. . . .
— — —	. . 123 . .	. . . .
— — postérieures.	. . $\bar{p}qr$ . .	. . $b^{\frac{q}{}}$
— — —	. . $\bar{2}31$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{1}31$ (etc.)	. . . .
— Hémiorthopyram. antérieures.	. . pqr . .	. . $d^{\frac{p}{}}$
— — —	. . 321 . .	. . . .
— — —	. . 311 . .	. . . .
— — —	. . 211 . .	. . . .
— — —	. . 322 . .	. . . .
— — —	. . 312 . .	. . . .
— — —	. . 212 . .	. . . .
— — —	. . 323 . .	. . . .
— — —	. . 313 . .	. . . .
— — —	. . 213 . .	. . . .
— — postérieures.	. . $\bar{p}qr$ . .	. . $b^{\frac{p}{}}$
— — —	. . $\bar{3}21$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{3}11$ . .	. . . .
— — —	. . $\bar{2}11$ . .	. . . .

rhombique

MANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$-\frac{3}{2}$ ℞ 3 . . .	. . . $a:\frac{1}{3}b:\frac{1}{2}c$		
— ℞ 2 . . .	. . . $a:\frac{1}{2}b:\frac{1}{2}c$		
— ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{2}{3}b:\frac{2}{3}c$		
— ℞ 3 . . .	. . . $a:\frac{1}{3}b:\frac{1}{3}c$		
$-\frac{2}{3}$ ℞ 2 . . .	. . . $a:\frac{1}{2}b:\frac{1}{3}c$		
$+\frac{q}{r}$ ℞ $\frac{q}{p}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$ . . .	. . . . .	$p<q$
+ ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a':\frac{2}{3}b:2c$		
+ 3 ℞ 3 . . .	. . . $a':\frac{1}{3}b:c$		
$+\frac{p}{r}$ ℞ $\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a:\frac{p}{q}b:\frac{q}{r}c$ . . .	. . . . .	$p>q$
. — 3 ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{3}{2}b:3c$		
. — 3 ℞ 3 . . .	. . . $a:3b:3c$		
. — 2 ℞ 2 . . .	. . . $a:2b:2c$		
. $-\frac{3}{2}$ ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{3}{2}b:\frac{3}{2}c$		
. $-\frac{3}{2}$ ℞ 3 . . .	. . . $a:3b:\frac{3}{2}c$		
. . — ℞ 2 . . .	. . . $a:2b:c$		
. . — ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a:\frac{3}{2}b:c$		
. . — ℞ 3 . . .	. . . $a:3b:c$		
. . $-\frac{2}{3}$ ℞ 2 . . .	. . . $a:2b:\frac{2}{3}c$		
. . $+\frac{p}{r}$ ℞ $\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$ . . .	. . . . .	$p>q$
. . + 3 ℞ $\frac{3}{2}$ . . .	. . . $a':\frac{3}{2}b:3c$		
. . + 3 ℞ 3 . . .	. . . $a':3b:3c$		
. . + 2 ℞ 2 . . .	. . . $a':2b:2c$		

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAÜMANN.	MILLER.	
PINACOÏDES. — Base	001	. . . .
— Brachypinacoïde	010	. . . .
— Macropinacoïde.	100	. . . .
HÉMIPRISMES.		
— Protoprisme droit.	110	. . . .
— — gauche	$\bar{1}10$	. . . .
— H. brachyprismes droits . . .	$pq0$	. . . .
— — —	120	. . . .
— — gauches . .	$\bar{p}q0$	. . . =
— — —	$\bar{1}20$	. . . .
— H. macroprismes droits. . . .	$pq0$	. . . .
— — —	210	. . . .
— — gauches. . .	$\bar{p}q0$	. . . .
— — —	$\bar{2}10$	. . . .
HÉMIDOMES,		
— H. brachydomes sup. droits .	$0qr$	. . . .
— — —	012	. . . .
— — sup. gauches.	$0q\bar{r}$	. . . .
— — —	$01\bar{2}$	. . . .

linique.

ÜMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
0 P	. . $\infty a : \infty b : c$	c	
$\infty \breve{P} \infty$ . . .	. $\infty a : b : \infty c$	b	
$\infty \bar{P} \infty$ . . .	. . . $a : \infty : b \infty c$ . . .	c	
$\infty P'$	. . . $a : b : \infty c$	g	
$\infty {}'P$	. . . $a : b' : \infty c$	$'g$	
$\infty \breve{P}', \frac{q}{p}$ . . .	. . . $a : \frac{p}{q} b : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q} g$	$p < q$
$\infty \breve{P}', 2$ . . .	. . . $a : \frac{1}{2} b : \infty c$	$\frac{1}{2} g$	
. $\infty, \breve{P} \frac{q}{p}$ . . .	. . . $a : \frac{p}{q} b' : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q}, g$	
. $\infty, \breve{P} 2$ . . .	. . . $a : \frac{1}{2} b' : \infty c$	$\frac{1}{2}' g$	
. $\infty \bar{P}', \frac{p}{q}$ . .	. . . $a : \frac{p}{q} b : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q} g$	$p > q$
. $\infty \bar{P}', 2$ . . .	. . . $a : 2b : \infty c$	$2g$	
. $\infty, \bar{P} \frac{p}{q}$ . . .	. . . $a : \frac{p}{q} b' : \infty c$ . . .	$\frac{p}{q}, g$	
. . $\infty, \bar{P} 2$ . . .	. . . $a : 2b' : \infty c$	$2' g$	
. . $\frac{q}{r}, \breve{P}' \infty$ . .	. . . $\infty a : b : \frac{q}{r} c$ . . .	$\frac{q}{r} f$	
. . $\frac{1}{2}, \breve{P}' \infty$ . . .	. . . $\infty a : b : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2} f$	
. . . $\frac{q}{r}, \breve{P}, \infty$ . .	. . . $\infty a : b' : \frac{q}{r} c$ . . .	$\frac{q}{r}, f$	
. . . $\frac{1}{2}, \breve{P}, \infty$ . . .	. . . $\infty a : b' : \frac{1}{2} c$	$\frac{1}{2}' f$	

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAÜMANN.	MILLER.	
HÉMIDOMES. H. macrodomes antér. .	$p0r$	. . . . .
— — —	102	. . . . .
— — postérieurs .	$\bar{p}0r$	. . . . .
— — —	$\bar{1}02$	. . . . .
QUARTOPYRAMIDES.		
— Proto-quartopyr. sup. droites.	ppr	. . . . .
— — —	111	. . . . .
— — —	223	. . . . .
— — sup. gauches.	$\bar{p}pr$	. . . . .
— — —	$\bar{1}11$	. . . . .
— — —	$\bar{2}23$	. . . . .
— — inf. droites.	$pp\bar{r}$	. . . . .
— — —	$11\bar{1}$	. . . . .
— — —	$22\bar{3}$	. . . . .
— — inf. gauches.	$\bar{p}p\bar{r}$	. . . . .
— — —	$\bar{1}1\bar{1}$	. . . . .
— — —	$\bar{2}2\bar{3}$	. . . . .
— Quarto-brachypyr sup. droites	pqr	. . $f^{\frac{1}{q-p}}$
— — —	131 *	. . . . . f
— — —	132	. . . . f

on triclinique.

NAUMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$\frac{p}{r}\,'\bar{P}'\infty$	$a:\infty b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d$	
$\frac{1}{2}\,'\bar{P}'\infty$	$a:\infty b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d$	
$\frac{p}{r}\,,\bar{P},\infty$	$a':\infty b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}d'$	
$\frac{1}{2}\,,\bar{P},\infty$	$a':\infty b:\frac{1}{2}c$	$\frac{1}{2}d'$	
$\frac{p}{r}\,P'$	$a:b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o$	
P'	$a:b:c$	o	
$\frac{2}{3}\,P'$	$a:b:\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{3}o$	
$\frac{p}{r}\,'P$	$a':b:\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}o'$	
$\frac{2}{3}\,'P$	$a':b:c$	o'	
$\frac{2}{3}\,'P$	$a':b:\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{3}o'$	
$\frac{p}{r}\,P,$	$a':b':\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}\,'o'$	
$P,$	$a':b':c$	$'o'$	
$\frac{2}{3}\,P,$	$a':b':\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{3}\,'o'$	
$\frac{p}{r}\,,P$	$a:b':\frac{p}{r}c$	$\frac{p}{r}\,'o$	
$,P$	$a:b':c$	$'o$	
$\frac{2}{3}\,,P$	$a:b':\frac{2}{3}c$	$\frac{2}{3}\,'o$	
$\frac{q}{r}\,\breve{P}\,\frac{q}{p}$	$a:\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$	.....	$p<q$
$3\,\breve{P}'3$	$a:\frac{1}{3}b:c$		
$\frac{3}{2}\,\breve{P}'3$	$a:\frac{1}{3}b:\frac{1}{2}c$		

Système asymétri

NOMS DONNÉS AUX FORMES PAR NAÜMANN.	MILLER.	LÉVY.
QUARTOPYRAMIDES. Quarto-brach. sup. g.	$\bar{p}q\bar{r}$	$d^{\frac{1}{q-p}}\ b^{\frac{1}{p+q}}\ g^{\frac{1}{}}$
— — —	$\bar{1}3\bar{1}$	$d^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ g^{1}$
— — —	$\bar{1}3\bar{2}$	$d^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ g^{1}$
— — inf. droites.	$pq\bar{r}$	$b^{\frac{1}{q-p}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ g^{\frac{1}{}}$
— — —	$13\bar{1}$	$b^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{4}}\ g^{\frac{1}{2}}$
— — —	$13\bar{2}$	$b^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ g^{1}$
— — inf. gauches.	$\bar{p}qr$	$c^{\frac{1}{q-p}}\ f^{\frac{1}{p+q}}\ g^{\frac{1}{}}$
— — —	$\bar{1}31$	$c^{\frac{1}{2}}\ f^{\frac{1}{4}}\ g^{1}$
— — —	$\bar{1}32$	$c^{1}\ f^{\frac{1}{2}}\ g^{1}$
— Quarto-macropyr. sup. droites	pqr	$f^{\frac{1}{q-p}}\ d^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{}}$
— — —	311	$f^{\frac{1}{2}}\ d^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$
— — —	312	$f^{1}\ d^{\frac{1}{2}}\ h^{1}$
— — sup. gauches.	$\bar{p}q\bar{r}$	$d^{\frac{1}{p-q}}\ f^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{}}$
— — —	$\bar{3}1\bar{1}$	$d^{\frac{1}{2}}\ f^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$
— — —	$\bar{3}1\bar{2}$	$d^{1}\ f^{\frac{1}{2}}\ h^{1}$
— — inf. droites.	$pq\bar{r}$	$b^{\frac{1}{p-q}}\ c^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{}}$
— — —	$31\bar{1}$	$b^{\frac{1}{2}}\ c^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$
— — —	$31\bar{2}$	$b^{1}\ c^{\frac{1}{2}}\ h^{1}$
— — inf. gauches.	$\bar{p}qr$	$c^{\frac{1}{p-q}}\ b^{\frac{1}{p+q}}\ h^{\frac{1}{}}$
— — —	$\bar{3}11$	$c^{\frac{1}{2}}\ b^{\frac{1}{4}}\ h^{1}$
— — —	$\bar{3}12$	$c^{1}\ b^{\frac{1}{2}}\ h^{1}$

iclinique.

AÜMANN.	WEISS-ROSE.		OBSERVATIONS.
$\frac{q}{r}\breve{P}'\frac{q}{p}$ . . .	. . . $a:\frac{p}{q}b':\frac{p}{r}c$		
$3'\breve{P}3$ . . .	. . . . $a:\frac{1}{3}b':c$		
$\frac{3}{2}'\breve{P}3$ . . .	. . . . $a:\frac{1}{3}b':\frac{1}{2}c$		
$\frac{q}{r}\breve{P},\frac{q}{p}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b':\frac{p}{r}c$		
$3\breve{P},3$ . . .	. . . . $a':\frac{1}{3}b':c$		
$\frac{3}{2}\breve{P},3$ . . .	. . . . $a':\frac{1}{3}b':\frac{1}{2}c$		
$\frac{q}{r},\breve{P}\frac{q}{p}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$		
$3,\breve{P}3$ . . .	. . . . $a':\frac{1}{3}b:c$		
$\frac{3}{2},\breve{P}3$ . . .	. . . . $a':\frac{1}{3}b:\frac{1}{2}c$		
$\frac{p}{r}\bar{P}'\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a:\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$ . . .	. . . . .	$p>q$
$3\bar{P}'3$ . . .	. . . . $a:3b:3c$		
$\frac{3}{2}\bar{P}'3$ . . .	. . . . $a:3b:\frac{3}{2}c$		
$\frac{p}{r}'\bar{P}\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a:\frac{p}{q}b':\frac{p}{r}c$		
$3'\bar{P}3$ . . .	. . . . $a:3b':3c$		
$\frac{3}{2}'\bar{P}3$ . . .	. . . . $a:3b':\frac{3}{2}c$		
$\frac{p}{r}\bar{P},\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b':\frac{p}{r}c$		
$3\bar{P},3$ . . .	. . . . $a':3b':3c$		
$\frac{3}{2}\bar{P},3$ . . .	. . . . $a':3b':\frac{3}{2}c$		
$\frac{p}{r},\bar{P}\frac{p}{q}$ . . .	. . . $a':\frac{p}{q}b:\frac{p}{r}c$		
$3,\bar{P}3$ . . .	. . . . $a':3b:3c$		
$\frac{3}{2},\bar{P}3$ . . .	. . . . $a':3b:\frac{2}{3}c$		

EXPLICATION DES PLANCHES

Les six premières planches montrent les projections gnomoniques des réseaux polaires des divers systèmes cristallisés, à l'exception du système cubique. La projection des pôles de ce système peut être considérée comme donnée par la planche I qui se rapporte au système quadratique, en prenant pour distance des points de vue au plan de projection, le côté du carré qui sert de maille à cette projection.

Les projections gnomoniques des systèmes quadratique, hexagonal et ternaire peuvent servir à tous les cristaux appartenant à ces systèmes en déterminant pour chacun d'eux, comme il convient, la distance du point de vue au plan de projection.

Les planches portent en chiffres pleins noirs les symboles de Miller, en lettres déliées noires les symboles de Naumann, en lettres rouges les symboles de Lévy. Les lignes noires sont les traces des zones parallèles aux axes coordonnés de Miller ; les lignes noires pointillées sont les zones qui passent par l'axe coordonné situé en dehors du plan de projection ; les lignes rouges sont des zones remarquables soit parce qu'elles sont parallèles aux axes de Lévy, soit pour toute autre cause. Les symboles écrits dans la bordure du cadre sont ceux des pôles situés à l'infini sur la direction marquée par la ligne noire pointillée qui leur correspond.

Sauf celle qui se rapporte au système asymétrique, toutes ces figures peuvent représenter les projections du *réseau primitif*. Pour le système cubique les projections du réseau primitif et du réseau polaire sont identiques. Pour les systèmes quadratique, hexagonal et ternaire, il suffit, pour passer de l'une à l'autre, de prendre pour distance du point de vue au plan de projetion le paramètre de l'axe principal non plus du réseau polaire, mais du réseau primitif. Pour le système terbinaire, l'axe des X du réseau polaire a pour paramètre $\frac{1}{a}$, l'axe des Y $\frac{1}{b}$, et l'axe des Z $\frac{1}{c}$. Pour transformer la projection du réseau polaire en projection du réseau primitif, il suffit donc de prendre pour axe des x l'axe des X, pour axe des y l'axe Y, et pour distance du point de vue au plan de projection la longueur $\frac{c}{ab}$. Enfin pour le système binaire, dans la projection du réseau polaire, l'axe des X est $\frac{1}{a}$, l'axe des Y est $\frac{1}{b}$, l'axe des Z est $\frac{1}{c}$ sin αx: on transformera donc la projection du réseau polaire en projection

du réseau primitif en prenant l'axe des X pour axe des z, l'axe des Z des x, et pour distance du point de vue au plan de projection la lo

Les projections des réseaux primitifs sont utiles dans la discussion d problèmes cristallographiques. Les pôles y représentent les dire arêtes, et les plans de zone les faces du cristal. C'est ce que les min allemands désignent sous le nom de projections linéaires.

Les planches VII, VIII et IX représentent les projections stéréograp pôles des divers systèmes cristallins.

TABLE DES MATIÈRES

DU PREMIER VOLUME

PRÉFACE . . . . . .

PREMIÈRE PARTIE.

CRISTALLOGRAPHIE GÉOMÉTRIQUE

CHAP. I. — DE LA STRUCTURE DES CORPS CRISTALLISÉS 3
Exposé succinct de la théorie d'Haüy. 3
Théorie rationnelle de la structure des corps cristallisés homogènes . . . 6
CHAP. II. — PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES SYSTÈMES RÉTICULAIRES 12
Définitions. 12
Mailles planes. — Mailles parallélipipédiques. 12
Rangées conjuguées et paramètre d'un système de rangées. 14
Plans réticulaires.— Caractéristiques d'un système de plans réticulaires. — Plans réticulaires conjugués d'une rangée. 16
Longueurs numériques interceptées sur les axes coordonnés par un plan réticulaire 17
Zones. — Axes de zone. — Conditions pour qu'un plan réticulaire fasse partie d'une zone 18
Changement d'axes coordonnés. 20
Aire élémentaire d'un plan réticulaire. 22
Angle de deux rangées. 24
Réseaux polaires 26
Angle de deux plans réticulaires 28
Angles formés avec les plans coordonnés du réseau polaire, par les plans qui passent par une rangée de ce réseau et par les axes coordonnés . . 30
Angles d'une rangée du réseau polaire avec les axes du réseau primitif. . 31
Relations qui lient quatre pôles situés sur la même zone. 32
Symboles à quatre caractéristiques. 34
CHAP. III. — THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LA SYMÉTRIE DES POLYÈDRES ET DES RÉSEAUX . . 37
Définition des axes de symétrie et de leurs ordres. — De la symétrie des polyèdres. 39
De la symétrie propre aux réseaux 45
CHAP. IV. — CLASSIFICATION DES ÉDIFICES MOLÉCULAIRES SUIVANT LE GENRE DE SYMÉTRIE QU'ILS POSSÈDENT 47
Classification des réseaux d'après leur mode de symétrie 47
De l'holoédrie et de la mériédrie. 54
Classification des polyèdres cristallins. — Système cristallin. 56
Notation symbolique 59

CHAP. V. — SYSTÈMES DE REPRÉSENTATIONS GRAPHIQUES 61
Perspective des cristaux 61
Représentation des faces du cristal par les positions de leurs pôles sur une sphère de projection 62
Projection stéréographique des pôles 62
Projection gnomonique des pôles 63
CHAP. VI. — SYSTÈME CUBIQUE OU TERQUATERNAIRE 67
Des modes possibles du réseau 67
Système d'axes coordonnés 70
Angles des arêtes et des faces 70
Formes simples holoédriques 70
Formes composées 79
Système de notation de Lévy 84
Formes mériédriques 86
— hémiédrie holoaxe 88
— parahémiédrie 88
— antihémiédrie 91
— tétartoédrie 94
CHAP. VII. — SYSTÈME SÉNAIRE OU HEXAGONAL 97
Modes possibles du réseau 97
Systèmes d'axes coordonnés 98
Calculs des angles, des arêtes et des faces 99
Formes holoédriques 99
— composées et symboles de Lévy 103
— mériédriques 106
— — A. L'axe sénaire est conservé 107
— — B. L'axe sénaire devient ternaire 109
CHAP. VIII. — SYSTÈME TERNAIRE OU RHOMBOÉDRIQUE 115
Disposition du réseau 113
Systèmes d'axes coordonnés 113
Calculs des angles des arêtes et des faces 117
Formes holoédriques 118
Formes directes et inverses. — Formes birhomboédriques 124
Projection gnomonique des pôles 125
Formes composées et symboles de Lévy 129
Tableau montrant la position des faces des diverses formes simples sur le rhomboèdre primitif ainsi que celle des pôles correspondants sur la projection gnomonique 138
Formes mériédriques 140
— hémiédrie holoaxe 140
— parahémiédrie 143
— antihémiédrie 145
CHAP. IX. SYSTÈME QUATERNAIRE OU QUADRATIQUE 147
Modes du réseau 147
Systèmes d'axes coordonnés 148
Calcul des angles des arêtes et des faces 149
Formes simples 150
Formes composées et symboles de Lévy 153
Formes mériédriques 157
— hémiédrie holoaxe 158
— parahémiédrie 159
— antihémiédrie 160

CHAP. X. — SYSTÈME TERBINAIRE OU ORTHORHOMBIQUE 163
Modes possibles du réseau 163
Systèmes d'axes coordonnés 165
Calculs des angles des arêtes et des faces 166
Formes simples 167
Formes composées 190
Symboles de Lévy 175
Formes mériédriques 176
— hémiédrie holoaxe 177
— antihémiédrie 179
CHAP. XI. — SYSTÈME BINAIRE OU CLINORHOMBIQUE 181
Modes possibles du réseau 181
Systèmes d'axes coordonnés 183
Calculs des angles des arêtes et des faces 184
Formes simples 185
Formes composées 185
Symboles de Lévy 192
Tableau montrant la position des diverses formes simples sur la forme primitive ainsi que celle des pôles sur la projection gnomonique 193
Formes hémiédriques 195
CHAP. XII. — SYSTÈME ASYMÉTRIQUE OU TRICLINIQUE 197
Système d'axes coordonnés 197
Calculs des angles des arêtes et des faces 198
Formes simples holoédriques et hémiédriques 198
Formes composées et symboles de Lévy 200
Tableau montrant la position des diverses formes simples sur la forme primitive et celle des pôles sur la projection gnomonique 202
CHAP. XIII. — DES DIVERS MODES DE NOTATIONS SYMBOLIQUES 205
Symboles de Weiss-Rose, etc. 206
Symboles de Naumann 210
CHAP. XIV. — MESURE DES ANGLES DES CRISTAUX 216
Goniomètre d'application 216
Goniomètre à réflexion. — Goniomètre à axe vertical 217
Discussion des erreurs à craindre dans l'emploi du goniomètre à réflexion 221
Goniomètre à lunettes 227
Goniomètre à axe horizontal 229
Mesure des angles diédres des cristaux microscopiques 230
CHAP. XV. — CALCULS CRISTALLOGRAPHIQUES 234
Étude préalable du cristal. — Détermination du mode de symétrie 234
Mesures goniométriques 235
Solution générale du problème cristallographique 236
Calculs inverses donnant les angles des pôles dont les symboles sont connus 241
Discussion de la forme primitive obtenue 245
Système asymétrique 246
Données : $p, g^1, h^1 f^{\frac{1}{2}}$ 247
p, g^1, h^1, t, a^1 248
m, t, p, i^1 250
Exemples : 1° Bichromate de potasse 252
2° Péricline 258

Système binaire . . . . . .
Cas particuliers remarquables . . . . . .
Cas particuliers qui se rencontrent le plus habituellement dans la pra
1° Le pôle d'aucune forme ne se trouve dans le plan de symétrie
2° Le pôle d'une forme se trouve dans le plan de symétrie . . .
3° Les pôles de deux formes se trouvent dans le plan de symétrie
4° Les pôles de trois formes se trouvent dans le plan de symérti
Exemple : Euclase. . . . . .
Système terbinaire . . . . . .
Cas particuliers. . . . . .
Cas particuliers les plus habituels . . . . . .
1° Pas de pôles dans les plans de symétrie . . . . . .
2° Pôle d'une forme dans un plan de symétrie. . . . . .
3° Pôles de deux formes dans des plans de symétrie . . . . . .
Exemple : Hypersthène du Mont-Dore . . . . . .
Système quadratique . . . . . .
Système hexagonal. . . . . .
Système rhomboédrique. . . . . .
Système cubique . . . . . .
Détermination de la forme primitive lorsqu'on en connaît une valeu prochée.. . . . . .
Chap. XVI. — De l'importance physique relative des diverses formes simples.
Importance physique des diverses formes cristallines. . . . . .
Loi de la simplicité des symboles. . . . . .
Loi de Bravais établissant un rapport entre l'aire élémentaire et l'in tance physique d'une face . . . . . .
Démonstration théorique de la loi de Bravais . . . . . .
Théorèmes sur les aires élémentaires des réseaux dont les parallélipi sont centrés ou à faces centrées . . . . . .
Système cubique . . . . . .
— *hexagonal* . . . . . .
— *ternaire* . . . . . .
— *quaternaire* . . . . . .
— *terbinaire* . . . . . .
— *binaire* . . . . . .
— *asymétrique* . . . . . .
Tableaux montrant pour chaque système cristallin la concordance des divi notations symboliques. . . . . .
Tableau I. — Système cubique. . . . . .
— II. — Système hexagonal. . . . . .
— III. — Système ternaire ou rhomboédrique. — Transformation des boles de Miller et de Lévy en symboles de Naumann, Bravais, etc.
— III bis. — Système ternaire ou rhomboédrique. — Transformation symboles de Naumann et Bravais en symboles de Miller et Lévy.
— IV. — Système quadratique. . . . . .
— V. — Système terbinaire ou orthorhombique. . . . . .
— VI. — Système binaire ou clinorhombique. . . . . .
— VII. — Système asymétrique ou triclinique. . . . . .

ERRATA

Page 14, Ligne 17 en descendant : $\Omega = \ldots = abc \sin zx \sin zy \sin \zeta$
au lieu de . . . . . $abc \sin zx \sin zy \sin \xi$

Page 15, Ligne 6 en remontant : $p^2 \{ mnp \} = \ldots + 2mpac \cos xz$
au lieu de . . . . . $2mpa \cos xz$

Page 22, Ligne 5 en descendant : les longueurs numériques
au lieu de . . . . . les longueurs

Id. Ligne 12 en descendant : le plan des $z'y'$
au lieu de . . . . . le plan des zy

Page 26, Ligne 2 en descendant : $\operatorname{tg} RR' = D \dfrac{\sqrt{\left.\begin{array}{l} u^2b^2c^2 \sin^2 yz \\ + v^2a^2c^2 \sin^2 xz \\ + w^2a^2b^2 \sin^2 xy \end{array}\right\}} \ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

au lieu de . . . . . $\operatorname{tg} RR' = D \dfrac{\sqrt{\left.\begin{array}{l} u^2b^2c^2 \sin yz \\ + v^2a^2c^2 \sin xz \\ + w^2ab^2 \sin xy \end{array}\right\}} \ldots}{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

Id. Ligne 6 en remontant : $s^2(ghk) = \ldots - \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2hk \,.\, s(010) \,.\, s(001) \cos \zeta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$

au lieu de . . . . . $s^2(ghk) = \ldots - \left\{ \begin{array}{l} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ + 2hk \,.\, s(010) s(001) \cos \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$

Page 27, Lignes 5 et 6 en remontant : $\left\{ \begin{array}{l} H = 180^\circ - xz \\ Z = 180^\circ - xy \end{array} \right.$

au lieu de . . . . . $\left\{ \begin{array}{l} H = 180^\circ - yx \\ Z = 180^\circ - xz \end{array} \right.$

Page 32, Ligne 9 en descendant : la quantité E^2
au lieu de . . . . . la quantité E^3

Page 32, ligne 17 en descendant : $\frac{\sin P_1P_2}{\sin P_2P_3} = \ldots = \frac{D_{1,2}s_3}{D_{2,3}s_1}$

au lieu de . . . . . $\frac{D_1s_3}{D_{2,3}s_1}$

Id. ligne 3 en remontant : $\frac{\sin P_1P_2 \cdot \sin P_3P_4}{\sin P_1P_3 \sin P_2P_4} = \frac{D_{1.2}D_{3.4}}{D_{1.3}D_{2.4}}$

au lieu de . . . . . $\frac{D_{1.2}D_{3.4}}{D_{1.3}D_{2.4}}$

Id. ligne 1 en remontant : $C = \ldots = \frac{D_{1.3}}{D_{1.2}}$

au lieu de . . . . . $\frac{D_{2.3}}{D_{1.2}}$

Page 66, ligne 4 en descendant : par $\gamma\delta$ sont :
au lieu de . . . . . par $\gamma\delta$ ont :

Page 100, ligne 8 en remontant : $A' = A\sqrt{3}$, d'où $\frac{H}{A'} = \frac{1}{2}\frac{a}{h}$

au lieu de . . . . . $A = A'\sqrt{3}$, d'où $\frac{H'}{A} = \frac{1}{2}\frac{a}{h}$

Page 103, ligne 7 en descendant : $\{ 0q\bar{q}s \}$

au lieu de . . . . . $\{ 0p\bar{q}s \}$

Page 150, dans la fig. 153, les symboles $\bar{2}10$, $\bar{1}10$, 110, 210 inscrits sur la l
zontale médiane *doivent être changés en* $\bar{2}01$, $\bar{1}01$, 101, 201.

Page 158 ligne 3 en descendant : 2° . A^4, OL^3, OL'^2 . . .
au lieu de . . . . . 2° . A^4, OL^2, $2L'^2$ . . .

Page 162, dans la fig. 178, la petite face du milieu a été notée 323 *au lie*

Page 292 . . . 1° Formes placées sur les angles $i \cdot r > 0$
Pôles situés *au-dessus* de la ligne $X\bar{X}$
au lieu de . . . . . *au-dessous* . . . . . .

Id. . . . . . 2° Formes placées sur les angles $e \cdot r < 0$
Pôles situés *au-dessous* de la ligne $X\bar{X}$
au lieu de 2° Formes placées sur l'angle $e \cdot r < 0$
. . . . . *au-dessus* . . . . . .

Typographie A. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

TRAITÉ

DE

CRISTALLOGRAPHIE

24 764. — PARIS, IMPRIMERIE A. LAHURE
9, Rue de Fleurus, 9

TRAITÉ

DE

RISTALLOGRAPHIE

GÉOMÉTRIQUE ET PHYSIQUE

PAR

ERNEST MALLARD

INGÉNIEUR EN CHEF DES MINES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE DES MINES

TOME SECOND

Avec 184 figures et 8 planches tirées en couleur

CRISTALLOGRAPHIE PHYSIQUE

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS DES PONTS ET CHAUSSÉES ET DES MINES

49, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 49

1884

PRÉFACE

DU SECOND VOLUME

---

développements auxquels m'a entraîné l'importance tou-
croissante de l'optique cristallographique ne m'ont pas per-
compléter dans ce volume, comme je l'espérais, l'exposé
cience des cristaux. J'ai dû m'y borner à l'étude des modifi-
que subissent les divers phénomènes physiques lorsqu'ils
ur siège la matière cristallisée.

lupart de ces modifications sont susceptibles d'une repré-
on géométrique remarquable.

que, sous l'influence d'une certaine cause, il se pro-
ans un corps un phénomène physique suivant une di-
déterminée, la cause restant la même en grandeur
ariant en direction, la grandeur et la direction du phéno-
varient en général à la fois. Si, sur chacune des directions
pace issues d'un même point, on porte une longueur pro-
nelle à la grandeur du phénomène qui lui est propre,
des extrémités des rayons vecteurs ainsi définis est un
de.

e suis attaché à montrer que cette loi est générale ; qu'elle
end ni de la nature du phénomène physique, ni même de
cture réticulaire des cristaux, mais qu'elle est une simple
uence de l'homogénéité supposée de la substance, de la

continuité du phénomène dans l'espace, et de la proportion de l'effet à la cause.

Dans l'état actuel de la science, aucune théorie ne perm déduire, de la structure de l'édifice cristallin, la nature de difications que cet édifice fait subir aux phénomènes physi Mais la cause et l'effet devant nécessairement être régis p même symétrie, l'observation de ces modifications et de la s trie qu'elles présentent, offre un moyen de déterminer la s trie dont les cristaux sont doués.

Ce moyen vient s'ajouter à celui que nous offre déjà l'étu la forme extérieure. Il a une portée moindre que ce der puisque la morphologie cristalline ne se borne pas à déterm la symétrie du cristal, mais nous fait connaître en outre, les paramètres cristallographiques, la forme même de la m du réseau. En revanche, il se montre souvent, dans les limites est renfermé, plus délicat et plus précis, en même temps a l'avantage de pouvoir être appliqué aux fragments les informes et les plus petits de la substance.

Avec ce volume se termine l'exposé des procédés d'inve tion dont l'observateur dispose pour l'étude des substances tallisées qu'offre la nature ou que fabriquent les chimistes.

Un troisième et dernier volume sera consacré aux fait concernent la forme extérieure ainsi que la structure intér des cristaux, et dont ces divers procédés d'investigation ont chi la science. On aura ainsi à y parler de l'hémitropie, des pements pseudo-symétriques, de l'isomorphisme, du di phisme, de la genèse des cristaux, etc.

DEUXIÈME PARTIE

RISTALLOGRAPHIE

PHYSIQUE

CHAPITRE PREMIER

R LES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES DES MILIEUX CONTINUS PRINCIPES GÉNÉRAUX

première partie de cet ouvrage, on a étudié les conséquences ques, relatives à la forme extérieure des corps cristallisés, qui ent rationnellement de la propriété de l'homogénéité. Dans onde partie, on se propose, en restituant aux cristaux leur caractère, de les considérer comme possédant tous les modes de la matière, et se manifestant à nous par un nombre consi- e phénomènes. Parmi ces phénomènes, on étudiera de préfé- x qui sont plus ou moins profondément modifiés par la struc- ale des corps cristallisés et dont les lois peuvent ainsi nous nétrer plus avant dans la connaissance de cette structure.

ant d'aborder l'étude successive de ces phénomènes multiples tes, il est utile de chercher à dégager un certain nombre de

principes généraux qui sont communs à beaucoup d'entre arrivera ainsi à constituer une sorte de théorie générale qui l'étude de chaque cas particulier.

La matière qui remplit un espace donné et constitue un corp lieu physique n'est pas continue. Cette discontinuité joue so rôle considérable ; nous avons déjà vu (1re partie, chap. XVI) q à elle que l'on doit rapporter la production des plans de c même celle des plans cristallins. Il ne nous est donc point pe méconnaître une particularité si essentielle pour le sujet q occupe. Mais lorsqu'on ne se propose que l'étude de l'une des pr physiques d'un certain milieu, en faisant abstraction de to autres, il arrive souvent qu'on peut regarder le milieu comme ou, ce qui revient au même, lui en substituer un fictif qui, continu, soit équivalent au milieu réel, relativement à la propri ticulière dont il s'agit. Cette propriété peut alors être représen un certain nombre de fonctions continues des coordonnées de du milieu, et la théorie mathématique des fonctions continues immédiatement d'importants théorèmes qui, se traduisant tous physiques, rendent d'inappréciables services à l'observation.

Pour qu'un semblable artifice soit possible, trois conditions pales sont nécessaires :

1° Il faut que les propriétés de deux molécules très voisines être représentées par des quantités très peu différentes l'une de

2° Il faut que le déplacement relatif des centres de gra molécules, produit par le phénomène dont il s'agit, soit expr une fonction continue des coordonnées de ces centres. C'est ce toujours lieu pour un milieu solide déformé, mais non romp ce qui n'aura lieu, pour un milieu fluide, que lorsqu'on parv éliminer les courants qui peuvent se produire dans la masse et irrégulièrement toutes les parties;

3° Il faut qu'il soit permis de supposer chaque molécule r son centre de gravité, sans avoir à tenir compte de la répart la matière autour de ce centre, c'est-à-dire de la forme de cule. S'il en était autrement, la fonction qui représente l'éta que du milieu reprendrait la même valeur, à un infiniment p pour des points semblablement placés par rapport aux centres vité de deux molécules infiniment voisines, mais elle pourrait des valeurs très dissemblables pour des points très voisins

partenant à la même molécule; elle serait donc périodique et
nue.

ons ces trois conditions remplies. L'état physique du milieu,
re celui du centre de gravité de chaque molécule étant dé-
on peut, par interpolation, trouver une fonction continue des
ées de l'espace, dont les valeurs donnent, pour les coordonnées
e centre, l'état physique qui lui convient, et assignent encore
physiques fictifs aux points géométriques intermédiaires. On
ıbstituer ainsi au milieu discontinu un milieu continu, dont
sique en chaque point sera représenté par la fonction interpo-
st ainsi que la température d'un milieu peut être représentée par
aine fonction continue des coordonnées de l'espace, qui repro-
empérature de chaque molécule, et assigne en outre à chaque
métrique intermédiaire une température fictive.

ne faut pas oublier que tout cela devient impossible si la pro-
hysique considérée subit une variation finie en passant d'une
à une molécule infiniment voisine. Si, par exemple, il s'agit
her les lois qui président à la rupture d'un corps, il se pro-
re deux molécules séparées par le plan de rupture, des mo-
ns considérables dans les actions qu'elles exercent l'une sur
et le corps réel ne se brisera pas nécessairement comme le
milieu continu fictif qu'on lui substitue dans l'étude des phé-
de déformation élastique qui précèdent la rupture.

outes les théories de la physique mathématique, on suppose
onditions précédentes sont remplies et que le milieu réel peut
placé par un milieu fictif continu; c'est aussi l'hypothèse
allons admettre dans ce qui va suivre pour rechercher toutes
quences que l'on en peut tirer.

de commencer cette étude, il est nécessaire de faire une re-
importante. Les propriétés physiques d'un milieu, en un cer-
t O, dépendent évidemment de la façon dont la matière est
e tout autour de O, mais on n'a jamais à tenir compte que de
n de matière qui se trouve comprise dans l'intérieur d'une
trêmement petite dont O est le centre. On sait, en effet, qu'un
d'un corps homogène, quelle qu'en soit la petitesse, possède,
es dimensions en sont sensibles, les mêmes propriétés phy-
e le corps tout entier. C'est ainsi que la densité d'un fragment,
u'il soit, est la même que celle du corps tout entier, lorsqu'il

est homogène ; que les constantes élastiques d'un corps n pas avec son volume, etc. On en conclut que des longueurs tr physiquement, peuvent être néanmoins regardées comme très par rapport à la distance intermoléculaire.

Lorsque le corps est homogène, il possède en tous les p mêmes propriétés. Lorsqu'il n'est pas homogène, les propr corps varient en chaque point, et les propriétés du corps tout déduisent, par une sommation, de celles qui appartiennent à c ses points.

Théorie de l'ellipsoïde. — Dans un phénomène qui se pr sein d'un certain milieu, on peut distinguer en général :

1° Le point O où il se produit ;

2° La ligne OA qui le représente en grandeur et en directior

3° La ligne OB qui représente, en grandeur et en direction, peut appeler la cause déterminante du phénomène.

Si l'on fait varier d'une manière continue la direction de OB grandeur doit être supposée constante, la grandeur et la directi varient, et ces variations sont co puisque l'on suppose que tout var manière continue autour de O. L décrit une sphère, A décrit une cert face, qu'il est très intéressant de dét puisqu'elle représente en quelque s métriquement les propriétés que p milieu, relativement au phénomène co

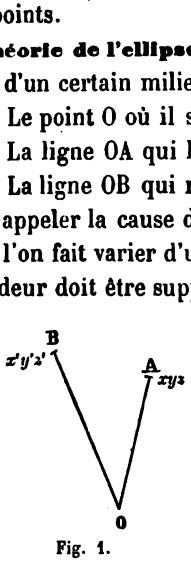


Fig. 1.

L'observation seule permet de déterminer complètement cett pour chaque phénomène et pour chaque milieu. Mais il est démontrer que cette surface est toujours un certain ellipsoïde. soïde étant déterminé par six points, il suffira donc, en géné connaître le phénomène suivant toutes les directions imagin six observations faites suivant des directions différentes.

On suppose qu'en un point O de l'intérieur du milieu, on très-petite ligne OA (*fig.* 1), dont la direction et la grandeur dent non seulement de la structure du corps tout autour du mais encore de la grandeur et de la direction de la petite droit suppose que OA varie avec OB d'une manière continue et pour OB $= \theta$. On convient d'appeler OA et OB les deux *droit pondantes*.

Si l'on rapporte A et B à des axes rectangulaires ayant O

coordonnées x, y, z de A, et x', y', z' de B, sont de très
antités; d'ailleurs les coordonnées x, y, z sont des fonctions
de x', y', z' et réciproquement; on peut donc poser :

$$x = F_1(x', y', z') \quad y = F_2(x', y', z') \quad z = F_3(x', y', z').$$

développe x, y, z suivant la série de Maclaurin, en remar-
e $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, lorsque x', y', z' sont nuls à la fois et
nt aux termes du premier degré en x', y', z', on aura :

$$(1) \begin{cases} x = Ax' + By' + Cz', \\ y = A'x' + B'y' + C'z', \\ z = A''x' + B''y' + C''z', \end{cases}$$

s du premier degré, dans lesquelles A, B, C, etc., sont des
s qui dépendent de la nature et de l'arrangement du milieu
très petit rayon autour de O, mais sont indépendantes de
.

ois équations (1) peuvent se mettre facilement sous la forme :

$$(1') \begin{cases} x' = A_1x + B_1y + C_1z, \\ y' = A'_1x + B'_1y + C'_1z, \\ z' = A''_1x + B''_1y + C''_1z. \end{cases}$$

ant membre à membre ces trois équations élevées au carré,

$$(2)\ r'^2 = \begin{cases} x^2 \Sigma A_1^2 \\ + y^2 \Sigma B_1^2 \\ + z^2 \Sigma C_1^2 \end{cases} + 2 \begin{cases} xy\, \Sigma A_1B_1 \\ + xz\, \Sigma A_1C_1 \\ + yz\, \Sigma B_1C_1 \end{cases}$$

nant par r' la longueur OB.
équation représente un ellipsoïde, puisque les coefficients de
² sont essentiellement positifs. On en conclut donc que si, lais-
stante la longueur de OB ou r', on donne successivement à la
OB toutes les valeurs possibles, le point B décrit une sphère,
ue le point A décrit un ellipsoïde.
ue l'ellipsoïde est rapporté à ses axes, on a :

$$\Sigma A_1B_1 = 0, \quad \Sigma A_1C_1 = 0, \quad \Sigma B_1C_1 = 0.$$

prend OB $= r' = 1$, x', y', z' deviennent les cosinus m', n', p'

des angles que OB fait avec les axes. Soient deux directions perp
laires (m'_1, n'_1, p'_1) et (m'_2, n'_2, p'_2), on a :

$$m'_1 m'_2 + n'_1 n'_2 + p'_1 p'_2 = 0 ;$$

et remplaçant les cosinus par leurs valeurs tirées des équations
vient, en tenant compte des équations (2') :

$$x_1 x_2 \Sigma A_1^2 + y_1 y_2 \Sigma B_1^2 + z_1 z_2 \Sigma C_1^2 = 0,$$

équation qui, si l'on y regarde x_1, y_1, z_1 comme des coordonnée
bles, représente dans l'ellipsoïde le plan diamétral conjugué
mètre (x_2, y_2, z_2).

Si donc on considère toutes les directions (m'_1, n'_1, p'_1) perp
laires à la direction (m'_2, n'_2, p'_2), les rayons vecteurs de l'el
qui *correspondent* à toutes ces directions, seront compris dans
diamétral conjugué du rayon vecteur (x_2, y_2, z_2), qui *correspo*
direction (m'_2, n'_2, p'_2).

Comme chaque rayon vecteur *correspond* à une direction uni
quantités étant liées par des relations linéaires), la proposition
est également vraie.

On en déduit que les trois axes de l'ellipsoïde ont pour *co*
dantes trois droites rectangulaires [1].

Avant d'aller plus loin, il est bon, pour donner plus de cla
théorie, de modifier les notations des coefficients qui entrent
équations (1).

Si l'on supose que le point B est situé sur l'axe des x, on
et $z' = 0$ et les équations (1) deviennent :

$$x = Ax', \qquad y = A'x', \qquad z = A''x'.$$

Les quantités A, A', A'' sont donc les coefficients qui, multiplié
donnent les projections, suivant les axes coordonnés, de la longu
lorsque la droite correspondante est dirigée suivant la partie
de l'axe des x. Il ne faut pas oublier que la grandeur de x' e
l'espèce, la grandeur même de OB, qui est constante.

Le coefficient A se rapporte à la projection dirigée suivant l'ax
ou normale au plan perpendiculaire à la droite correspondante

[1] J'emprunte la démonstration de ce théorème au beau mémoire sur l
publié par M. Peslin, dans les *Annales des mines*, 7e s., t. VIII (1875).

la lettre $\mathcal{N}$, en ajoutant en indice la lettre x, qui indiquera
quel axe coordonné est dirigée la droite correspondante. Les deux
oefficients A′ et A″ se rapportent aux projections parallèles ou
elles au plan normal à la droite correspondante; on leur attri-
ettre $\mathcal{T}$, en ajoutant encore en indice la lettre x, qui indiquera
suivant quel axe coordonné est dirigée la droite correspon-
Pour distinguer l'un de l'autre les deux coefficients A′ et A″, on
comme second indice, la lettre y au coefficient relatif à la
on parallèle à l'axe des y, et la lettre z au coefficient relatif à
ction parallèle à l'axe des z.

nployant pour les autres coefficients un système de notations
es, les équations (1) s'écriront ainsi qu'il suit :

$$(3)\quad \begin{cases} x = \mathcal{N}_x\, x' + \mathcal{T}_{yx}\, y' + \mathcal{T}_{zx}\, z', \\ y = \mathcal{T}_{xy}\, x' + \mathcal{N}_y\, y' + \mathcal{T}_{zy}\, z', \\ z = \mathcal{T}_{xz}\, x' + \mathcal{T}_{yz}\, y' + \mathcal{N}_z\, z'; \end{cases}$$

divisant tous les membres de ces équations par r' et appelant
$\mathcal{U}$, $\mathcal{Z}$ les rapports de x, y, z à r', puis m', n', p' les cosinus
les que fait la direction OB avec les axes :

$$(3')\quad \begin{cases} \mathcal{X} = m'\mathcal{N}_x + n'\mathcal{T}_{yx} + p'\mathcal{T}_{zx}, \\ \mathcal{Y} = m'\mathcal{T}_{xy} + n'\mathcal{N}_y + p'\mathcal{T}_{zy}, \\ \mathcal{Z} = m'\mathcal{T}_{zx} + n'\mathcal{T}_{zy} + p'\mathcal{N}_z. \end{cases}$$

gement d'axes coordonnés. — Expressions générales des $\mathcal{N}$
$\mathcal{T}$ pour des directions quelconques. — Si l'on change d'axes
nnés, et si l'on substitue aux axes rectangulaires x, y, z, d'autres axes
gulaires ξ, η, ζ, en appelant (m_ξ, n_ξ, p_ξ), (m_η, n_η, p_η), $(m_\zeta, n_\zeta, p_\zeta)$
nus des angles que font respectivement les trois nouveaux axes
s anciens, on peut se demander quels sont les nouveaux coeffi-
$\mathcal{N}_\xi$, $\mathcal{T}_{\eta\xi}$, etc.

irection des ξ correspond à une direction dont les trois compo-
$\mathcal{X}$, $\mathcal{U}$, $\mathcal{Z}$ sur les axes des x, y, z sont données par les équa-

tions (3′), lorsqu'on y remplace m', n', p' par m_ξ, n_ξ, p_ξ. L
composantes de cette même droite suivant les trois nouveaux axe

$$\mathcal{N}_\xi, \quad \mathcal{C}_{\xi\eta}, \quad \mathcal{C}_{\xi\zeta},$$

et, pour les obtenir, il suffit de faire, suivant chacun des n
axes, la somme des projections de $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$. On aura don

$$(4)\ N_\xi = m_\xi \mathcal{X} + n_\xi \mathcal{Y} + p_\xi \mathcal{Z} = \begin{cases} m_\xi^2 \mathcal{N}_x + n_\xi^2 \mathcal{N}_y + p_\xi^2 \mathcal{N}_z \\ + n_\xi p_\xi (\mathcal{C}_{yz} + \mathcal{C}_{zy}) \\ + m_\xi p_\xi (\mathcal{C}_{xz} + \mathcal{C}_{zx}) \\ + m_\xi n_\xi (\mathcal{C}_{xy} + \mathcal{C}_{xy}). \end{cases}$$

$$(5)\ T_{\xi\eta} = m_\eta \mathcal{X} + n_\eta \mathcal{Y} + p_\eta \mathcal{Z} = \begin{cases} m_\xi m_\eta \mathcal{N}_x \\ + n_\xi n_\eta \mathcal{N}_y + \\ + p_\xi p_\eta \mathcal{N}_z \end{cases} \begin{cases} m_\eta n_\xi \mathcal{C}_{yx} + m_\xi n \\ + m_\eta p_\xi \mathcal{C}_{zx} + m_\xi \\ + n_\eta p_\xi \mathcal{C}_{zy} + n_\xi p \end{cases}$$

et des formules analogues pour les autres $\mathcal{N}$ et $\mathcal{C}$.

En faisant la somme $\mathcal{N}_\xi + \mathcal{N}_\eta + \mathcal{N}_\zeta$, on voit que chaque
$(\mathcal{C}_{xy} + \mathcal{C}_{yx})$ est multiplié par un coefficient de la forme m
$m_\eta n_\zeta + p_\zeta p_\eta$. Ce coefficient, comme il est aisé de le voir, rep
le cosinus de l'angle xy et est par conséquent nul. On a ainsi :

$$\mathcal{N}_\xi + \mathcal{N}_\eta + \mathcal{N}_\zeta = \mathcal{N}_x + \mathcal{N}_y + \mathcal{N}_z.$$

La somme des trois $\mathcal{N}$ relatifs à des axes rectangulaires quelc
est donc constante.

En faisant la somme $\mathcal{C}_{\xi\eta} + \mathcal{C}_{\eta\xi}$, on trouve la formule suiva

$$(6)\ \mathcal{C}_{\xi\eta} + \mathcal{C}_{\eta\xi} = 2 \begin{cases} m_\xi p_\eta \mathcal{N}_x \\ + n_\xi n_\eta \mathcal{N}_y + \\ + p_\xi p_\eta \mathcal{N}_z \end{cases} \begin{cases} (m_\eta n_\xi + m_\xi n_\eta)(\mathcal{C}_{yx} + \mathcal{C}_{x} \\ + (m_\eta p_\xi + m_\xi p_\eta)(\mathcal{C}_{zx} + \mathcal{C}_{x} \\ + (n_\eta p_\xi + p_\eta n_\xi)(\mathcal{C}_{zy} + \mathcal{C}_{y} \end{cases}$$

Si l'on convient de porter sur la direction $(m_\xi, n_\xi\ p_\xi)$, une lon

, n_ξ étant pris en valeur absolue, et si l'on appelle x, y, z

nées de l'extrémité de cette longueur ρ, on aura, en por-
équation (4) la valeur de m_ξ, n_ξ, p_ξ en fonction de x, y, z :

$$1 = x^2 \mathcal{N}_x + y^2 \mathcal{N}_y + z^2 \mathcal{N}_z$$
$$\mathcal{C}_{xy} + \mathcal{C}_{yx}) + xz(\mathcal{C}_{xz} + \mathcal{C}_{zx}) + yz(\mathcal{C}_{yz} + \mathcal{C}_{zy}),$$

équation d'une surface du deuxième degré. Cette surface est
le lorsque $\mathcal{N}_x$, $\mathcal{N}_y$, $\mathcal{N}_z$ sont de même signe ; elle se
e deux hyperboloïdes conjugués lorsque le signe de l'un
contraire à celui des deux autres. Dans ce dernier cas, le
ptotique commun aux deux hyperboloïdes contient toutes les
pour lesquels le $\mathcal{N}$ correspondant est nul.
de la surface du second degré sont trois directions pour les-
$_{xy} + \mathcal{C}_{yx}$, $\mathcal{C}_{xz} + \mathcal{C}_{zx}$ et $\mathcal{C}_{yz} + \mathcal{C}_{zy}$ sont nuls.

ions symboliques des $\mathcal{N}$ et des $\mathcal{C}$. — On peut réunir
même formule symbolique les deux formules (4) et (5) en
d'écrire $\mathcal{N}_\xi = \mathcal{P}_{\xi\xi}$, $\mathcal{C}_{\xi\eta} = \mathcal{P}_{\xi\eta}$, et posant symbolique-

$$\mathcal{P}_{\xi\xi} = \mathcal{P}_\xi \mathcal{P}_\xi, \quad \mathcal{C}_{\xi\eta} = \mathcal{P}_\xi \mathcal{P}_\eta,$$

soit permis, dans les seconds membres des équations, d'in-
ordre des facteurs. On a alors :

$$\mathcal{X} = (m_\xi \mathcal{P}_x + n_\xi \mathcal{P}_y + p_\xi \mathcal{P}_z)\, \mathcal{P}_x = \mathrm{M}\, \mathcal{P}_x,$$
$$\mathcal{U} = \mathrm{M}\, \mathcal{P}_y,$$
$$\mathcal{Z} = \mathrm{M}\, \mathcal{P}_z,$$

$$n_\eta \mathcal{X} + n_\eta \mathcal{U} + p_\eta \mathcal{Z} = \mathrm{M}\,(m_\eta \mathcal{P}_x + n_\eta \mathcal{P}_y + p_\eta \mathcal{P}_z),$$

ans laquelle ξ et η désignent des coordonnées quelconques qui
re identiques entre elles.

On pose symboliquement :

$$(8) \qquad \mathcal{P}_\xi = \mathrm{M} = m_\xi \mathcal{P}_x + n_\xi \mathcal{P}_y + p_\xi \mathcal{P}_z.$$

Cette formule symbolique peut s'énoncer en disant que $\mathcal{P}$ somme des projections sur la direction ξ, d'un symbole dont posantes sont $\mathcal{P}_x$, $\mathcal{P}_y$, $\mathcal{P}_z$.

La formule qui donne $\mathcal{P}_{\xi\eta}$ devient alors :

$$(9) \qquad \mathcal{P}_{\xi\eta} = \mathcal{P}_\xi \cdot \mathcal{P}_\eta.$$

Cas particulier de l'égalité symétrique. — On a vu qu théorie précédente repose sur l'assimilation du milieu réel à fictif continu, ce qui n'est possible que lorsqu'on peut réduire cules à leurs centres de gravité. Pour que la théorie trouve cation, la forme des molécules, les modifications que ces peuvent éprouver, doivent donc être sans influence sur le pl considéré. En un mot, si le milieu est un corps cristallisé, mène ne doit dépendre que de la structure réticulaire.

On peut toujours regarder le point O comme coïncidant ave tre de gravité d'une molécule, puisque la distance intermolé regardée comme très petite, relativement aux longueurs phys très courtes et qu'on regarde comme infiniment petites, t x', y', etc. Le point O peut donc être regardé comme un milieu.

Si les modifications ou les actions quelconques qui mette le phénomène considéré sont symétriques aussi par rapport à les particularités de ce phénomène seront donc symétriques port au même point. Dans ce cas particulier, auquel nous d avec Lamé (1), le nom *d'égalité symétrique*, tout devant être s par rapport au point O pris pour origine, les deux directi même droite devront jouir des mêmes propriétés et ne po distinguées l'une de l'autre que par la position accidente corps occupe dans l'espace.

Pour voir les conséquences que l'on déduit de cette pr l'égalité symétrique, on remarque que, dans le cas général, l

[1] *Leçons sur la théorie analytique de la chaleur*, par G. Lamé (1861).

ntes des trois axes de l'ellipsoïde sont rectangulaires entre
ourra donc toujours trouver une certaine droite OP qui
cette propriété qu'en faisant tourner dans un certain sens
rtain angle, l'ellipsoïde autour de cette droite, les axes de
viendront en coïncidence avec leurs droites correspon-
ectives. Les deux directions de cette droite OP ne sont donc
ues entre elles et peuvent être distinguées l'une de l'autre
our obtenir la coïncidence entre les axes de l'ellipsoïde et
es correspondantes, il faudra tourner autour d'une de ces
dans le sens direct et dans le sens rétrograde autour de la
pposée.

onclut que l'existence d'une droite telle que OP est incompa-
l'égalité symétrique, et que, dans le cas particulier de
ymétrique, les axes de l'ellipsoïde doivent coïncider avec
es correspondantes.

, le milieu étant supposé posséder l'égalité symétrique, on
'ellipsoïde à ses axes, les composantes tangentielles $\mathcal{T}$ sont
les, et les équations (3) se réduisent aux suivantes :

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathcal{X} = m'\mathcal{N}_x, \\ \mathcal{Y} = n'\mathcal{T}_{yx}, \\ \mathcal{Z} = p'\mathcal{T}_{zx}. \end{cases}$$

change d'axes coordonnés, pour rapporter l'ellipsoïde à trois
ngulaires quelconques, les formules (4) et (5) donnent :

$$\mathcal{N}_\xi = m_\xi^2\,\mathcal{N}_x + n_\xi^2\,\mathcal{N}_y + p_\xi^2\,\mathcal{N}_z,$$

$$\mathcal{T}_{\xi\eta} = m_\xi\, m_\eta\,\mathcal{N}_x + n_\xi\, n_\eta\,\mathcal{N}_y + p_\xi\, p_\eta\,\mathcal{N}_z,$$

isé de voir que $\mathcal{T}_{\xi\eta} = \mathcal{T}_{\eta\xi}$. En appelant x, y, z les axes rec-
es quelconques, et en posant, pour simplifier l'écriture,

$$\mathcal{T}_{yz} = \mathcal{T}_x,\quad \mathcal{T}_{zx} = \mathcal{T}_{xy} = \mathcal{T}_y,\quad \mathcal{T}_{yx} = \mathcal{T}_{xy} = \mathcal{T}_z,$$

les formules générales (3) deviennent donc, *dans le cas de l'ég trique :*

$$(11)\quad \begin{cases} \mathcal{X} = m'\mathcal{N}_x + n'\mathcal{T}_z + p'\mathcal{T}_y, \\ \mathcal{Y} = m'\mathcal{T}_z + n'\mathcal{T}_y + p'\mathcal{T}_x, \\ \mathcal{Z} = m'\mathcal{T}_y + n'\mathcal{T}_x + p'\mathcal{N}_z. \end{cases}$$

Relations entre l'orientation des axes de l'ellipsoïde et axes de symétrie de l'édifice cristallin. — Nous avons v corps cristallins sont composés de molécules dont les centres forment un réseau à maille parallélipipédique. Nous avons r dans la première partie de cet ouvrage, quels soient tous les symétrie dont un pareil assemblage est susceptible, et nous a classé tous les réseaux cristallins en sept systèmes caractéris modes différents de symétrie ; chacun des systèmes comprenant groupes qui diffèrent les uns des autres par la symétrie de cule. Nous avons montré enfin comment tous ces modes div métrie se traduisent dans la forme cristalline, de sorte que, taines réserves, il est généralement possible de remonter de la extérieure du cristal à la symétrie intérieure de l'édifice cris

Cette symétrie doit nécessairement se traduire aussi dans phénomènes physiques qui se produisent dans l'intérieur du co posons un édifice cristallin possédant un axe de symétrie bina qu'on aura fait tourner le corps de 180° autour de cet axe tions qu'il est susceptible d'exercer n'auront changé ni de pl direction, et tout se passera comme si le corps était demeur bile. Si l'on considère l'ellipsoïde qui définit la variation d'u phénomène physique autour d'un point O, et si *ce phénomè pend que de la constitution intérieure du corps, et d'actions pré même symétrie que celle de l'édifice moléculaire,* l'ellipsoïde avoir conservé en apparence la même position, et l'on est ai dans ce cas particulier aux conclusions très intéressantes qui

1° Un axe de symétrie binaire de l'édifice coïncide avec u l'ellipsoïde ;

2° Un axe de symétrie d'un degré supérieur à 2, est néces pour l'ellipsoïde un axe de révolution ;

3° Tout plan de symétrie de l'édifice cristallin est un plan de l'ellipsoïde.

ions ces principes à chacun des divers systèmes cristallins.
système cubique, quelle que soit la mériédrie, il y a quatre axes
rie ternaire; l'ellipsoïde est donc de révolution autour de qua-
différents, ce qui ne peut se faire qu'autant que l'ellipsoïde
phère. Il faut remarquer que cette conclusion s'applique comme
les qui vont suivre, à *tous* les ellipsoïdes qui peuvent définir
iétés physiques, susceptibles de rentrer dans la théorie précé-

es systèmes rhomboédrique, hexagonal et quadratique, il y a
un axe de symétrie supérieur à 2; tous les ellipsoïdes seront
révolution autour de cet axe que l'on appelle *axe principal*.
e système orthorhombique, il y a ou trois axes de symétrie
rectangulaires, ou un axe de symétrie binaire et deux plans de
e perpendiculaires aux deux axes binaires que l'on peut re-
comme supprimés par l'hémiédrie. Les ellipsoïdes auront donc
es les axes de symétrie binaires, réels ou déficients, de l'édifice.
le système clinorhombique il y a, un axe de symétrie binaire ou
de symétrie perpendiculaire à un axe déficient. Les ellipsoïdes
nt donc plus assujettis qu'à avoir un de leurs axes dirigé suivant
symétrie réel ou déficient de l'édifice cristallin.
le système anorthique, enfin, il n'y a plus aucune relation né-
entre la symétrie de l'édifice et celle de l'ellipsoïde.
it, d'après ce qui précède, quel intérêt prennent, au point de
la constitution intérieure du corps, les propriétés physiques aux-
notre théorie peut s'appliquer, telles que l'élasticité, la dilata-
conductibilité thermique, la conductibilité électrique, la pro-
n de la lumière, l'induction magnétique, etc., etc. Pour chacune
propriétés on pourra expérimentalement déterminer quel est
ïde correspondant. Si la symétrie de l'édifice est bien réelle-
binaire par exemple, tous les ellipsoïdes auront les axes dirigés
ème façon.
il pourra se faire que la symétrie, très voisine de la symétrie
re par rapport aux manifestations d'une propriété physique
e la forme cristalline, en diffère au contraire notablement par
aux manifestations d'une autre propriété physique, telle que
agation de la lumière. L'observation pourra donc montrer
staux qu'il sera impossible de distinguer cristallographique-
ceux qui sont orthorhombiques, et dans lesquels les phéno-
ptiques feront connaître que cette symétrie n'est cependant

qu'approchée. On peut donc dire que la symétrie réelle d'un cristal ne peut être rigoureusement connue que lorsque les ellipsoïdes correspondant à toutes les propriétés physiques sont connus de position. Mais il est clair que, les réserves nécessaires étant faites pour des cas particuliers, tous les phénomènes physiques manifesteront, chacun à leur manière, la symétrie du milieu, et que l'on pourra ainsi, jusqu'à un certain point, conclure de l'une à l'autre.

Des observations optiques, thermiques ou magnétiques pourront donc, dans certains cas, indiquer le système cristallin d'un cristal aussi bien et même mieux que l'étude des formes cristallines.

Ellipsoïde. — Surface principale. — Surface inverse. — Revenons maintenant, toujours dans le cas de l'égalité symétrique, à l'étude de l'ellipsoïde défini par l'équation (2). Lorsqu'on le rapporte à ses axes, les équations (10) dans lesquelles on posera, pour simplifier l'écriture,

$$\mathcal{H}_x = A, \qquad \mathcal{H}_y = B, \qquad \mathcal{H}_z = C,$$

donnent aisément pour l'équation de la surface :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{z^2}{C^2} = 1. \tag{12}$$

C'est l'ellipsoïde proprement dit qu'on appellera ellipsoïde de déformation, d'élasticité, de conductibilité, etc., s'il sert à définir la déformation, la force élastique, la conductibilité calorifique, etc.

Si x_0, y_0, z_0 sont les coordonnées et ρ_0 le rayon vecteur d'un point A_0 de cet ellipsoïde, la direction OB à laquelle il correspond fait, d'après les équations (10) avec les axes coordonnés, des angles dont les cosinus m', n', p' ont les valeurs suivantes :

$$m' = \frac{x_0}{A}, \qquad n' = \frac{y_0}{B}, \qquad p' = \frac{z_0}{C}.$$

Le plan perpendiculaire à OB et passant par O a donc pour équation :

$$x\frac{x_0}{A} + y\frac{y_0}{B} + z\frac{z_0}{C} = 0,$$

et est par conséquent parallèle au plan tangent à une certaine surface du 2e degré, réelle ou imaginaire, dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{C} = 1, \tag{13}$$

en un point (x_1, y_1, z_1) réel ou imaginaire, situé sur le rayon vecteur OA_0, et pour lequel on a :

$$x_1 = kx_0, \qquad y_1 = ky_0, \qquad z_1 = kz_0;$$

k est un coefficient réel ou imaginaire dont on trouvera plus loin la valeur.

Les axes de la surface (13) ont la même direction que ceux de l'ellipsoïde (12). La longueur d'un axe de cette surface est égale à la racine carrée de l'axe de l'ellipsoïde ayant la même direction. La surface (13) est un ellipsoïde lorsque les $\mathcal{N}$ sont de même signe; un hyperboloïde ou plutôt deux hyperboloïdes conjugués, dont l'un est réel et l'autre imaginaire lorsque les $\mathcal{N}$ sont de signe différent. Le point (x_1, y_1, z_1) est réel lorsque la droite OA_0 rencontre l'hyperboloïde réel, il est imaginaire lorsqu'elle rencontre l'hyperboloïde imaginaire.

On appelle la surface (13) *surface principale.*

Désignant par m, n, p les cosinus des angles que fait avec les axes le rayon vecteur ρ_0, et U l'angle, variant de 0° à 180°, que fait la direction OA_0 avec la direction *correspondante* OB, on a :

$$\cos U = mm' + nn' + pp' = m\frac{x_0}{A} + n\frac{y_0}{B} + p\frac{z_0}{C} = \rho_0\left(\frac{m^2}{A} + \frac{n^2}{B} + \frac{p^2}{C}\right).$$

L'équation de la surface (11) pouvant être mise sous la forme :

$$\rho^2_1\left(\frac{m^2}{A} + \frac{n^2}{B} + \frac{p^2}{C}\right) = 1,$$

on trouve aisément :

$$(14) \qquad \cos U = \frac{\rho_0}{\rho_1^2},$$

en se rappelant toujours que ρ_0 est négatif lorsque ρ_1 est imaginaire.

On tire de là la valeur de k,

$$(15) \qquad k = \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \cos U}},$$

k étant réel lorsque ρ_1 est réel, ou lorsque cos U est positif, et imaginaire dans le cas contraire.

Appelons r la longueur réelle ou imaginaire de la normale Oa (fig. 2)

menée au plan qui est tangent en A_1 à la surface (13), on a

$$(16) \qquad r = \rho_1 \cos U = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \sqrt{\rho_0 \cos U} = \frac{1}{k}.$$

Prenons sur la direction OB (fig. 2) un point A′ (x',y',z'
imaginaire,

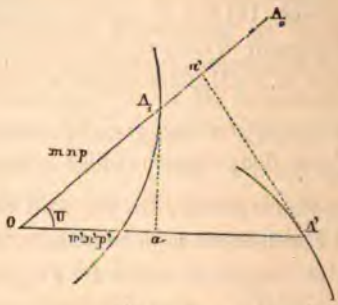


Fig. 2.

et tel que :

$$(17) \qquad OA' = \rho' = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \cos U}},$$

on a $m' = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{k}\frac{x_1}{A}$, et des expressions analogues pour n' e
tire :

$$(18) \qquad \begin{cases} \frac{m'}{r} = \frac{x_1}{A} = x' \\ \frac{n'}{r} = \frac{y_1}{B} = y' \\ \frac{p'}{r} = \frac{z_1}{C} = z'. \end{cases}$$

Élevant au carré, multipliant les trois équations par A, B, C,
membre à membre, il vient :

$$(19) \qquad Ax'^2 + By'^2 + Cz'^2 = \frac{x_1^2}{A} + \frac{y_1^2}{B} + \frac{z_1^2}{C} = 1.$$

Le lieu des points A′ est donc une surface du 2e degré qui
lipsoïde lorsque A, B, C sont de même signe ; un hyperboloïde,
deux hyperboloïdes conjugués, l'un réel et l'autre imaginair
A, B, C sont de signe différent. Il est aisé de voir que cette su
autre que celle qui, rapportée à trois axes rectangulaires qu

nie par l'équation (9), car $\rho_0 \cos U$ est le $\mathcal{M}$ correspondant à la
n $(m'n'p')$.

xes de la surface (19) sont dirigés comme ceux des surfaces
13). Elle est un ellipsoïde lorsque la surface principale (13) est
soïde, un hyperboloïde lorsque celle-ci est un hyperboloïde. On
e *surface inverse;* la longueur d'un axe de cette surface est l'in-
e celle de l'axe de la surface principale qui a la même direction.

an tangent à la surface inverse au point, réel ou imaginaire
a pour équation, en remplaçant x', y', z' par $\frac{x_1}{A}, \frac{y_1}{B}, \frac{z_1}{C}$:

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 = 1;$$

onc normal à la droite OA_1 allant de l'origine au point $(x_1 y_1 z_1)$.
leurs, si a' est le point où le plan tangent vient rencontrer OA,

$$Oa' = \rho' \cos U,$$

ause de $\rho' = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \cos U}}$,

$$Oa' = \frac{\cos U}{\sqrt{\rho_0 \cos U}} = \sqrt{\frac{\cos U}{\rho_0}} = \frac{1}{\rho_1}.$$

exions générales. — On verra dans les chapitres suivants que
orie qui vient d'être exposée s'applique à l'étude d'un assez
nombre de phénomènes physiques. On aurait pu, comme on
d'ordinaire, montrer, pour chaque phénomène particulier, dé-
ion, élasticité, propagations calorifique et lumineuse, etc.,
ent s'introduit la considération de l'ellipsoïde. On a préféré en
objet d'une théorie générale pouvant s'appliquer ensuite à tous
s particuliers. Non seulement on a ainsi l'avantage d'abréger
ition, mais encore, ce qui est bien plus important, on arrive à
une idée plus philosophique du rôle que joue l'ellipsoïde
a physique mathématique.

rôle me semble ne pouvoir être plus justement comparé qu'à
e l'indicatrice dans l'étude des surfaces. L'existence d'une ellipse
rice est une simple conséquence de la continuité de la surface;
e donne aucun renseignement sur la vraie nature de celle-ci et
causes qui l'ont produite; elle n'a d'autre utilité que d'en faci-

liter l'étude. De même l'existence d'un ellipsoïde d'élasticité simple conséquence de l'hypothèse de la continuité du milieu thèse qui n'est elle-même exacte que dans certaines limites. L'e de cet ellipsoïde simplifie beaucoup l'étude des propriétés élá du milieu, mais elle est entièrement indépendante de la loi des intermoléculaires.

Si les limites dans lesquelles on doit se renfermer ici ne s' saient, il serait aisé d'aller plus loin et de montrer que ce q convenu d'appeler *physique mathématique* n'est au fond que l'ét propriétés mathématiques imposées aux phénomènes par la co supposée du milieu. Aussi, toutes les théories que l'on a coutume d' séparément, comme celles de l'élasticité, de la chaleur, etc., sont-el stantiellement identiques et ne diffèrent-elles guère que verbal Presque toute loi trouvée dans l'étude des phénomènes de prop de la chaleur, par exemple, peut, lorsqu'on a dressé une cor dance convenable des termes, se transformer en une loi relati phénomènes élastiques et inversement.

Il m'a paru intéressant d'appuyer sur une vérité qui a été nue, même par de grands esprits. L'illustre Lamé, auquel la de la chaleur et celle de l'élasticité doivent de si importants p en attibuait les évidentes analogies à l'harmonie mystérieuse d qui régissent la matière, et cherchait même à en tirer une e tion des formes cristallines des corps; oubliant, il me semble n'est pas plus possible de deviner le mode d'activité de la matiè de le déduire des trois ou quatre concepts généraux qui form fond de toutes les spéculations mathématiques.

NOMÈNES QUI SE RAPPORTENT A LA COHÉSION

CHAPITRE II

ÉLASTICITÉ[1]

§ I. — DÉFORMATION DES SOLIDES

oumet un corps solide à des forces extérieures, celui-ci subit
rmation, et lorsque cette déformation est devenue perma-
s'est établi un certain équilibre entre les forces extérieures
es intérieures moléculaires qui ont subi à cet effet des modi-
convenables sous l'influence de la déformation même. Si cette
on est très petite, lorsque les forces extérieures sont suppri-
forces intérieures reprennent leur première valeur et le corps
a première forme. On dit alors que l'élasticité du corps est
eu.

rmation d'un corps quelconque, et plus particulièrement d'un
stallisé sous l'influence de forces extérieures est de deux na-
Il y a déformation du système réticulaire formé par les cen-
ravité des molécules; 2° il y a déformation ou rotation de la
autour de son centre de gravité. Ces deux déformations sont
ent liées l'une à l'autre, de telle façon que si la première est

suis principalement aidé, dans la rédaction de ce chapitre, des beaux tra-
B. de Saint-Venant. [*Mémoires divers*, insérés dans le *Journal de mathé-*
et *Notes et appendices* contenus dans la nouvelle édition de Navier (1864).]

donnée, la seconde l'est aussi. Mais tandis que la première défor se traduit par des modifications observables dans la forme extérie corps, la seconde ne se traduit que par des modifications inobser d'une nature très complexe et très obscure, dans les propriétés ques du corps. La relation qui lie ces deux déformations est d'a complètement inconnue.

Laissant de côté la déformation moléculaire, nous ne nous o rons que de la déformation réticulaire au moyen de laquelle nou nirons la déformation complète du corps. La déformation réti s'exprime par le déplacement qu'ont subi les nœuds. Ce déplac est une fonction continue des coordonnées du nœud par rapport axes fixes. Cette fonction continue assigne des valeurs aux dé ments fictifs des points situés entre les nœuds, et l'on peut s tuer au milieu discontinu un milieu fictif continu, dont le déplac est exprimé par la fonction précédente.

Définition de la déformation réticulaire. — Ellipsoïde de mation. — Supposons donc un corps solide ayant subi une déforn quelconque. Un point qui était primitivement en O et que l'on pour origine des coordonnées, es occuper la position O_1 et les p tions de son déplacement sont u, Un point B très voisin de O, et les coordonnées sont x', y', z' (x' étant très petits), vient en B_1; projections du déplacement BB_1 $u + du$, $v + dv$, $w + dw$. S donne à tout le corps une trans

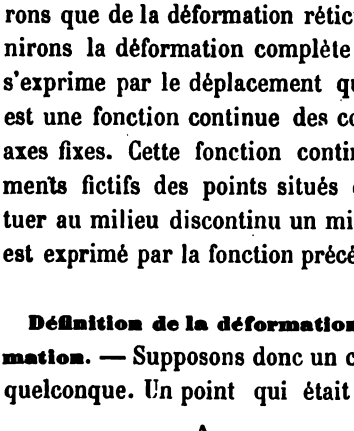


Fig. 3.

égale, parallèle et contraire au déplacement de O, le point B pr position A (x, y, z) et le déplacement de B par rapport à O suppos a pour projections du, dv, dw. Il est évident que OA et OB se tro dans les relations convenables pour appliquer la théorie génér chapitre précédent. Lorsque B décrit une sphère, A décrit donc un soïde, ou, en d'autres termes, si l'on considère la déformation d'un solide dans un très petit rayon autour d'un point O quelconque, les qui se trouvaient avant la déformation sur une sphère décrite de O c centre, se trouvent, après la déformation, sur un certain ellipso est clair d'ailleurs qu'on ne se trouve pas ici dans le cas de l'é symétrique, car, la déformation étant quelconque, on peut tor

autour d'une certaine droite, ce qui donne aux deux directions de le la torsion des propriétés différentes.

peut, dans l'espèce, établir immédiatement les relations linéaires ent les coordonnées x, y, z de A aux coordonnées x', y', z' de B. en effet :

$$x = x' + du = \left(1 + \frac{du}{dx}\right) x' + \frac{du}{dy} y' + \frac{du}{dz} z'$$

$$y = y' + dv = \frac{dv}{dx} x' + \left(1 + \frac{dv}{dy}\right) y' + \frac{dv}{dz} z'$$

$$z = z' + dw = \frac{dw}{dx} x' + \frac{dw}{dy} y' + \left(1 + \frac{dw}{dz}\right) z'.$$

comparant ces équations avec les équations (3) du chapitre I , on voit que :

$$\mathcal{N}_x = 1 + \frac{du}{dx}, \qquad \mathcal{N}_y = 1 + \frac{du}{dy}, \qquad \mathcal{N}_z = 1 + \frac{dv}{dz},$$

$$\mathcal{T}_{yx} = \frac{du}{dy}, \qquad \mathcal{T}_{xy} = \frac{dv}{dx},$$

$$\mathcal{T}_{zx} = \frac{du}{dz}, \qquad \mathcal{T}_{xz} = \frac{dw}{dx},$$

$$\mathcal{T}_{zy} = \frac{dv}{dz}, \qquad \mathcal{T}_{yz} = \frac{dw}{dy}.$$

suppose maintenant *très petites* toutes les différentielles partiel- e u, v, w par rapport à x, y, z, et on va chercher quel est, dans ce articulier, la signification physique de ces divers coefficients.

l'on suppose que le point B (x', y', z') est pris sur l'axe des x, à-dire si l'on fait $y' = 0$ et $z' = 0$, les coordonnées du point A cor ondant, que l'on désignera pour éviter la confusion par x_x, y_x, z_x, nt

$$x_x = x' \mathcal{N}_x, \qquad y_x = x' \mathcal{T}_{xy}, \qquad z_x = x' \mathcal{T}_{xz}.$$

dilatation de l'unité de longueur suivant l'axe des x est, pour les s de l'axe des x,

$$\delta_x = \frac{x_x - x'}{x'} = \mathcal{N}_x - 1 = \frac{du}{dx},$$

$$\mathcal{N}_x = 1 + \delta_x.$$

On trouverait de même :

$$\mathcal{H}_y = 1 + \delta_y \quad \text{et} \quad \mathcal{H}_z = 1 + \delta_z.$$

Pour trouver la signification physique de $\mathcal{T}$ on remarque d'a
que :

$$\mathcal{T}_{xy} = \frac{y_x}{x'}.$$

Soit A_x (fig. 4) la projection, sur le plan des xy d'un point A
respondant d'un point pris sur
des x. L'angle $x0A_x$ est très petit,
que la distance qui sépare deux p
correspondants A et B est un i
ment petit du deuxième ordre.

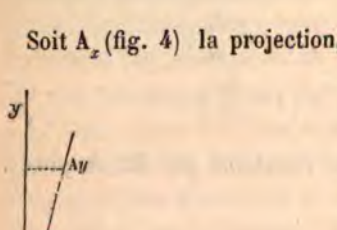


Fig. 4.

La distance de A_x à O_x est $\mathcal{Y}$
aura donc :

$$\text{angle } x0A_x = \frac{y_x}{x},$$

ou, puisque x et x' ne diffèrent que d'un infiniment petit du deu
ordre,

$$\text{angle } x0A_x = \frac{y_x}{x'} = \mathcal{T}_{xy}.$$

Les angles seront positifs lorsqu'ils seront comptés des x positi
y positifs, négatifs dans le sens contraire.

Si l'on projette de même en A_y sur le plan des xy un point A c
pondant à un point pris sur l'axe de y, on aura :

$$\text{angle } y0A_y = \frac{x_y}{y'} = \mathcal{T}_{xy}.$$

Les angles seront encore positifs lorsqu'ils seront comptés des y
tifs aux x positifs et négatifs dans le sens contraire.

On a donc :

$$90^\circ - A_x0A_y = x0A_x + y0A_y.$$

La différence

$$\text{angle } x0y - \text{angle } A_x0A$$

diminution subie après la déformation par l'angle des axes coor-
ès x et y. En appelant α_z cette diminution, on aura :

$$\alpha_z = x\mathrm{OA}_x + y\mathrm{OA}_y = \mathcal{T}_{xy} + \mathcal{T}_{xy} = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}.$$

sque les axes seront rectangulaires, α_z pourra être considéré aussi
e la diminution du dièdre rectangle formé par les deux plans
onnés xz et yz.

aura de même pour les variations du dièdre dont les arêtes sont
èles aux x et aux y

$$\alpha_y = \mathcal{T}_{xz} + \mathcal{T}_{zx} = \frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx},$$
$$\alpha_x = \mathcal{T}_{zy} + \mathcal{T}_{zy} = \frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dy}.$$

équations (4) et (6) du chapitre I (page 8) donnent immédiatement,
ntroduisant les δ et les α :

$$(1) \qquad \delta_\xi = \begin{cases} m^2_\xi\,\delta_x + n^2_\xi\,\delta_y + p^2_\xi\,\delta_z \\ + n_\xi\,p_\xi\,\alpha_x + m_\xi\,p_\xi\,\alpha_y + m_\xi\,n_\xi\,\alpha_z. \end{cases}$$

$$(2) \qquad \alpha_\xi = 2\begin{cases} m_\xi\,m_\eta\,\delta_x \\ + n_\xi\,n_\eta\,\delta_y \\ + p_\xi\,p_\eta\,\delta_z \end{cases} + \begin{cases} (m_\eta\,n_\xi + m_\xi\,n_\eta)\,\alpha_z \\ + (m_\eta\,p_\xi + m_\xi\,p_\eta)\,\alpha_y \\ + (n_\eta\,p_\xi + p_\eta\,n_\xi)\,\alpha_x. \end{cases}$$

uation (7) (page 9) devient :

$$1 = x^2\,\delta_x + y^2\,\delta_y + z^2\,\delta_z + xy\,\alpha_z + xz\,\alpha_y + yz\,\alpha_x.$$

l'équation d'une surface du second degré dont les rayons vec-
ont égaux à $\frac{1}{\sqrt{\delta_\xi}}$. Cette surface est un ellipsoïde si les δ_x, δ_y, δ_z,
ositifs. Dans ce cas, toutes les dilatations sont donc positives. Si
es dilatations δ_x, δ_y, δ_z est d'un signe contraire à celui des deux
la surface se compose de deux hyperboloïdes conjugués. L'un
ond aux dilatations négatives, l'autre aux dilatations positives.
e asymptotique commun à ces deux hyperboloïdes comprend

toutes les directions pour lesquelles la dilatation est nulle, e quelles ne correspondent que des déplacements tangentiels. Les de ces hyperboloïdes conjugués sont les directions pour lesquelle sont nuls, c'est-à-dire que ce sont les droites auxquelles corresp les axes de l'ellipsoïde de déformation.

La grandeur du petit volume $dxdydz$ est devenue, après la dé tion, $dx(1+\delta_x).dy\ (1+\delta_y).dz(1+\delta_z)$. ou, à cause de la pe de δ, $dxdydz.\ (1+\delta_x+\delta_y+\delta_z)$, La somme $\delta_x+\delta_y+\delta_z=\mathrm{B}$ es la dilatation de l'unité de volume. Cette somme est constante, que soient les axes coordonnés choisis, comme cela doit nécessaireme et comme il est facile de le déduire de la constance de $\mathcal{H}_x+\mathcal{H}_y$ (page 8).

En employant le même genre de notations symboliques q page 9, on peut poser :

$$\delta_x=d_{xx}=d_x\,d_x,$$
$$\alpha_{xy}=2d_{xy}=2d_x\ d_y,$$

et les deux formules (1) et (2) sont représentées par la formule s lique unique :

$$d_{\xi\eta}=(m_\xi\,d_x+n_\xi\,d_y+p_\xi\,d_z)\ (m_\eta\,d_x+n_\eta\,d_y+p_\eta\,d_z),$$

dans laquelle il est loisible d'intervertir l'ordre des facteurs, pu $d_{xy}=d_{yx}$, et dans laquelle ξ et η représentent deux coordonnées conques qui peuvent être identiques.

En posant symboliquement :

$$d_\xi=m_\xi\,d_x+n_\xi\,d_y+p_\xi\,d_z,$$

on peut donc écrire :

$$d_{\xi\eta}=d_\xi\,d_\eta.$$

Conditions pour que six quantités puissent représenter le les α caractéristiques d'une certaine déformation. — Les six tités δ et α, fonctions de x, y, z, dépendant des différentielles part de trois quantités u, v, w, ne sont pas complètement arbitrai doit donc y avoir entre les différentielles de ces six fonction relations exprimant qu'elles sont susceptibles de représenter la d

n corps. Il est très aisé de trouver ces relations en élimi- la différentiation, u, v, w entre les six équations qui don- aleurs des δ et des α en fonction des différentielles partielles .

orte dans l'expression de α_z les valeurs de u et v déduites de δ_x et δ_y, on a :

$$\alpha_z = \frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dy}\int \delta_x\, dx + \frac{d}{dx}\int \delta_y\, dy.$$

ërentiant deux fois par rapport à dx et dy, on a la première équations ci-dessous, dont les deux autres s'obtiennent d'une analogue :

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d^2\alpha_z}{dxdy} &= \frac{d^2\delta_x}{dy^2} + \frac{d^2\delta_y}{dx^2}, \\ \frac{d^2\delta_y}{dydz} &= \frac{d^2\delta_x}{d^2z} + \frac{d^2\delta_z}{dx^2}, \\ \frac{d^2\delta_x}{dydz} &= \frac{d^2\delta_y}{dz^2} + \frac{d^2\delta_z}{dy^2}. \end{aligned}\right.$$

n prend les différentielles $\frac{d\alpha_z}{dz}$, $\frac{d\alpha_y}{dy}$, $\frac{d\alpha_x}{dx}$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_z}{dz} &= \frac{d^2u}{dz\,dy} + \frac{d^2v}{dz\,dx}, \\ \frac{d\alpha_y}{dy} &= \frac{d^2u}{dy\,dz} + \frac{d^2w}{dy\,dx}, \\ \frac{d\alpha_x}{dx} &= \frac{d^2v}{dx\,dz} + \frac{d^2w}{dx\,dy}; \end{aligned}$$

on tire :

$$2\frac{d^2u}{dzdy} = \frac{d\alpha_z}{dz} + \frac{d\alpha_y}{dy} - \frac{d\alpha_x}{dx}.$$

iffèrentiant les deux membres de cette équation par rapport à dx, arquant que $\frac{d^2u}{dzdydx} = \frac{d^2\delta_z}{dydz}$, on obtient la première des trois ons ci-dessous, dont les deux autres s'obtiennent de la même :

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 2\frac{d^2\delta_x}{dydz} &= \frac{d}{dx}\left(\frac{d\alpha_y}{dy}+\frac{d\alpha_z}{dz}-\frac{d\alpha_x}{dx}\right),\\ 2\frac{d^2\delta_y}{dxdz} &= \frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha_x}{dx}+\frac{d\alpha_z}{dz}-\frac{d\alpha_y}{dy}\right),\\ 2\frac{d^2\delta_z}{dxdy} &= \frac{d}{dz}\left(\frac{d\alpha_x}{dx}+\frac{d\alpha_y}{dy}-\frac{d\alpha_z}{dz}\right).\end{aligned}\right.$$

Les deux systèmes d'équations (3) et (4) expriment des conditions de compatibilité nécessaires, auxquelles doivent satisfaire, pour un corps quelconque déformé, les six fonctions δ et α représentant une déformation, très petite autour de chaque point.

§ II. — FORCES ÉLASTIQUES.

Ellipsoïde d'élasticité. — Si dans un solide déformé et en équilibre on considère un certain plan P (fig. 4) qui le divise en deux parties M et N, la suppression de la partie N troublerait l'équilibre qui ne pourrait être rétabli qu'en appliquant sur les divers points du plan P des forces convenables. Les forces qu'il faudra appliquer sur les points d'un petit élément de surface ω pris sur ce plan et contenant le point O, seront sensiblement parallèles et égales; elles donneront donc une résultante parallèle et égale à leur somme, c'est-à-dire proportionnelle à l'aire ω. Cette résultante F, divisée par ω, ou $\frac{F}{\omega}$ est ce que l'on appelle la *force élastique* exercée au point O. Si OA représente en grandeur et en direction $\frac{F}{\omega}$, et si l'on prend sur une normale au plan P, menée en O, une longueur OB représentant la grandeur de l'aire ω, le point A et le point B sont liés entre eux de la même manière que les points A et B du chapitre I. Lorsque B décrit une sphère, A décrit une ellipsoïde, ou, en d'autres termes, les forces élastiques exercées sur les divers plans qui se coupent en un même point, sont représentées en grandeur et en direction par les rayons vecteurs d'un certain ellipsoïde.

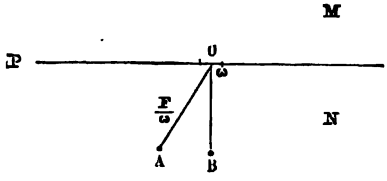


Fig. 4.

tion qui vient d'être donnée de la force élastique est très
is elle ne donne pas une idée nette des actions qui concou-
endrer cette force. Dans un sujet aussi délicat et sur tous
duquel les savants ne sont pas même entièrement d'accord,
de ne laisser dans l'esprit aucune ambiguïté, et il paraît
de scruter de plus près l'une des notions fondamentales
ontre au début de la théorie.

élastique, définie comme elle l'a été plus haut, est évidem-
certaine résultante des actions que les dernières parties du
allin exercent mutuellement les unes sur les autres. Or on
n corps cristallisé est nécessairement constitué par des molé-
tiques entre elles et groupées de manière que les centres
ou des points analogues quelconques de ces molécules for-
ystème réticulaire. Chaque molécule est formée à son tour
ore fini ou infini de petites portions de matière qui peuvent
e identiques entre elles, dont on peut toujours supposer les
s assez petites pour pouvoir être négligées, et que nous
ns les atomes.

e le corps est en équilibre, il y a équilibre entre les centres
e des molécules, et il y a aussi équilibre dans l'intérieur de
olécule, entre les atomes qui la composent. Il faut ajouter
entres de gravité des molécules sont nécessairement immo-
il serait impossible d'imaginer *pour un point* un mode vibra-
conservât au système réticulaire la symétrie accusée par les
nes de la cristallisation. On ne pourrait concevoir autre chose
uccession rapide de vibrations dans tous les sens qui annulerait
e de la symétrie de la molécule et ferait disparaître la cause
la symétrie du réseau. Les atomes, dans l'intérieur de la mo-
euvent au contraire vibrer, car il suffit, pour sauvegarder la
, que des atomes identiques aient des vibrations identiques sui-
différents axes et les différents plans de symétrie de même nature.
tème réticulaire et la molécule sont séparément en équilibre,
quilibre de l'un est intimement lié à celui de l'autre. On peut
borner à étudier l'équilibre du système réticulaire; c'est du
seul que l'on puisse étudier aisément, car les forces méca-
xtérieures, au moyen desquelles nous pouvons modifier la forme
ps, agissent exclusivement sur le système réticulaire, et n'ont
molécule qu'une action indirecte dont nous ignorons entière-
mécanisme.

L'équilibre du système réticulaire est déterminé par les
tuelles des nœuds de ce système ; mais ces actions mutuelle
encore les considérer comme s'exerçant entre deux nœuds
droite qui les joint, ne peuvent plus être regardées comme
la distance seule des deux nœuds, puisque, cette distance r
stante, les actions peuvent varier par suite de la déformatio
cules dont les nœuds sont les centres de gravité.

Si on mène par un point O quelconque de ce milieu, un
le sépare en deux portions M et N ; on prend dans le pl
de O, une surface ω' infiniment petite, même par rapport à
qui sépare deux nœuds voisins. On prend dans la partie M d
nœud quelconque m et dans la partie N un nœud n tel que
traverse l'aire ω'. Par suite des actions élastiques que
la déformation supposée du milieu, le nœud n exerce sur
une force dirigée suivant mn, et fonction de la distance mn.
m à tous les nœuds de N tellement placés que la ligne q
à m traverse ω', les forces exercées par ces nœuds sur m
résultante qui passera par m, et dont la direction traverse
certain point μ auquel on pourra la supposer appliquée. Si
tue successivement à m, dans la construction précédente, tou
de M, susceptibles d'être sollicités par les actions émanant
de N, toutes les résultantes appliquées en ω' viendront se co
points infiniment peu distants les uns des autres, et pourro
sidérées comme donnant une résultante unique R appliqué
l'on prend tout autour de ω' des aires égales, chacune de
pourra être considérée comme sollicitée par une résultan
parallèle à R. Si donc on prend une aire ω infiniment petite
vue physique, mais très grande par rapport à ω', chacun des é
de cette surface est sollicité par une force R, et l'aire totale
être considérée comme sollicitée par une résultante para
et dont la grandeur contient autant de fois R que ω renferme
c'est-à-dire que ω est sollicité par une force représentée par
une certaine force fictive qui serait appliquée sur l'unité de
point P, au point O autour duquel a été tracée l'aire ω.

Si l'on prend sur une normale au plan P menée en O une
représentant ω, et si l'on prend sur la direction de la rés
une longueur proportionnelle à F, ces deux longueurs sont bi
il a été déjà dit plus haut, dans les relations réciproques
s'applique la théorie générale du chapitre I. On se trouve d'ail

as de l'égalité symétrique, car, en vertu de l'égalité de l'action et la réaction, les actions moléculaires, dont la force ωF est la résulte sont égales et contraires suivant les deux directions opposées ne même droite.

Les équations (3′) du chapitre I donnent immédiatement, en y remçant, pour éviter la confusion, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, $\mathcal{Z}$ par X, Y, Z et les $\mathcal{N}$ et $\mathcal{T}$ par N et T :

$$(3)\quad \begin{cases} X = m' N_x + n' T_z + p' T_y, \\ Y = m' T_z + n' N_y + p' T_x, \\ Z = m' T_y + n' T_x + p' N_z. \end{cases}$$

, Y, Z sont les composantes de la force élastique F qui s'exerce sur e plan dont la normale fait avec les axes des angles ayant respectivement pour cosinus m', n', p' ; N_z, T_z, T_y sont les composantes, suivant es axes coordonnés des x, y, z de la force élastique qui s'exerce sur le plan des yz normal aux x ; T_z, N_y, T_x sont les composantes de la force élastique qui s'exerce sur le plan des zx normal aux y ; T_y, T_x, N_z sont les composantes de la force élastique qui s'exerce sur le plan des xy normal aux z.

L'égalité du coefficient de n' dans X, et du coefficient de m' dans Y, montre que la composante suivant les y de la force élastique qui s'exerce sur le plan normal aux x, est égale à la composante suivant les x de la force élastique qui s'exerce sur le plan normal aux y.

On démontrerait directement ce théorème en isolant dans le corps un petit prisme dont les arêtes dx, dy, dz seraient parallèles aux axes coordonnés. Ce prisme (*fig.* 5) est en équilibre sous l'action de forces élastiques qui s'exercent sur ses faces, et, autour de l'axe des z, il est sollicité à tourner par deux couples, l'un ayant pour bras de levier dy, et pour force $dx\,dz\,T_{yx}$, l'autre ayant pour bras de levier dx, et pour force $dy\,dz\,T_{xy}$; l'équilibre exige donc :

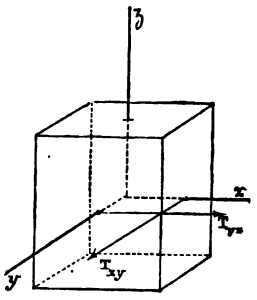


Fig. 5.

$$dy.dxdz\ T_{yx} = dx.dydz\ T_{xy},$$

ou :

$$T_{yx} = T_{xy}.$$

L'*ellipsoïde d'élasticité* étant rapporté à ses axes, a pour éq

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1,$$

en appelant A, B, C les composantes normales des forces
qui s'exercent sur les plans perpendiculaires aux axes de l'el

On sait (voir pages 14 et suiv.) comment, au moyen de
principale dont l'équation est :

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1,$$

on peut déterminer le plan sur lequel s'exerce une force él
direction donnée ou réciproquement. Lorsque A, B, C sont de m
c'est-à-dire lorsque les plans perpendiculaires aux axes de l'
subissent des pressions normales de même sens, ou lorsque
sont tous tirés ou tous pressés, la surface principale est un
Dans le cas contraire ce sont deux hyperboloïdes conjugués.
tangents au cône asymptotique commun à ces deux hyperbol
des plans sur lesquels ne s'exerce aucune composante norma

Pour les composantes des forces élastiques qui s'exercen
trois plans d'un trièdre trirectangle dont les directions des a
désignées respectivement par ξ, η, ζ, les formules (4) et (5
pitre I (page 8) donnent immédiatement :

$$(4)\qquad N_\xi=\begin{cases} m^2\xi N_x+n^2\xi N_y+p^2\xi N_z \\ +2m_\xi n_\xi T_z+2m_\xi p_\xi T_y+2n_\xi p_\xi T_x. \end{cases}$$

$$(5)\qquad T_\zeta=\left\{\begin{array}{l} m_\xi m_\eta N_x \\ +n_\xi n_\eta N_y+ \\ +p_\xi p_\eta N_z \end{array}\right.\left\{\begin{array}{l} (m_\eta n_\xi+m_\xi n_\eta)T_z \\ +(m_\eta p_\xi+m_\xi p_\eta)T_y \\ +(n_\eta p_\xi+n_\xi p_\eta)T_z \end{array}\right.$$

§ III. — RELATIONS ENTRE LES FORCES ÉLASTIQUES ET LA DÉFO

Coefficients élastiques. — On isole, par la pensée, dans l
du milieu, un petit prisme rectangle dont les arêtes infinime
dx, dy, dz sont, avant la déformation, parallèles aux axes co
Sur chaque face du prisme déformé on peut supposer appliquées
élastiques correspondantes sous l'action desquelles le prisme es

libre. La déformation du prisme est connue si l'on donne les longueurs très petites δ_x, δ_y, δ_z qui représentent les dilatations de l'unité de longueur suivant les axes coordonnés, et les angles très petits α_x, α_y, α_z dont ont varié les dièdres ayant dx, dy, dz pour arêtes respectives, pourvu qu'on y ajoute la petite rotation qu'il faut donner au milieu tout entier pour amener les axes de l'ellipsoïde de déformation en contact avec leurs droites correspondantes.

Ce dernier mouvement de rotation laissant aux molécules du corps leurs positions relatives ne développe aucune force élastique. On peut donc, lorsqu'il s'agit de déduire les forces élastiques de la déformation qui les engendre, négliger ce mouvement de rotation et considérer la déformation comme complètement définie par les δ et les α.

Si l'on ne considère que des déformations suffisamment petites, on peut regarder les forces élastiques comme proportionnelles à la déformation, et l'expression de chaque composante de la force élastique comme composée de 6 termes dont chacun est formé d'un facteur constant, ou ne dépendant que de la configuration du milieu au point considéré, qui multiplie une des 6 quantités δ_x, δ_y, δ_z, α_x, α_y, α_z.

Pour la symétrie des formules, on convient d'appeler :

A_x	le coefficient de	δ_x	dans	N_x,
A_y	—	δ_y	—	N_y,
A_z	—	δ_z	—	N_z,
B_{xy}	—	δ_y	—	N_x,
B_{yx}	—	δ_x		N_y
B_{zy}	—	δ_y	—	N_z
etc.		.		.
.		.		.

C_x, D_x, F_x,	les coefficients respectifs de	α_x, α_y, α_z	dans	N_x,
C_y, D_y, F_y	—	—	—	N_y
C_z, D_z, F_z	—	—	—	N_z
C'_x, C'_y, C'_z	les coefficients respectifs de	δ_x, δ_y, δ_z	dans	T_x
D'_x, D'_y, D'_z	—	—	—	T_z
F'_x, F'_y, F'_z	—	—	—	T_y

$\mathcal{A}_x$	le coefficient de	α_x	dans T_x
$\mathcal{A}_y$	—	α_y	T_y

$\mathcal{A}_z$ le coefficient de α_z dans T_z

$\mathcal{B}_{xy}$ — α_y — T_x

$\mathcal{B}_{yx}$ — α_x — T_y

$\mathcal{B}_{xz}$ — α_z — T_x

etc. . .

. . .

Les forces élastiques qui s'exercent sur tous les plans p
l'origine des coordonnées étant connues lorsqu'on donne les
santes N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z, et l'expression de chacune de
santes contenant 6 coefficients, il faudra, dans le cas génér
36 coefficients pour qu'on puisse déduire les forces élasti
déformation qui les engendre.

Réduction des 36 coefficients élastiques à 21. — Mai
faire voir, avec Green, qu'il n'y a, en réalité, que 21
distincts au plus.

Les forces élastiques qui s'exercent sur les faces d'un pe
rectangle dont les arêtes, parallèles aux axes coordonnés, s
à dx, dy, dz, ont produit, pendant une déformation très petit
tain travail mécanique. Il est facile d'en trouver l'accroissemen
tiel. En effet, à une variation $dx\,d\delta_x$ de la distance des deux
prisme sur lesquelles s'exerce la pression normale $dydz\,N_x$, c
un travail $dxdydz\,N_x\,d\delta_x = \varpi\,N_x\,d\delta_x$, en désignant par ϖ le v
prisme. A une rotation angulaire $d\mathcal{C}_{zy}$ du plan zx autour de l'
correspond un déplacement $dz\,d\mathcal{C}_{zy}$ du point d'application,
$dxdy\,T_x$, et par conséquent un travail $dzdxdy\,T_x\,d\mathcal{C}_{zy} = \varpi$
De même à un déplacement angulaire $d\mathcal{C}_{yz}$ du plan zy corre
travail $\varpi\,T_x\,d\mathcal{C}_{zy}$, et la somme de ces travaux est égale à $\varpi\,T_x$
$d\mathcal{C}_{yz} = \varpi\,T_x\,d\alpha_x$ (fig. 6).

L'expression de l'accroissement différentiel du travail, *r*
l'unité de volume, est donc :

$$d\Phi = N_x\,d\delta_x + N_y\,d\delta_y + N_z\,d\delta_z + T_x\,\alpha_x + T_y\,d\alpha_y + T_z\,d\alpha_z.$$

Mais le travail total Φ dont $d\,\Phi$ est la différentielle ne peut
tion que des δ et des α, c'est-à-dire qu'il dépend unique

de l'état initial et de l'état final du corps, et qu'il est indépendant des états intermédiaires. Il est facile de le démontrer.

On suppose que pendant la déformation le corps reste toujours en

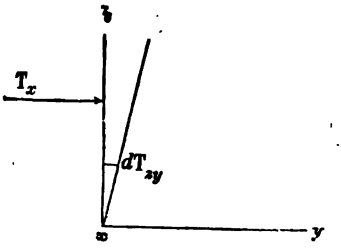


Fig. 6.

équilibre sous l'action antagoniste des forces extérieures et intérieures, et qu'en outre la température reste constante grâce à la présence d'un corps étranger qui fournit en entier à chaque instant la chaleur absorbée ou produite par la variation d'énergie intérieure. En passant de l'état initial indiqué par l'indice 0 à l'état final indiqué par l'indice 1, on a développé une quantité de travail égale à $\varpi(\Phi_1 - \Phi_0)$ (ϖ étant le volume du corps), et on a recueilli une quantité de chaleur égale à la différence $\varpi(U_1 - U_0)$ des énergies intérieures initiale et finale du corps. Si l'on ramène le corps à l'état initial en le faisant passer par une série de transformations différentes de celle qui a été réalisée d'abord, on devra fournir une quantité de chaleur précisément égale à $\varpi(U_1 - U_0)$, car l'énergie intérieure du corps ne dépend que de son organisation interne et de sa température. Quant au travail recueilli, il ne serait pas égal au travail dépensé dans la première série de déformations, si $\Phi_1 - \Phi_0$ ne dépendait pas uniquement des états initial et final; mais cette hypothèse est inadmissible, car si elle était exacte, on aurait, à la suite des deux séries inverses de déformations qui ramènent toutes choses à l'état initial, créé ou détruit du travail, ce qui est impossible.

On déduit de ce théorème que, dans l'expression de $d\Phi$, les N et les T sont les dérivées partielles du premier ordre par rapport aux δ et aux α d'une même fonction Φ. Les 36 coefficients qui entrent dans les expressions des N et des T sont ainsi les dérivées partielles du second ordre, par rapport aux δ et aux α, de cette fonction Φ. Il y a donc, entre ces 36 coefficients, des relations du genre de celle-ci :

$\frac{d^2\Phi}{dxdy}=\frac{d^2\Phi}{dydx}$. Le nombre de ces relations est égal à celui des c naisons deux à deux de six quantités, c'est-à-dire à quinz 36 coefficients se réduisent donc à 21 coefficients distincts au p

Il est aisé, d'après ce qui précède, de former les expressions tives des N et des T. On a en effet :

$$\frac{d\Phi}{d\delta_x}=T_x,\quad \frac{d^2\Phi}{d\delta_x\,d\delta_y}=B_{xy};\quad \frac{d\Phi}{d\delta_y}=T_y,\quad \frac{d\Phi}{d\delta_y d\alpha_x}=B_{yx}$$

et par conséquent

$$B_{xy}=B_{yx}.$$

On aura évidemment de même :

$$B_{xz}=B_{zx}\quad \text{et}\quad B_{yz}=B_{zy}.$$

On a encore :

$$\frac{d\Phi}{d\alpha_x}=T_x,\quad \frac{d^2\Phi}{d\alpha_x d\delta_x}=C'_x;\quad \frac{d^2\Phi}{d\delta_x}=N_x,\quad \frac{d^2\Phi}{d\delta_x d\alpha_x}=$$

et par conséquent :

$$C_x=C'_x.$$

On démontrerait de même que

$$D_x=D'_x,\quad F_x=F'_x,\quad C_y=C'_y,\ \text{etc.}$$

On a enfin :

$$\frac{d\Phi}{d\delta_x}=N_x,\quad \frac{d^2\Phi}{d\delta_x d\delta_y}=\mathscr{B}_{xy};\quad \frac{d\Phi}{d\alpha_y}=N_y,\quad \frac{d^2\Phi}{d\alpha_x d\alpha_y}=\mathscr{B}_y$$

et par conséquent

$$\mathscr{B}_{xy}=\mathscr{B}_{yx}.$$

On démontrerait de même que

$$\mathscr{B}_{xz}=\mathscr{B}_{zx}\quad \text{et}\quad \mathscr{B}_{yz}=\mathscr{B}_{zy}.$$

Si l'on convient, pour abréger l'écriture, de représenter B_{xy} par B_z, $\mathcal{B}_{xz}$ par $\mathcal{B}_y$, etc., les expressions définitives des N et des T seront en résumé :

$$(6)\quad \begin{cases} N_x = A_x\delta_x + B_z\delta_y + B_y\delta_z + C_x\alpha_x + D_x\alpha_y + F_x\alpha_z \\ N_y = B_z\delta_x + A_y\delta_y + B_x\delta_z + C_y\alpha_x + D_y\alpha_y + F_y\alpha_z \\ N_z = B_y\delta_x + B_x\delta_y + A_z\delta_z + C_z\alpha_x + D_z\alpha_y + F_z\delta_z \\ T_x = C_x\delta_x + C_y\delta_y + C_z\delta_z + \mathcal{A}_x\alpha_x + \mathcal{B}_z\alpha_y + \mathcal{B}_y\alpha_z \\ T_y = D_x\delta_x + D_y\delta_y + D_z\delta_z + \mathcal{B}_z\alpha_x + \mathcal{A}_y\alpha_y + \mathcal{B}_x\alpha_z \\ T_z = F_x\delta_x + F_y\delta_y + F_z\delta_z + \mathcal{B}_y\alpha_x + \mathcal{B}_x\alpha_y + \mathcal{A}_z\alpha_z. \end{cases}$$

Les coefficients A sont quelquefois appelés *élasticités directes* ou longitudinales; les B *élasticités latérales*, les $\mathcal{A}$ *élasticités tangentielles ou de rigidité;* les autres sont les *élasticités asymétriques.*

Les six lignes horizontales et les six lignes verticales du tableau formé par les seconds membres de ces équations sont respectivement identiques. Il en résulte évidemment que si l'on forme la somme

$$\delta_x\, dN_x + \delta_y\, dN_y + \delta_z\, dN_z + \alpha_x\, dT_x + \text{etc...},$$

le coefficient de $d\delta_x$, qui est la première ligne verticale du tableau, est égal à N_x. On a donc :

$$d\Phi = N_x d_x + \ldots\ldots = \delta_x\, dN_x + \delta_y\, dN_y + \ldots\ldots$$

On en déduit encore :

$$2d\Phi = d(N_x\delta_x) + d(N_y\,\delta_y) + \ldots\ldots + d(T_x\,\alpha_x) + \ldots\ldots$$

et par conséquent en appelant Φ_1 le travail total produit par la déformation et rapporté à l'unité de volume,

$$2\Phi_1 = \Sigma N_x\,\delta_x + \Sigma T_x\,\alpha_x.$$

Formules symboliques donnant les expressions des N et T. — On peut donner aux expressions des N et T une forme symbolique remar-

quable, en employant un système de notations analogue à celui d
a fait usage pages 9 et 24. On pose les expressions symboliqu

$$N_x = p_{xx} = p_x\, p_x, \qquad T_x = p_{yz} = p_y\, p_z,$$
$$P_\xi = m_\xi\, p_x + n_\xi\, p_\eta + p_y\, p_z,$$

analogues à celles de la page 9; on remplace les δ et les α p
symboles de la page 24, et on convient de désigner par a_{xyyz} le
ficient de d_{yz} ou $\frac{1}{2}\alpha_x$ dans P_{xy} ou T_ζ; en convenant toujours qu
aura l'expression symbolique

$$a_{xyyz} = a_x\, a_y\, a_y\, a_z.$$

Les expressions (6) peuvent être alors remplacées par la fo
générale :

$$p_{xy} = a_{xy}(a_{xx}\, d_{xx} + a_{yy}\, d_{yy} + \ldots + 2a_{xy}\, d_{xy} + \ldots)$$
$$= a_{xy}(a_x\, d_x + a_y\, d_y + a_z\, d_z)^2,$$

formule dans laquelle x et y sont des coordonnées quelconque
peuvent être identiques, et dans laquelle il est permis d'invers
deux facteurs. On remarquera que le deuxième facteur est con
quel que soit p_{xy}. Si l'on pose d'une manière générale

$$p_x = a_x(a_x\, d_x + a_y\, d_y + a_z\, d_z),$$

on pourra encore écrire :

$$p_{xy} = p_x\, p_y.$$

Si l'on applique ces formules à une coordonnée prise par rap
des axes rectangulaires quelconques ξ, η, ζ, on aura :

$$p_\xi = a_\xi(a_\xi\, d_\xi + \ldots), \qquad p_{\xi\eta} = p_\xi\, p_\eta.$$

On se propose maintenant de chercher les coefficients a, qu
viennent aux axes ξ, η, ζ, quand on connaît ceux qui convi
aux axes x, y, z. Pour y arriver, dans l'expression :

$$p_\xi = m_\xi\, p_x + n_\xi\, p_y + q_\xi\, p_z$$

déduite de la formule de la page 9, en remplaçant $\mathcal{P}$ par p, on remplace p_x, p_y, p_z, par leurs valeurs en d_x, d_y, d_z, on a :

$$p_\xi = (m_\xi a_x + n_\xi a_y + p_\xi a_z)\,(a_x d_x + a_y d_y + a_z d_z),$$

ormule qui s'identifie avec la valeur précédente de p_ξ, si l'on pose

$$a_\xi = m_\xi a_x + n_\xi a_y + p_\xi a_z,$$

c'est-à-dire si l'on admet que a_ξ est la projection sur l'axe ξ de la force symbolique a, dont les composantes sont a_x, a_y, a_z. Le second facteur du deuxième membre devient alors en effet, dans les deux équations, le travail de la force a correspondant au déplacement symbolique d dont les projections sont d_x, d_y, d_z.

La formule générale de transformation cherchée est donc

$$a_{\xi\eta\xi\zeta} = a_\xi\, a_\eta\, a_\xi\, a_\zeta,$$

dans le deuxième membre de laquelle il faut remplacer les expressions a_ξ, a_η par leurs valeurs symboliques en a_x, a_y, etc.

Forces élastiques dans les milieux qui possèdent des éléments de symétrie. — Quelle que soit la nature des éléments de symétrie qui se rencontrent dans la structure du milieu considéré, on ne peut rien en déduire touchant la position ou la grandeur relative des axes des ellipsoïdes de déformation ou d'élasticité. En effet, les δ et les α, les N et les T ne dépendent pas seulement de la nature du milieu, mais encore des causes extérieures, plus ou moins dissymétriques, qui déforment le corps et mettent en jeu son élasticité.

Les coefficients qui entrent dans les expressions des N et des T sont au contraire indépendants des δ et des α, et ne dépendent que de la nature du milieu ; ils doivent donc être affectés par la symétrie de celui-ci.

Plan de symétrie. — Système binaire. — Supposons, par exemple, qu'il y ait dans le milieu un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe des z. Si l'on imagine une déformation telle que l'ellipsoïde de déformation ait l'axe des z pour l'un de ses axes, on aura $\alpha_z = 0$, $\alpha_y = 0$. Le plan des zy étant de symétrie pour l'ellipsoïde de déformation et pour le milieu, on se trouve ramené au cas examiné dans le chapitre I,

et l'ellipsoïde d'élasticité admettra le même plan de symétrie. donc avoir, dans ce cas particulier, $T_x = 0$ et $T_y = 0$. Donc, po duire dans les expressions l'existence d'un plan de symétrie pe culaire aux z, il est nécessaire et suffisant de faire en sorte q expressions donnent $T_x = 0$ et $T_y = 0$ pour $\alpha_x = 0$ et $\alpha_y = 0$. Ce dition revient à égaler à zéro les coefficients des quantités aut α_x et α_y dans les expressions de T_x et T_y. Les expressions des élastiques se transforment donc comme suit :

$$(7)\quad \begin{cases} N_x = A_x \delta_x + B_z \delta_y + B_y \delta_z + F_x \alpha_z, \\ N_y = B_z \delta_x + A_y \delta_y + B_x \delta_z + F_y \alpha_z, \\ N_z = B_y \delta_x + B_x \delta_y + A_z \delta_z + F_z \alpha_z, \\ T_x = \mathscr{A}_x \alpha_x + \mathscr{B}_z \alpha_y, \\ T_y = \mathscr{B}_z \alpha_x + \mathscr{A}_y \alpha_y, \\ T_z = F_x \delta_x + F_y \delta_y + F_z \delta + \mathscr{A}_z \alpha_z. \end{cases}$$

Ces équations qui conviennent aux corps cristallisés dans le s binaire, ne contiennent plus que *treize* coefficients distincts.

Système terbinaire. — Lorsque le corps appartient au systèm binaire, il faut modifier les expressions (7) de manière que $\alpha_z = 0$ et $\alpha_z = 0$, on ait $T_x = 0$ et $T_z = 0$, ce qui donne :

$$(8)\quad \begin{cases} N_x = A_x \delta_x + B_z \delta_y + B_y \delta_z, & T_x = \mathscr{A}_x \alpha_x \\ N_y = B_z \delta_x + A_y \delta_y + B_x \delta_z, & T_y = \mathscr{A}_y \alpha_y, \\ N_z = B_y \delta_x + B_x \delta_y + A_z \delta_z, & T_z = \mathscr{A}_z \alpha_z, \end{cases}$$

Il n'y a plus que *neuf* coefficients distincts.

Systèmes sénaire, ternaire et quadratique. — Lorsque le appartient à l'un de ces systèmes, si l'ellipsoïde de déformation révolution autour de l'axe principal (que l'on peut supposer êtr des z), l'ellipsoïde d'élasticité sera aussi de révolution autour du axe ; en d'autres termes, les choses se passeront comme si tous le passant par l'axe des z étaient des plans de symétrie du mili formules des N et des T seront donc de même forme dans les tr tèmes cristallins. Il suffit de les obtenir pour le cas du système tique, par exemple,

Pour y parvenir on remarque d'abord, dans le but de simplifier les calculs ultérieurs, que si l'axe quadratique est dirigé suivant l'axe des z, et si deux axes binaires de même espèce sont dirigés suivant les axes des x et des y, tout doit rester identique, dans les expressions (8), lorsqu'on permute

$$\delta_x \text{ et } \delta_y\ ,\quad \alpha_x \text{ et } \alpha_y\ ,\quad N_x \text{ et } N_y$$

On en déduit :

$$(9)\qquad A_x = A_y,\quad B_x = B_y \quad \text{et} \quad \mathcal{A}_x = \mathcal{A}_y.$$

Les trois relations ainsi obtenues sont nécessaires, mais ne suffisent pas pour exprimer que le milieu possède la symétrie du système quadratique. On s'est en effet borné à écrire que lorsque $\delta_x = \delta_y$ et $\alpha_x = \alpha_y$, on a $N_x = N_y$ et $T_x = T_y$, mais cette condition peut être remplie sans qu'il existe nécessairement des plans de symétrie bissecteurs des plans zy et zx.

Pour traduire complètement la symétrie du corps, on change d'axes coordonnés en conservant l'axe des z, prenant pour axe des ξ la bissectrice de l'angle xy, et pour axe des η celle de l'angle $x\bar{y}$. Les expressions des nouveaux N et T auront les mêmes formes que celles des expressions (8) modifiées par les relations (9).

On aura ainsi :

$$N_\xi = A_\xi\, \delta_\xi + B_\zeta\, \delta_\eta + B_\xi\, \delta_\zeta.$$

Les formules (2) donnent

$$\delta_\xi = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y + \alpha_\zeta),$$

$$\delta_\eta = \frac{1}{2}(\delta_x + \delta_y - \alpha_\zeta),$$

$$\delta_\zeta = \delta_z.$$

Ces valeurs, transportées dans N_ξ, donnent :

$$N_\xi = \frac{A_\xi + B_\zeta}{2}\,\delta_x + \frac{A_\xi + B_\zeta}{2}\,\delta_y + B_\zeta\,\delta_z + \frac{A_\xi - B_\xi}{2}\,\alpha_z.$$

On peut avoir une autre expression de N_ξ, car les formules (4) donnent :

$$N_\xi = \frac{1}{2}(N_x + N_y + 2T_z),$$

et par conséquent :

$$N_\xi = \frac{A_x + B_z}{2}\,\delta_x + \frac{A_x + B_z}{2}\,\delta_y + B_x\,\delta_z + \mathcal{A}_z\,\alpha_z.$$

En identifiant les deux expressions de N_ξ, on trouve :

$$A_\xi = A_x, \qquad B_\xi = B_z, \qquad \mathcal{A}_z = \frac{1}{2}(A_\xi - B_\xi),$$

et par conséquent :

$$\mathcal{A}_z = \frac{1}{2}(A_x - B_z).$$

Des calculs analogues faits avec les expressions des autres N donneraient aucune relation nouvelle. Les expressions des N et T que l'axe des z est un axe de symétrie principal, sont donc :

$$(10)\quad \begin{cases} N_x = A_x\,\delta_x + B_z\,\delta_y + B_x\,\delta_z, & T_x = \mathcal{A}_x\,\alpha_x, \\ N_y = B_z\,\delta_x + A_x\,\delta_y + B_x\,\delta_z, & T_y = \mathcal{A}_x\,\alpha_y, \\ N_z = B_x\,(\delta_x + \delta_y) + A_z\,\delta_z. & T_z = \frac{1}{2}(A_x - B^z) \end{cases}$$

avec *cinq* coefficients distincts.

Système cubique. — Pour passer au système cubique, il d'écrire que la forme des expressions (10) est la même suivant l des x, des y et des z, ce qui conduit aux relations :

$$A_x = A_z, \qquad B_x = B_z, \qquad \mathcal{A}_x = \frac{1}{2}(A_x - B_z).$$

Les expressions des N et des T deviennent donc, en supprim indices devenus inutiles,

$$(11)\quad \begin{cases} N_x = A\,\delta_x + B\,(\delta_y + \delta_z) & T_x = \frac{1}{2}(A - B)\,\alpha_x \\ N_y = A\delta_y + B\,(\delta_x + \delta_z) & T_y = \frac{1}{2}(A - B)\,\alpha_y \\ N_z = A\delta_z + B\,(\delta_x + \delta_y) & T_z = \frac{1}{2}(A - B)\,\alpha_z \end{cases}$$

avec *deux* coefficients distincts seulement.

On a souvent à s'occuper, dans la physique mathématique, des

isotropes tels que le verre, dont les propriétés sont identiques suivant toutes les directions. La structure des corps isotropes peut être comparée à celle d'un tas de poussière formé de grains polyédriques très petits et identiques entre eux. Trois directions rectangulaires quelconques pourront, dans un semblable milieu, être regardés comme des axes quaternaires, puisque le milieu, quelle qu'en soit la position dans l'espace, est toujours identique à lui-même. Si l'on fait en sorte que l'ellipsoïde de déformation soit une sphère, l'ellipsoïde d'élasticité en sera une aussi. Les formules des N et des T seront donc les mêmes pour les milieux isotropes que pour les solides cristallisant dans le système cubique.

Coefficients élastiques inverses. — Des expressions linéaires des N et T en fonction des δ et des α, on peut déduire des équations, linéaires aussi, et donnant les δ et les α en fonction des N et des T. On obtient ainsi 36 nouveaux coefficients qui se tireraient des 21 anciens. Les relations de la page 35 montrent d'ailleurs que les δ et les T sont les coefficients différentiels de la différentielle de Φ considérée comme fonction des N et des T. On réduirait donc à 21 les 36 nouveaux coefficients accentués par des équations entièrement analogues à celles qui ont réduit à 21 les 36 coefficients non accentués.

Pour écrire aisément les expressions qui donnent les δ et les α en fonction des N et T, nous conviendrons de changer, dans les expressions (6) qui donnent les N et T en fonction des δ et des α, N en δ, T en α, et réciproquement, en accentuant les coefficients. Nous appellerons ces coefficients accentués, *coefficients élastiques inverses*, en réservant la dénomination de *directs* aux coefficients non accentués.

Formules symboliques exprimant les coefficients élastiques directs ou inverses. — Quant aux formules qui serviront à trouver les coefficients inverses A′ B′... $\mathscr{A}'$, $\mathscr{B}'$ correspondant à un certain système de coordonnées quand on connaît ceux qui correspondent à un autre, on peut encore se servir des formules symboliques de la page 37.

$$a'_{\xi\eta\zeta\xi} = a'_\xi\, a'_\eta\, a'_\xi\, a'_\zeta,$$

mais avec quelques modifications. En effet, les formules

$$\delta_x = A'_x\, N_x + \ldots + C'_x\, T_x + \ldots$$

ne peuvent être mises sous la même forme que les équ
qu'en substituant aux C′ des coefficients C″ tels que

$$2C''_x = C'_x.$$

Les formules :

$$\alpha_{yz} = 2\delta_{yz} = C'_x N_x + \ldots + \mathcal{A}'_x T_x + \mathcal{B}'_z T_y + \ldots$$

ou

$$\delta_{yz} = \frac{C'_x}{2} N_x + \ldots + \frac{1}{2}\mathcal{A}'_x T_x + \frac{1}{2}\mathcal{B}'_z T_y + \ldots$$
$$= C''_x N_x + \ldots + \frac{1}{2}\mathcal{A}_x T_x + \frac{1}{2}\mathcal{B}'_z T_y + \ldots$$

ne peuvent être mises sous la même forme que les précéde
prenant

$$\frac{1}{2}\mathcal{A}'_x = 2\mathcal{A}''_x \qquad \frac{1}{2}\mathcal{B}'_z = 2\mathcal{B}''_z.$$

Les formules symboliques de transformation donneront les
$\mathcal{A}''$, $\mathcal{B}''$; il faudra donc, pour employer les formules, divis
C′, D′, F′ et par 4 les $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ qui y entrent ; puis double
F′ et quadrupler les $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ donnés par les formules.

Il résulte ainsi de ce qui précède, que les simplifications
de la symétrie du corps, seront identiques avec celles qu
trouvées pour les A, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, etc. ; mais en tenant compte d
ments qui viennent d'être reconnu nécessaires. C'est ainsi
que l'axe des z est un axe de symétrie principal, les formule
gement d'axes ont donné l'expression

$$\mathcal{A}_z = \frac{1}{2}(A_x - B_z),$$

qui se transformera, changeant $\mathcal{A}'_z$ en $\frac{1}{4}\mathcal{A}'_z$, en

$$\mathcal{A}'_z = 2(A'_x - B'_z).$$

Nous désignerons dorénavant les expressions qui, dans c
de symétrie particulière, donnent les δ et α en fonction des N
les mêmes numéros que ceux qui désignent les expressions c

dantes donnant les N et T en fonction des δ et des α, mais *en accentuant ces numéros.*

§ 4. ÉQUILIBRE D'ÉLASTICITÉ.

Équations exprimant l'équilibre d'élasticité. — Pour appliquer la théorie qui précède, il faut pouvoir résoudre le problème suivant : Un corps étant en équilibre sous l'action des forces élastiques intérieures et d'un système donné de forces extérieures, trouver la déformation du corps, ou réciproquement. Il est aisé de poser les équations différentielles qui résolvent le problème.

Soit un petit prisme dont 3 arêtes, coïncidant avec les axes coordonnés, sont égales à dx, dy, dz. La face coïncidant avec le plan des yz est sollicitée par une force élastique qui, appliquée à la surface dont l'aire est $dydz$, a pour composantes :

$$N_x dydz, \qquad T_z dydz, \qquad T_y dydz.$$

La face parallèle est sollicitée par une force dont les composantes sont :

$$\left(N_x + \frac{dN_x}{dx}\,dx\right)dydz, \quad \left(T_z + \frac{dT_z}{dx}\,dx\right)dydz, \quad \left(T_y + \frac{dT_y}{dy}\,dy\right)dydz.$$

Quant à la force non moléculaire qui agit sur le petit parallélipipède, on peut la supposer proportionnelle au volume $dx\,dy\,dz = dv$, et nous appellerons ses composantes X_0, Y_0, Z_0 ; l'équilibre du prisme exige que la somme des projections des forces sur l'axe des x soit nulle. On trouve ainsi la première des équations suivantes, dont les deux autres s'obtiennent par des considérations analogues en remplaçant successivement l'axe des x par ceux des y et des z :

$$(13)\quad \begin{cases} \dfrac{dN_x}{dx} + \dfrac{dT_z}{dy} + \dfrac{dT_y}{dz} + X_0 = 0, \\[2ex] \dfrac{dT_z}{dx} + \dfrac{dN_y}{dy} + \dfrac{dT_x}{dz} + Y_0 = 0, \\[2ex] \dfrac{dT_y}{dx} + \dfrac{dT_x}{dy} + \dfrac{dN_z}{dz} + Z_0 = 0. \end{cases}$$

Ces équations, qui doivent être satisfaites en tous les points du corps en équilibre d'élasticité, sont les équations indéfinies d'équilibre auxquelles doivent satisfaire les fonctions N et T.

Les forces X_0, Y_0, Z_0 agissant en tous les points du corps é plus habituellement celles de la pesanteur, sont généraleme c'est-à-dire qu'on ne compte la déformation qu'à partir de produite les forces $X_0, Y_0 Z_0$ que l'on peut alors supposer n

Ces équations, dans lesquelles n'entrent pas les forces extérieures, appliquées à la surface du corps, et qui le c le tirant, en le comprimant ou en le tordant, ne suffisent pas pour résoudre le problème; il faut y ajouter d'autres éq *définies*, parce qu'elles ne s'appliquent qu'à des points pa corps.

Si l'on prend d'une manière générale une portion finie du laquelle on connaît les forces qui agissent en chaque poi face, il faudra écrire que la force extérieure appliquée e point de la surface sur un élément ω de cette surface, fait é forces intérieures qui agissent intérieurement sur cette mé Si X, Y, Z sont les composantes de la force élastique F les composantes de la force extérieure F_1, rapportée à l'unit l'équilibre exige que les équations suivantes soient satisfa

$$(14)\quad \begin{cases} X = m'N_x + n'T_z + p'T_y = X_1, \\ Y = m'T_z + n'N_y + p'T_x = Y_1, \\ Z = m'T_y + n'T_x + p'N_z = Z_1; \end{cases}$$

équations auxquelles il faudra en ajouter trois autres ex la somme des moments des forces extérieures prises pa 3 axes rectangulaires est égale à la somme des moment intérieures.

Lorsqu'on donne la déformation, il est très facile d'obten extérieures qui peuvent la produire, puisqu'on déduit les rieures de la déformation au moyen des équations (7), e extérieures des forces intérieures au moyen des équations Le problème est plus complexe dans le cas, qui est presque to de la pratique, où l'on se donne les forces extérieures et où remonter à la déformation. On ne connaît pas alors de m soudre la question d'une manière générale, et l'on ne peut une méthode de tâtonnements dans chaque cas particulie thode consiste à essayer de satisfaire aux équations par u tion que certaines considérations font considérer comme vra la déformation est bien celle que l'on cherche, si, combinée a

rieures données, elle vérifie les équations de l'équilibre élastique.

as d'une traction ou d'une pression. Coefficients d'élasticité gitudinale. — On appliquera d'abord cette théorie au cas simple n corps homogène quelconque, de forme prismatique, sollicité sur bases par une force normale (pression ou traction) égale à p par ité de surface. On rapporte le corps à 3 axes rectangulaires x, y, dont l'un z est parallèle à l'axe du prisme.

Il est aisé de voir qu'on a partout :

$$N_x = 0 \qquad N_y = 0 \qquad N_z = p$$

$$T_x = 0 \qquad T_y = 0 \qquad T_z = 0,$$

'où l'on tire :

$$\delta_x = pB'_y \qquad \delta_y = pB'_x \qquad \delta_z = pB'_z$$

$$\alpha_x = pC'_z \qquad \alpha_y = pD'_z \qquad \alpha_z = pF'_z.$$

En effet, les valeurs de N et de T satisfont évidemment aux équations (13) lorsqu'on y abstrait X_o, Y_o, Z_o, et aux équations (14). Les δ et les α satisfont également aux équations (3) et (4), puisque toutes les dérivées sont nulles.

Si l'on observe avec précision la dilatation δ'_z du prisme, ou le rapport de l'allongement de ce prisme à sa longueur; si l'on mesure en outre le rapport p qui existe entre le poids qui sollicite le prisme et l'aire de la section droite, on aura :

$$A'_z = \frac{\delta_z}{p}.$$

On a donc ainsi le moyen de déterminer expérimentalement le coefficient A'_z correspondant à une direction z arbitrairement choisie. L'inverse de ce coefficient est désigné ordinairement dans la théorie de la résistance des matériaux sous le nom de *module de l'élasticité longitudinale;* on le désigne par E_z.

Si l'on prend dans le corps 3 axes rectangulaires fixes, ξ, η, ζ, la formule symbolique connue donnera immédiatement l'expression de A'_z en fonction des coefficients qui se rapportent aux axes ξ, η, ζ. On trouve ainsi :

$$
{}^{1}\,A'_z = \begin{cases} m^4 A'_\xi + p^2 n^2 (2B'_\xi + \mathscr{A}'_\xi) + 2npm^2 (C'_\xi + \mathscr{B}'_\xi) + 2np(\\ + n^4 A'_\xi + m^2 p^2 (2B'_\eta + \mathscr{A}'_\eta) + 2mpn^2 (D'_\eta + \mathscr{B}'_\eta) + 2mp \\ + p^4 A'_\zeta + m^2 n^2 (2B'_\zeta + \mathscr{A}'_\zeta) + 2mnp^2 (F'_\zeta + \mathscr{B}'_\zeta) + 2mn (\end{cases}
$$

en effaçant les indices des m, n, p, qui seraient tous ζ[1].

Les 15 coefficients distincts de cette expression pourront au moyen de 15 observations de A'_z suivant 15 directions d sera impossible de déduire d'observations semblables les 2 distincts des expressions (6). On ne pourra les obtenir q aux expériences d'allongement des expériences de torsion.

Aux expériences d'allongement nécessaires pour déterr $\frac{1}{E_z}$, on a essayé de substituer des expériences de flexion bie modes, parce que, en diminuant suffisamment l'épaisseu fléchie et augmentant sa longu produire des flèches assez g être mesurées avec précision. placer la lame sur le tranch couteaux Z et Z' (fig. 5), de lame en son milieu d'un poi l'intermédiaire d'un autre couteau A, et de mesurer avec u la quantité dont A s'abaisse.

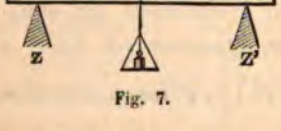


Fig. 7.

Avec des solides isotropes, on a en effet :

$$f = \frac{Pl^3}{48\,E_z\,l};$$

en appelant f la flèche, l l'écartement des deux appuis su lame est posée, P le poids dont la lame est chargée en son moment d'inertie de la section autour d'une certaine ligne la lame a pour section droite un rectangle, peut être rega

[1] Il est aisé de voir que si l'on prend sur chaque direction ζ une lo $\frac{1}{\sqrt[4]{A'_z}} = \sqrt[4]{Ez}$, on pourra remplacer dans l'expression de A'_z, m, n, p par $\frac{z}{\sqrt[4]{A'_z}}$, x, y, z représentent les coordonnées de l'extrémité du rayon vect ainsi obtenue est du 4e degré.

incidant avec une parallèle au côté du rectangle reposant sur les puis. Dans ce cas, on a $I = \frac{bh^3}{12}$, et la formule devient :

$$f = \frac{Pl^3}{48\,E\,bh^3}.$$

Malheureusement cette formule ne s'applique qu'aux corps isotropes u cubiques ; pour les autres corps cristallisés, on n'a pas encore pu tablir, si ce n'est dans des cas particuliers, la formule qui lie la flèche ux dimensions du prisme et aux constantes élastiques.

Il faut donc, pour déterminer les constantes élastiques des cristaux, mesurer directement l'allongement ou le raccourcissement qu'éprouve, sous l'action d'une force connue, un prisme de longueur et de section données, découpé dans le cristal suivant une direction cristallographiquement connue. La difficulté provient de l'extrême petitesse de la longueur à mesurer ; mais on pourrait sans doute, comme l'a depuis longtemps indiqué M. Cornu, surmonter cette difficulté en ayant recours à la belle méthode d'observation imaginée par M. Fizeau et appliquée par lui à la mesure des dilatations thermiques des corps cristallisés ; nous la décrirons plus loin.

Cas d'une pression uniforme sur toutes les faces. — Il est intéressant d'examiner le cas d'un corps que presse uniformément sur sa surface une pression égale à p par unité de surface. Il est aisé de voir qu'on a alors dans tout le corps :

$$N_x = N_y = N_z = -p \qquad T_x = 0, \quad T_y = 0, \quad T_z = 0.$$

On aura donc :

$$\begin{aligned} \delta_x &= -(A'_x + B'_z + B'_y)\,p & \alpha_x &= -(C'_x + C'_y + C'_z)\,p \\ \delta_y &= -(B'_z + A'_y + B'_x)\,p & \alpha_y &= -(D'_x + D'_y + D'_z)\,p \\ \delta_z &= -(B'_y + B'_x + A'_z)\,p & \alpha_z &= -(F'_x + F'_y + F'_z)\,p. \end{aligned}$$

Si le corps a la forme d'un cube dont les arêtes soit parallèles à x, y, z ; δ_x, δ_z, δ_y seront les dilatations des arêtes, α_x, α_y, α_z les rétrécissements des angles dièdres de ce cube. Les α seront tous nuls si les axes coordonnés sont des axes de symétrie.

Cas d'un corps cylindrique sollicité à la torsion. — Les phénomènes d'extension, de compression ou de flexion ne pouvant suffire à

déterminer tous les coefficients qui définissent les propriét
d'un corps donné, et cette détermination exigeant le
phénomènes de torsion, il est nécessaire d'étudier ceux-ci

On suppose un corps prismatique ou cylindrique, s
rieurement sur l'une des bases par un couple de forces dor
est M, et sur l'autre base par un couple égal et contraire,
remplacé par la réaction due à l'encastrement de cette ba
l'axe du prisme pour axe des z, et pour axes des x et des y
rectangulaires quelconques situées dans la base encastrée.

Si l'on suppose dans tout le corps :

$$N_x = 0, \quad N_y = 0, \quad N_z = 0, \quad T_z = 0, \quad \frac{dT_y}{dz} = 0,$$

les équations indéfinies (13) sont satisfaites si l'on a :

$$\frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} = 0.$$

Les équations définies à la surface, dans lesquelles o
$X_o = 0$, $Y_o = 0$, $Z_o = 0$ en négligeant le poids du prisme, l
à condition qu'on ait

$$T_x\, dx - T_y\, dy = 0,$$

$\frac{dy}{dx}$ étant tiré de l'équation en x, y du contour de la secti
les forces extérieures agissant sur la base peuvent être ren
des forces égales, f, agissant tangentiellement en chaque p
tour. L'équilibre d'un élément infiniment petit de la base
contour, et pour lequel $m' = 0$, $n' = 0$, $p' = 1$, exige, e
équations (14),

$$T_y = X_1, \qquad T_x = Y_1,$$

d'où l'on tire :

$$\frac{T_x}{T_y} = \frac{Y_1}{X_1} = -\frac{dy}{dx}.$$

Quant à la déformation, la nullité de T_z et des trois N
les δ et les α sont fonctions linéaires de T_x et T_y. En diffé
rapport à z, on aura donc, à cause de $\frac{dT_x}{dz} = 0$, $\frac{dT_y}{dz} = 0$, e

ière générale,

$$\frac{d\delta}{dz}=0, \qquad \frac{d\alpha}{dz}=0,$$

équations dans lesquelles on peut mettre à δ et α un quelconque des indices x, y, z.

Les équations (3) donnent donc :

$$\frac{d^2\alpha_z}{dxdy}=\frac{d^2\delta_x}{dy^2}+\frac{d^2\delta_y}{dx^2}$$

$$0=\frac{d^2\delta_z}{dx^2}$$

$$0=\frac{d^2\delta_z}{dy^2},$$

équations satisfaites lorsque T_x et T_y et par conséquent les α et les δ sont fonctions linéaires de x et de y.

Les équations (4) donnent :

$$0=d\left(\frac{d\alpha_y}{dy}-\frac{d\alpha}{dx}\right)$$

$$0=\frac{d}{dy}\left(\frac{d\alpha_y}{dy}-\frac{d\alpha_x}{dx}\right)$$

$$0=0,$$

équations satisfaites, lorsque l'on pose :

$$\frac{d\alpha_x}{dx}-\frac{d\alpha_y}{dy}=2\theta,$$

2θ étant une certaine constante.

La condition que T_x et T_y soient des fonctions linéaires de x et de y exige d'ailleurs que le contour soit une ellipse, car si l'on remplace T_x et T_y par ces fonctions linéaires dans l'équation $T_x dx - T_y dy = 0$, cette équation, intégrable en vertu de l'équation $\frac{dT_y}{dx}=-\frac{dT_x}{dy}$, donne par l'intégration une équation du deuxième degré qui ne peut être que celle d'une courbe fermée et par conséquent d'une ellipse.

Dans les expressions de T_x et T_y en x et y, il ne doit point entrer

d'ailleurs de constante, si l'on admet qu'à l'origine des coord les δ et les α sont nuls.

On peut donc poser :

$$T_x = gx + hy, \qquad T_y = h'x + g'y.$$

ou, en vertu de

$$\frac{dT_x}{dy} + \frac{dT_y}{dx} = 0, \text{ c'est-à-dire } h = -h',$$

$$T_x = gx + h, \qquad T_y = -hx + g'y.$$

L'équation de l'ellipse qui forme le contour de la section est

$$gx^2 + g'y^2 + 2hxy + C = 0.$$

On peut toujours supposer l'ellipse rapportée à ses axes, et appelle I et I' les moments principaux d'inertie on a :

$$I = \int x^2 d\omega = \pi \frac{ba^3}{4} \qquad I' = \int y^2 d\omega = \pi \frac{ab^3}{4},$$

et l'ellipse, dont les demi-axes sont a et b, aura pour équation :

$$I'x^2 + Iy^2 = \frac{\pi a^3 b^3}{4}.$$

Identifiant les deux équations de l'ellipse, il vient

$$h = 0, \; f = 0, \; f' = 0, \qquad \frac{g}{I'} = -\frac{g'}{I} = L,$$

d'où l'on tire :

$$T_x = LI'x, \qquad T_y = -LIy.$$

Si l'on porte dans l'équation $\frac{d\alpha_x}{dx} - \frac{d\alpha_y}{dy} = 2\theta$, on obtient :

$$L(I'\mathcal{A}'_x + I\mathcal{A}'_y) = 2\theta,$$

ou :

$$L = \frac{I'\mathcal{A}'_x + I\mathcal{A}'_y}{2\theta} = \frac{P}{2\theta},$$

en posant

$$I'\mathcal{A}'_x + I\mathcal{A}'_y = P.$$

Si l'on écrit maintenant que, dans la base, la somme des moments s forces intérieures est égale à celui des forces extérieures, on ra :

$$M = \int d\omega\,(x\,T_x - y\,T_y) = \frac{2\theta}{P}\int (I'x^2 + Iy^2)\;d\omega$$

u :

$$M = \frac{4\theta}{P}\,II' = 4\theta\,\frac{II'}{I'\mathscr{A}'_x + I\mathscr{A}'_y}.$$

Si l'ellipse est un cercle de rayon r, on a $I = I' = \frac{\pi r^4}{4}$, et il vient :

$$M = \theta\,\frac{\pi r^4}{\mathscr{A}'_x + \mathscr{A}'_y}.$$

Le moment M étant indépendant de l'orientation des axes x et y dans la section, il faut que $\mathscr{A}'_x + \mathscr{A}'_y$ soit constant, quelle que soit cette orientation. Ceci peut donc être considéré comme la démonstration d'un théorème intéressant qu'on vérifierait aisément au moyen des formules qui donnent $\mathscr{A}'_x$ et $\mathscr{A}'_y$ en fonction des coefficients rapportés à des axes fixes.

Il ne reste plus qu'à chercher la signification physique de θ. On va, pour y arriver, chercher les expressions des déplacements finis u, v, w, de chaque point de corps en fonction des x, y et z. On sait que l'on a :

$$\delta_x = \frac{du}{dx} = mx + ny, \qquad \delta_y = \frac{du}{dy} = n_1x + m_1y, \qquad \delta_z = \frac{du}{dz} = m_2x + n_2y.$$

On en déduit, par une intégration :

$$u = \frac{m}{2}x^2 + nyx + f(y,z),$$

$$v = n_1xy + \frac{m_1}{2}y^2 + f_1(x,z),$$

$$w = m_2xz + n_2yz + f_2(x,y).$$

On a d'ailleurs :

$$\frac{d\alpha_x}{dx} - \frac{d\alpha_y}{dy} = \frac{d}{dz}\left(\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy}\right) = 2\theta.$$

d'où l'on déduit encore en intégrant :

$$\frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy} = 2\theta z + F(x,y).$$

On a en outre :

$$\alpha_z = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} = p_2 x + q_2 y,$$

équation qui, combinée avec la précédente, donne :

$$2\frac{dv}{dx} = 2\theta z + p_2 x + q_2 y + F(x,y),$$

$$2\frac{du}{dy} = -2\theta z + p_2 x + q_2 y - F(x,y).$$

En différentiant les expressions de v et u, on trouve :

$$2\frac{dv}{dx} = 2n_1 y + 2\frac{df_1(x,z)}{dx},$$

$$2\frac{dv}{dy} = 2nx + 2\frac{df(y,z)}{dy}.$$

Ces deux équations, comparées aux deux précédentes, donnent :

$$2\frac{df(y,z)}{dy} = -2\theta z + q_2 y + (p_2 - 2n)x - F(x,y),$$

$$2\frac{df_1(x,z)}{dx} = 2\theta z + p_2 x + (q_2 - 2n_1)y + F(x,y).$$

Dans l'avant-dernière équation, le premier membre étant in dant de x, il doit en être de même du deuxième, ce qui entraîne l dition :

$$F(x,y) = q_2 y + (p_2 - 2n)x + \psi(y).$$

La seconde équation donnerait de même :

$$F(x,y) = -p_2 x + (2n_1 - q_2)y + \varphi(x).$$

Des deux dernières équations on obtient aisément :

$$\frac{dF}{dy} = 2n_1 - q_2, \quad \frac{dF}{dx} = p_2 - 2n,$$

et par conséquent, en intégrant :

$$F(x,y) = (p_2 - 2n)x + (2n_1 - q_2)y.$$

Avec cette valeur de $F(x, y)$, les équations qui donnent $2\frac{df(y, z)}{dy}$ et $2\frac{df_1(x, z)}{dx}$, deviennent :

$$\frac{df(y,z)}{dx} = -\theta z + (q_2 - n_1)\, y,$$
$$\frac{df_1(x,z)}{dx} = \theta z + (p_2 - n)\, x.$$

On en déduit par l'intégration :

$$f(y,z) = -\theta zy + \frac{1}{2}(q_2 - n_1)\, y^2 + \chi(z),$$
$$f_1(x,z) = \theta zx \quad + \frac{1}{2}(p_2 - n)\, x^2 + \chi_1(z).$$

Or on a :

$$\alpha_\xi = \frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} = \frac{df_1(x,z)}{dz} + n_2 z + \frac{df_2(x,y)}{dy},$$
$$= x \quad + \frac{df_2(x,y)}{dy} + n_2 z + \frac{d\chi_1(z)}{dz},$$

et comme α_ξ est indépendant de ζ, il faut que l'on ait :

$$\frac{d\chi_1(z)}{dz} + n_2 z = 0,$$

ou

$$\chi_1(z) = -\frac{1}{2} n_2 z^2,$$

puisqu'aucune constante ne peut entrer dans l'expression des u, v, w.

On trouverait, par un calcul tout à fait analogue :

$$\chi(z) = -\frac{1}{2} m_2 z^2.$$

Les expressions de u et v sont donc, en définitive :

$$u = \frac{m}{2} x^2 + nxy + \frac{1}{2}(q_2 - n_1)\, y^2 - \theta zy - \frac{1}{2} m_2 z^2,$$
$$v = \frac{m_1}{2} y^2 + n_1 xy + \frac{1}{2}(p_2 - n)\, x^2 - \theta zx - \frac{1}{2} n_2 z^2.$$

On peut maintenant se demander quelle est la torsion subie par une ligne supposée parallèle à l'axe du cylindre avant la déformation. Soit, après la déformation, m (fig. 7) la projection d'un point quelconque

du corps sur le plan des xy, m' la projection d'un autre point qui, avant la déformation, se trouvait sur la même parallèle à l'axe des z que m et était séparée de celui-ci par une distance dz. L'angle $m'Om$ est

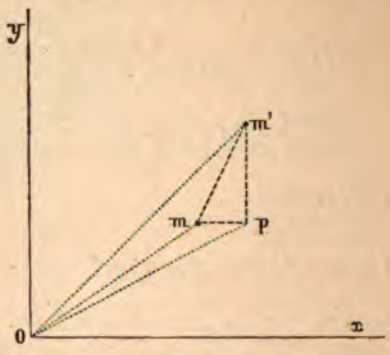


Fig. 8.

ce que l'on appellera la torsion subie par l'élément dz; on le représentera par $d\tau$. Les accroissements des coordonnées x et y, en passant de m à m', sont égaux aux accroissements du et dv correspondant à l'accroissement dz. Si l'on écrit que la surface du triangle Omm' est égale à celle du triangle Opm' moins celle du triangle Opm, on aura :

$$\rho^2 d\tau = (xdv - ydu) = dz\left(x\frac{dv}{dz} - y\frac{du}{dz}\right).$$

Si l'on remplace dans cette expression $\frac{dv}{dz}$ et $\frac{du}{dz}$ par leurs valeurs tirées des expressions de u et de v, il vient :

$$\rho^2 d\tau = dz\,[\theta(x^2 + y^2) + (m_2 y - n_2 x)z],$$

et en intégrant :

$$\tau = \theta z + \frac{m_2 y - n_2 x}{2\rho^2} z^2;$$

τ est l'angle (rapporté à la demi-circonférence) dont la longueur verticale z s'est tordue autour de l'axe des z. En remplaçant m_2 et n_2 par leurs valeurs, on peut écrire :

$$\tau = \theta z + \theta\,\frac{\mathrm{I'C'}_x\,y + \mathrm{ID'}_z}{\rho^2(\mathrm{I'}\mathcal{A}'_x + \mathrm{I}\mathcal{A}'_y)}.$$

i la section est circulaire, on a :

$$\tau = \theta z + \theta \frac{C'_z y + D'_z x}{\rho^2(\mathcal{A}'_x + \mathcal{A}'_y)}.$$

es points de l'axe du cylindre, pour lesquels $x = 0$, $y = 0$, subissent es déplacements :

$$u = -\frac{1}{2} m_2 z^2, \qquad v = -\frac{1}{2} n_2 z_2, \qquad w = 0;$$

ils restent donc dans un plan vertical passant par l'axe des z, et dont la trace sur le plan des xy a pour équation :

$$y = \frac{m_1}{n_2} x = -\frac{\mathrm{I}'C'_z}{\mathrm{ID}'_z} x.$$

La courbe qu'affectent les points situés sur l'axe est une parabole ayant pour équation :

$$\rho = \frac{1}{2}\sqrt{m^2_2 + n^2_2 z^2},$$

ρ étant la distance d'un point quelconque à l'axe des z.

On peut considérer le déplacement total très petit de chaque point comme étant la superposition de deux autres. L'un de ceux-ci est une translation égale et contraire à celle du centre de la section qui contient le point, c'est-à-dire exprimée par

$$u' = \frac{1}{2} m_2 z^2 \qquad v' = \frac{1}{2} n_2 z^2;$$

l'autre a pour projections sur les axes, $u + u'$, $v + v'$, et w. Les premiers déplacements donnent une sorte de flexion de tout le cylindre, parallèlement au plan dont l'équation est $y = \frac{m_2}{n_2} x$; les autres produisent une torsion uniforme autour de l'axe des z exprimée par l'équation :

$$\tau = \theta z.$$

Si l'axe des z est un axe de symétrie, on a $C'_z = 0$, $D'_z = 0$, et l'axe du cylindre reste vertical. La torsion autour de l'axe des z est exprimée par l'équation précédente. Il est alors très facile de mesurer θ avec exac-

titude, car il suffit de placer aux extrémités d'une même génératrice du cylindre, de longueur l, de petits miroirs tangents au cylindre et placés en regard d'une échelle graduée. On observe, après la torsion, par la méthode de Gauss, l'angle formé par les plans des deux miroirs; cet angle divisé par l est égal à θ. Connaissant θ et le moment M des forces qui tordent, on obtient, si le cylindre est circulaire, la valeur de $\mathcal{A}'_x + \mathcal{A}'_y$, et si le cylindre est elliptique, une relation entre ces deux quantités. Dans ce dernier cas, il suffirait d'observer successivement avec deux cylindres elliptiques dont les grands axes seraient à angle droit par rapport aux axes cristallographiques du corps, l'axe du cylindre gardant la même direction, pour obtenir séparément $\mathcal{A}'_x$ et $\mathcal{A}'_y$.

Si le corps a trois axes de symétrie rectangulaires, l'observation de la torsion de cylindres circulaires taillés suivant la direction de chacun des axes donnerait $\mathcal{A}'_x + \mathcal{A}'_x$, $\mathcal{A}_x + \mathcal{A}'_z$, $\mathcal{A}'_y + \mathcal{A}'_z$, d'où l'on déduirait facilement $\mathcal{A}'_x$, $\mathcal{A}'_y$ et $\mathcal{A}'_z$.

Cas dans lesquels on peut réduire à 15 les 21 coefficients de Green. — Le raisonnement que nous avons employé après Green pour réduire de 36 à 21 le nombre des coefficients élastiques distincts dans le cas le plus général, ne s'appuie que sur l'équation du travail, et laisse complètement indéterminé le mode d'action des centres de gravité moléculaires, auxquels on suppose le corps réduit. Si l'on supposait négligeables les variations qui peuvent se produire, pendant la déformation, dans l'orientation et la forme de la molécule, il serait permis de considérer les centres de gravité des molécules comme exerçant, suivant une direction déterminée, des actions toujours identiques, et qui ne varient qu'avec la distance des autres centres sur lesquels elles s'exercent. Dans cette hypothèse, on démontre sans peine que les 21 coefficients de Green pourraient être réduits à 15, au moyen des 6 relations :

$$B_z = \mathcal{A}_z, \quad B_y = \mathcal{A}_y, \quad B_x = \mathcal{A}_x,$$
$$\mathcal{B}_z = F_z, \quad \mathcal{B}_y = A_y, \quad \mathcal{B}_x = A_x.$$

Cette réduction, qui avait été considérée par Cauchy, dans ses premiers travaux, comme pouvant toujours être faite, est analytiquement remarquable. Elle établirait en effet une dépendance entre les coefficients qui régissent la torsion et ceux qui régissent l'extension. Des

bservations d'extension suffiraient à déterminer, si elle pouvait être opé-ée, toutes les constantes élastiques, et la surface du 4e degré, qui re-résente la variation des A ou des E, suffirait à représenter toutes les ropriétés élastiques du corps.

Voici par quel raisonnement élémentaire, on peut, avec M. de Saint-Venant, démontrer l'exactitude, les hypothèses convenables étant faites, de la réduction dont il s'agit.

Soient deux molécules séparées par la distance mn.

Une dilatation δ_z déplace n, par rapport à m, d'une longueur nn_1 parallèle à z et exprimée par :

$$nn_1 = \delta_z r \cos(r, z).$$

Un rétrécissement angulaire α_{xz} ou α_y, déplace n par rapport à m, d'une longueur nn_2 parallèle à z et égale à :

$$nn_2 = \alpha_{xz} r \cos(r.x).$$

Si les actions intermoléculaires ne dépendent que de la distance, les actions développées entre les molécules m, n dans la direction mn par ces deux déformations seront donc K étant une certaine constante, représentées par :

$$K\delta_z r \cos(r,z) \quad \text{et} \quad K\alpha_{xz} r \cos(r,x).$$

Si l'on cherche la force élastique exercée sur un plan quelconque que l'on désignera par q, et la composante de cette force suivant x, composante que l'on désignera par P_{qx}, cette composante sera la somme des projections, suivant l'axe des x, des actions exercées entre deux molécules m et n situées de part et d'autre du plan. Tous les termes de cette somme qui contiennent δ_z ont la forme :

$$K\delta_z r \cos(r,z) \cos(r,x),$$

et le coefficient de δ_z dans P_{qx} est

$$\Sigma K r \cos(r,z) \cos(r,x).$$

On trouve de même que le coefficient de α_{xz} ou α_y dans P_{qx} est

$$\Sigma K r \cos(r,x) \cos(r,z);$$

ces deux coefficients sont donc identiques.

On trouve ainsi que le coefficient de δ_z dans P_{xx} ou N_x, c

B_y, est égal au coefficient de α_{xz} ou α_y dans P_{xz} ou T_y, c'est-à-

Des raisonnements analogues au précédent permettraien cinq autres relations, au moyen desquelles le nombre des élastiques serait réduit à 15.

Le cas hypothétique qu'on vient d'examiner n'est pas celui cristallisés. Il était cependant intéressant de l'étudier, car l'observation constatera entre les valeurs réelles des constant qu'elles auraient si les coefficients pouvaient être réduits en quelque sorte une mesure des variations que produisen forme et l'orientation des molécules, les déformations élastiq

Mais l'étude que nous venons de faire présente un autre g térêt, car il est aisé de voir que l'hypothèse qui lui sert d réalise dans les corps dits isotropes. Dans ces corps en effe généité ne peut être conçue qu'en admettant que, suivant tou rections, se rencontrent en même nombre, sur une même lon petite, des molécules ayant toutes les orientations possibles vient évidemment à admettre que l'orientation et la forme de cule sont sans influence sur les propriétés physiques du co les corps isotropes, pour lesquels l'ellipsoïde d'élasticité est rement une sphère, les 2 constantes élastiques A et B, qui re tinctes dans les corps cristallisés à symétrie cubique, se ré une seule, puisqu'on doit avoir :

$$B = \mathscr{A} = \frac{1}{2}(A - B),$$

ou :

$$B = \frac{2}{3} A.$$

Observations de M. Voigt sur l'élasticité du sel ge

La science ne compte encore qu'un très petit nombre d'obs faites en vue de déterminer les constantes élastiques des M. Voigt[1] a cependant, assez récemment, publié d'intéressant vations sur l'élasticité du sel gemme qui cristallise dans le cubique.

M. Voigt a mesuré, par la méthode de la flexion, les co

1. *Pogg., Ann.*, Ergänzungsband, t. VII (1875-1876).

'élasticité E correspondant à trois directions, la première c coïncidant avec un axe cubique, la seconde d, avec un axe dodécaédrique ou inaire, la troisième o, avec un axe octaèdrique ou ternaire. M. Voigt trouvé :

$$E_c = 4103$$
$$E_d = 3410$$
$$E_o = 3193.$$

Ces trois nombres devraient être identiques en vertu de la théorie, on voit qu'ils diffèrent d'une manière fort notable, et que E_c est surtout très différent des deux autres. L'écart relatif entre E_c et E_o est de plus de 20 pour 100.

Pour relier ses observations entre elles, M. Voigt s'est servi de formules données par Neumann et qui ne diffèrent des nôtres qu'en ce que le coefficient $\mathcal{A}$ est supposé indépendant de A et de B et non plus égal à $\frac{A-B}{2}$. C'est à ce résultat qu'on arrive en effet lorsqu'on écrit dans les formules que les cristaux cubiques possèdent trois plans de symétrie respectivement normaux à trois axes perpendiculaires et identiques entre eux, sans tenir compte de la symétrie qui existe par rapport aux six plans normaux binaires. Cela revient, en d'autres termes, à supposer dans l'espèce actuelle que la symétrie du sel gemme est seulement terbinaire avec une quasi égalité et non pas une identité complète des trois axes binaires.

Quoi qu'il en soit, les formules de Neumann représentent bien les observations, car M. Voigt trouve

	E_c	E_d	E_o
calculé	4108	3391	3204
observé	4103	3410	3193.

M. Voigt a ajouté aux observations faites sur la flexion, des observations sur la torsion de prismes rectangles dont les axes étaient aussi dirigés suivant les trois directions précédemment définies. En combinant entre elles toutes les données expérimentales, M. Voigt a déduit pour les constantes élastiques du sel gemme les nombres suivants :

$$A = 845$$
$$B = 550$$
$$\mathcal{A} \quad 113,$$

l'unité de force étant le kilogramme et l'unité de longueur millimètre.

En admettant que le sel gemme est réellement cubique, e posant exacts les coefficients A et B, la théorie exigerait

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}(A - B) = 147.$$

La différence entre ce nombre et celui qui est donné par tion s'atténuerait si l'on tenait compte de ce que M. Voigt a empl calculer $\mathcal{A}$ des formules données jadis par Cauchy pour des prismes rectangulaires et que M. de Saint-Venant a démon inexactes. D'après M. de Saint-Venant, la différence entre les donnés par la formule et les résultats exacts s'élève, lorsque est un rectangle dont un côté est de 3,5 à 3,8 fois plus g l'autre, comme il arrive dans les observations de M. Voigt, Si l'on faisait cette correction à la valeur de $\mathcal{A}$ observée par on trouverait $\mathcal{A} = 128$ qui se rapprocherait de la valeur thé peu plus que le nombre donné par M. Voigt.

Quoi qu'il en soit, l'inégalité, qui paraît bien constatée, de les différentes directions contredit formellement la théorie, à r le sel gemme, au moins sous le rapport élastique, ne jouisse p ment de la symétrie cubique. Nous verrons en effet plus loin q grand nombre des cristaux cubiques ne possèdent, au point d tique, qu'une symétrie inférieure à celle qui semblerait devoi partenir; le sel gemme est précisément dans ce cas. Il serait ressant que de nouvelles expériences vinssent faire la lumière partie encore obscure de la science.

Expériences de M. Groth sur l'élasticité du sel ge M. P. Groth[1] a employé, pour trouver les modules d'élasti sel gemme, suivant différentes directions, un procédé ingéni est d'un emploi plus commode que celui de M. Voigt. Il pose même planchette élastique une barre d'acier, dont l'éla connue, et la petite barre cristalline dans laquelle on veut la On fait vibrer la barre d'acier au moyen d'un archet, les vib transmettent à la barre cristalline, et les deux barres exéc vibrations concordantes. Du sable fin, répandu sur la surface barres, permet de mesurer la distance de deux nœuds, d'où

1. Pogg., *Ann.*, 1875.

éduire, par une formule connue, le rapport de leurs coefficients d'élasticité. Les mesures faites par M. Groth sont assez d'accord avec celles de M. Voigt, et la facilité relative du procédé qu'on lui doit permet d'espérer qu'on pourra étendre à un grand nombre d'espèces cristallines, les expériences faites sur le sel gemme[1].

Expériences anciennes de Savart. — Le procédé de M. Groth a quelque analogie avec celui qui a été employé jadis par Savart, dans une série d'expériences célèbres[2].

Savart faisait vibrer non pas de petites barres cristallines, mais des plaques découpées dans le cristal suivant différentes directions, et dont il étudiait l'état vibratoire au moyen de sable répandu sur leur surface. On connaissait encore bien moins que maintenant une théorie générale de la vibration des plaques, et la théorie de l'élasticité cristalline était encore à naître. Savart, avec une remarquable intuition des phénomènes, considéra un cristal comme un corps n'ayant pas la même élasticité suivant différentes directions. Il commença donc par expérimenter sur un corps non cristallisé, mais qui ne possédait pas les mêmes propriétés dans tous les sens, et dont on connaissait assez bien le mode de structure intérieure. Le corps choisi fut une bille de bois, découpée dans un tronc aussi régulier que possible. On découpait les plaques dans cette bille, soit perpendiculaires, soit parallèles à l'axe du tronc, soit inclinées d'une manière quelconque. En comparant ensuite le mode de vibration de ces plaques ligneuses avec des plaques découpées suivant certaines directions dans des cristaux de quartz ou de calcite, Savart montra que l'élasticité varie dans chacune de ces substances lorsqu'on fait varier la direction de la plaque. Entre autres résultats intéressants il constata que les plaques découpées dans le quartz parallèlement aux faces p ne vibrent pas comme celles qui sont découpées parallèlement aux faces $e\frac{1}{2}$.

Le procédé de Savart, quelque ingénieux qu'il soit, est trop imparfait pour donner des résultats numériques précis. Il ne peut guère servir qu'à donner une idée des variations qui se produisent avec la direction dans l'élasticité des cristaux. Nous n'entrerons donc pas sur ce sujet dans de plus longs détails.

1. Les *Annales* de Poggendorf (t. 152) contiennent une série d'expériences faites sur l'élasticité de la calcite, par M. Baumgarten. Ces expériences sont faites, comme celles de M. Voigt, par le procédé de la flexion, et ne conduisent par conséquent à aucune donnée précise sur les constantes élastiques de la calcite.

2. *Annales de chimie et de physique*, t. I, 8-40, 1829.

CHAPITRE III

CLIVAGES ET PLANS DE FISSURE

Clivages. — Leur position possible dans les divers cristallins. — On a déjà parlé, dans la première partie d vrage, de la propriété si curieuse et si caractéristique du cl ne peut se rencontrer que dans les corps cristallisés; dans la possèdent, on peut, comme on le sait, provoquer des rigoureusement planes. On ne reviendra pas ici sur l'expli simple que l'on peut donner de ce phénomène et qui a été loppée (tome I, chap. XVI, pages 302 et suiv.). On rappell ment qu'il résulte de cette explication que les plans de *cliv* à-dire les plans parallèlement auxquels peuvent être provo cassures planes, sont nécessairement des plans réticulaires maille a une aire très petite, ou, ce qui revient à peu près dont la notation symbolique est très simple.

L'observation vérifie pleinement cette conclusion théori montre qu'il n'y a, dans chaque système cristallin, qu'un bre de formes simples parallèlement aux faces desquelles p placer les clivages. En voici l'énumération complète :

Système cubique. — *Cube* (Galène, Sel gemme).
Octaèdre (Fluorine, Cuprite).
Dodécaèdre (Blende, Sodalite).

Ces trois positions du clivage correspondent aux trois mod lesquels le réseau peut être disposé dans ce système.

SYSTÈME HEXAGONAL. — *Base p* (Émeraude, Pyrosmalite, Zincite).
Prisme m (Apatite, Néphéline, Zincite, Greenockite, etc.)
Isoscéloèdre b^1, rare et imparfait (Pyromorphite, etc.)

a prédominance du clivage *p* ou celle du clivage *m* dépend de la grandeur du rapport $\frac{h}{a}$.

SYSTÈME TERNAIRE. — *Rhomboèdre p* (Calcite, etc.)
Base a^1 (Mica, Chalcophyllite, Antimoine, etc.)
Prisme d^1 (Cinabre).

SYSTÈME QUADRATIQUE. — *Base p* (Uranite, Apophyllite).
Prismes m ou h^1 (Rutile, Wernérite, Zircon).
Octaèdre a^1, rare (Schéelite, Wulfenite).

SYSTÈME TERBINAIRE. — *Plan* g^1 (Stibine).
Plan h^1, rare (Anhydrite.)
Base p (Topaze, Prehnite, Barytine).
Prisme m (Barytine, Cérusite).
Octaèdre $b^{\frac{1}{2}}$ (Soufre).

SYSTÈME BINAIRE. — *Plan* g^1 (Gypse, Stilbite, Orthose).
Plan h^1 (Épidote).
Base p (Orthose, Clinochlore, Épidote).
Prisme m (Amphibole, Pyroxène).
Clinodome e^1 (Azurite).
Orthodome a^1 *ou* o^1 (rares).
Hémipyramide $b^{\frac{1}{2}}$ (Gypse).

SYSTÈME ASYMÉTRIQUE. — *Plan* g^1 (Feldspath triclinique).
Base p (Feldspath triclinique).

Degrés de facilité du clivage dans les diverses substances. — Les clivages sont loin de se produire toujours avec la même facilité. Tantôt, comme dans le mica, le clivage est tellement facile qu'il se produit sous le plus léger effort, et que les cristaux semblent plutôt formés par la superposition de lames parallèles au clivage que par un édifice cristallin régulier. On peut alors, avec la lame d'un canif, détacher des lamelles d'une minceur extrême. Tantôt, au con-

traire, comme dans la calcite, le clivage, bien que facile peut être provoqué sans un effort notable; on n'obtient jama extrêmement minces, et la cassure habituelle du corps n surface irrégulière, qui paraît comme composée de petits parallèles entre eux et au clivage.

La direction du clivage est dans ce cas nettement indiq façon dont la cassure réfléchit la lumière. Lorsqu'en effet, en f ner en divers sens le corps en présence d'une source lum lames planes de la cassure viennent à prendre une position lumière de la source qu'elles réfléchissent est renvoyée à voit les plans de la cassure vivement éclairés tous à la fois. permet de découvrir des clivages très imparfaits, et qui ne s dans la cassure que par une série de petits plans parall largeur très faible. On en augmente d'ailleurs la sensibilité plus d'intensité à la source lumineuse.

Lorsqu'il existe un clivage parallèle à l'une des faces d' simple, il en existe aussi de parallèles à toutes les autres forme. Tous ces clivages sont alors identiques, c'est-à-dire la même facilité, que les lames planes qu'ils mettent à nu o poli, le même genre d'éclat, etc. Tels sont les trois cliva calcite.

Il peut arriver qu'un cristal possède des clivages parallè ou plusieurs formes simples différentes. Dans ce cas ils n identiques entre eux. C'est ainsi que le gypse possède sui clivage tellement facile qu'on peut détacher parallèlement rection des lames d'une très faible épaisseur, très polies, chissantes et possédant un éclat vitreux. Le gypse possède deux autres clivages; l'un parallèle à la face h^1 et, l'autre à la face p. Le clivage h^1 est beaucoup moins parfait que le mais les surfaces planes auxquelles il donne naissance ont en vitreux. Quant au clivage p, moins parfait encore que le p ne donne naissance qu'à des plans peu nets et ayant un aspe

Cette différence d'aspect des clivages appartenant à des form différentes a une grande importance, car elle permet q même dans une masse cristallisée non limitée par un pol tallin, de déterminer le mode de symétrie du réseau. C'est l'anhydrite, dans laquelle on observe trois clivages recta pourrait être considérée comme cubique, s'il n'était aisé de v trois clivages, il n'y en a pas deux qui soient semblables

On en conclut que cette substance appartient au système terbinaire. Le sel gemme, au contraire, qui a trois clivages rectangulaires égaux entre eux, appartient au système cubique.

Constance des clivages dans les cristaux d'une même substance. — En général, une même substance possède toujours les mêmes clivages, quelles que soient les circonstances qui aient présidé à sa cristallisation, et c'est un fait qui ajoute encore à l'intérêt que présente l'observation de ces plans de rupture. Ainsi l'on trouve toujours la galène possédant ses clivages cubiques ; la calcite avec ses clivages rhomboédriques, etc. Cependant les clivages n'ont pas toujours, dans toutes les variétés d'une même substance, le même degré de facilité. Certains échantillons de quartz montrent naturellement des clivages parallèles au rhomboèdre *p*, qui ne se produisent le plus souvent qu'artificiellement et avec une extrême difficulté. Il peut même arriver, pour les substances qui ont plusieurs clivages, que l'ordre de facilité en soit différent dans les différentes variétés de cette substance, et même que certains clivages qui existent dans l'une d'entre elles manquent dans les autres. Le pyroxène, qui cristallise dans le système binaire, en est un exemple remarquable. Les variétés nommées *diopside*, *hedenbergite*, *augite*, possèdent un clivage parfait, quoique interrompu, suivant les faces *m*, et des clivages moins faciles suivant h^1 et g^1. Au contraire dans la variété dite *diallage*, le clivage suivant h^1 devient tellement facile que la matière se lève en lames minces suivant cette direction; le clivage g^1 reste difficile et les clivages *m* paraissent presque complètement supprimés.

Plans de séparation. — La séparation causée par un choc, d'un cristal en deux parties se raccordant suivant un plan cristallin n'est pas toujours due à un clivage. C'est le cas qui se présente lorsque, pendant l'accroissement du cristal, une poussière fine ou de fines lamelles d'une substance étrangère viennent à saupoudrer, à un certain moment, les faces cristallines. Après cet accident le cristal, continuant à s'accroître, englobe, dans son intérieur, ces matières hétéroclites; mais celles-ci n'en produisent pas moins dans la masse des plans de moindre résistance suivant lesquels le cristal tend à se séparer sous l'influence d'une action extérieure. Un semblable accident pouvant se produire plusieurs fois pendant la formation du même cristal, il peut se former ainsi des plans de rupture parallèles entre eux, mais qui ne seront point cependant de véritables directions de clivage. Ce phénomène s'observe quelquefois et d'une manière très nette dans les

cristaux de quartz. On est d'ailleurs averti dans ce cas non se par la présence de matières étrangères saupoudrant les plans clivage, mais encore par cette circonstance que la partie du cri limitent deux plans de rupture ne présente aucune tendanc cassure parallèle. On donne aux plans de rupture, produits cause le nom de *plans de séparation*.

Il y a des cas où la distinction entre les plans de séparati plans de clivage devient assez difficile. C'est ainsi que pour variétés de pyroxène (mussite, malacolite, hédenbergite) qui s en plaques plus ou moins épaisses parallèles à la base *p*, p minéralogistes admettent un vrai clivage suivant cette directio que d'autres ne voient là que des plans de séparation.

Des divers modes de production du clivage. — Fig décollement. — La production de tel ou tel clivage dans u n'est pas tout à fait indépendante du procédé au moyen duqu vage est déterminé. Le procédé ordinairement employé est l dans certains cas, on emploie la dilatation ou la contraction par une variation brusque de la température de cristal. Dans taux de quartz qui se brisent, par le choc, suivant une cass choïdale, Haüy a provoqué des clivages suivant les faces d boèdre *p* en portant ces cristaux à une haute température plongeant ensuite brusquement dans l'eau.

On peut aussi employer d'autres procédés.

Si l'on fait pénétrer de force dans un solide un poinçon a forme légèrement conique, la pression développée sur les p trou creusé par le poinçon peut provoquer, comme on le fissures dans la masse. Dans un cristal ces fissures *sont* planes arriver qu'elles soient parallèles au plan de clivage. En pre exemple une lame de gypse produite par le clivage facile g^1 d'au moins 1 à 2 millimètres; en enfonçant à l'aide d'une lég sion, mais sans choc, et normalement à la plaque, une aig ne soit pas trop fine, on provoque le clivage g^1; deux feuille lèles à ce clivage s'écartent l'un de l'autre, et cet écartement décroissant à partir du trou, donne naissance aux anneaux co Newton. Le feuillet soulevé forme ainsi tout autour de l'aigu surface courbe qui peut être très régulière si l'on opère a caution. M. Jannettaz[1], qui a signalé ce phénomène, a prod

1. *Bull. de la Soc. min.*, t. II, n° 1, 1879.

des surfaces dont l'intersection avec le plan de la lame donnait une ellipse dont le grand axe était au petit dans le rapport de 1,247 à 1. Le grand axe faisait un angle de 17° avec la trace du clivage vitreux h^1, et un angle de 49° avec la trace du clivage fibreux p. La longueur d'un rayon vecteur de cette ellipse représente la longueur de la portion de la lame fléchie suivant cette direction ; elle doit donc avoir des rapports étroits avec l'élasticité du cristal suivant la même direction. M. Jannettaz a signalé ce fait très curieux que l'orientation et la grandeur relative des axes de cette ellipse sont précisément les mêmes que celles des axes de l'ellipse de conductibilité calorifique que l'on peut observer sur la lame de gypse. (Voy. plus loin, chap. III.)

Production des plans de choc ou de glissement. — Le plus souvent la pénétration du poinçon produit des plans de fissure suivant lesquels ne se produit ni la rupture du cristal, ni le décollement de feuillets parallèles. Ces plans de fissure peuvent être observés soit par leur trace sur les plans cristallins, soit, dans les corps transparents, par la réflexion de la lumière qui se produit à leur surface. Il est rare que ces fissures courent dans toute la masse du cristal ; le plus souvent elles ne s'étendent qu'à une distance peu considérable de part et d'autre du trou produit par le poinçon. Il peut arriver que la fissure grandisse peu à peu et pendant un temps plus ou moins long après le moment où elle a pris naissance ; il peut arriver au contraire que la fissure provoquée disparaisse complètement au bout de quelque temps. Des phénomènes de cette nature s'observent aussi avec les fissures produites dans un corps isotrope tel que le verre. On peut d'ailleurs varier les conditions de l'expérience en prenant pour l'instrument perforant soit un poinçon à pointe très obtuse, soit une aiguille à pointe plus ou moins fine, ou en plaçant le cristal soit sur une lame de verre rigide, soit sur une lame de verre recouverte d'une lame de caoutchouc. On n'obtient pas toujours ainsi les mêmes directions de fissure. Je citerai quelques-uns des curieux résultats obtenus par M. Reusch.

Lorsqu'on choque avec une pointe mousse une lame de mica reposant sur une lame de verre, ou lorsqu'on enfonce dans cette lame la pointe d'une aiguille, il s'y développe des fissures régulières divergeant du point choqué qui rencontrent le plan de la lame suivant trois droites également inclinées les unes sur les autres, et parallèles aux côtés de l'hexagone qui limite le cristal de mica. Les plans de fissure correspondant à ces trois directions ne sont pas disposés de la même

façon; à l'une d'entre elles correspond une fissure nette et norm
la lame; à chacune des deux autres directions correspondent
ou même trois plans de fissure, obliques sur le plan de la
M. Tschermak a déduit de ces observations que le mica ne peut
ni la symétrie hexagonale ni la symétrie ternaire, mais tout au p
symétrie terbinaire.

Lorsqu'en employant encore une pointe mousse on choque une
de mica reposant non plus sur une lame de verre, mais sur une
de verre recouverte de caoutchouc, il se produit encore trois dire
de fissures, mais les traces en sont normales à celles que l'on
loppe par le premier procédé. Les plans des trois fissures sont ob
et également inclinés sur la lame.

La différence des effets produits avec le support en verre et le
support recouvert de caoutchouc, vient sans doute de ce que
ticité de ce dernier permet aux deux parties du cristal séparé
les plans de fissure de prendre l'une par rapport à l'autre d
légers déplacements; l'une des parties glisse en quelque sor
le plan de fissure. Aussi M. Reusch nomme-t-il *plans de choc* (s
figuren) les fissures obtenues avec le support rigide et *plans de*
ment (leitfiguren) les fissures obtenues avec le support élastique.

Ces plans ne sont pas toujours différents les uns des autres, c
cela a lieu dans le mica. C'est ainsi qu'en choquant sur un s
rigide ou non, une lame de sel gemme avec un poinçon à poi
tuse, on produit des plans de fissure très nets et parallèles au
du dodécaèdre rhomboïdal b^1. Si le choc est trop brusque et tro
gique, le cristal se brise, mais suivant les faces du clivage cu
et non pas suivant les directions de ces plans de fissure.

Le choc d'un poinçon ou la pression produite par la pointe
aiguille développe dans une lame de gypse, quelle que soit la
du support, une fissure unique qui traverse le trou en s'étend
peu de chaque côté. Le plan de la fissure est perpendiculaire
lame du clivage; il est, d'après M. Reusch, parallèle à la face

M. Reusch indique un autre procédé pour développer dans le
ces plans de fissure $a\ \frac{9}{5}$. On serre la lame de gypse avec la main
entre deux règles dont les bords, qui se correspondent, sont
à peu près suivant la direction du clivage fibreux p. On place un
sième règle sur la portion débordante de la lame de gypse, bord
avec la règle supérieure, puis on donne à cette troisième rè

coup sec dirigé de haut en bas. Le choc ainsi dirigé développe à la fois le clivage fibreux et le plan de fissure $a\frac{9}{8}$, suivant lequel la lame peut se briser et qui devient ainsi un véritable plan de clivage.

On peut encore produire par d'autres moyens les plans de fissure observés par M. Reusch. Ce savant prend une plaque carrée de sel gemme assez épaisse, limitée par les plans de clivage parallèles aux faces du cube. Il abat deux angles opposés A et B (fig. 9) de la plaque ; il recouvre les petites faces artificielles A et B (parallèles à des faces dodécaédriques) de feuilles de carton, et exerce sur elles une pression énergique dans le sens AB. On constate, par les phénomènes optiques dont on parlera plus loin, que la pression développe dans toute la masse du cristal des déformations qui persistent, au moins en partie, après que la pression a cessé. Cette observation intéressante montre que la *plasticité*, très faible dans la plupart des cristaux, ne peut pas cependant être considérée comme nulle. Si la pression est poussée assez loin, on voit se produire des fissures parallèles à celles des faces du dodécaèdre rhomboïdal b^1 qui sont normales à la surface de la plaque. En comprimant suivant l'axe un prisme de sel gemme, dont les faces sont encore parallèles aux clivages, on développe des fissures dodécaédriques parallèles aux arêtes de la base du prisme, et inclinées par conséquent de 45° sur cette base. La longueur du prisme peut être en outre diminuée, d'une manière permanente, de 7 à 8 pour 100.

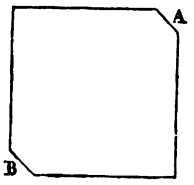


Fig. 9.

Dans la calcite, qui se clive si aisément, suivant les faces du rhomboèdre p, les plans de glissement provoqués par le procédé qui vient d'être décrit, sont dirigés suivant les faces du rhomboèdre inverse b^1, et la production en est accompagnée de phénomènes extrêmement remarquables; mais ils ont des rapports tellement intimes avec ceux de l'hémitropie, que nous devons en reporter l'étude au chapitre dans lequel nous parlerons de ces derniers.

Il est clair que les plans de choc ou de glissement sont, comme ceux de clivage, des plans pour lesquels la cohésion normale est relativement minima, et la cohésion tangentielle relativement maxima. Ces plans doivent donc se rencontrer, comme ceux du clivage, parmi les plans à maille réticulaire petite. Les exemples précédents vérifient bien cette conclusion; il faut cependant faire exception pour le sin-

gulier plan de glissement développé dans le gypse para
à $a\frac{9}{5}$. Quant aux raisons probablement multiples pour lesque
ou telle action mécanique développe tels ou tels plans de fi
est impossible, dans l'état actuel de la science, de s'en rendre
d'une manière quelque peu précise.

CHAPITRE IV

DURETÉ

Définition de la dureté. — Échelle de Mohs. — Malgré l'importance pratique du caractère de la dureté dans les études minéralogiques, il est difficile d'en donner une définition précise.

On dit qu'un corps A est plus dur que le corps B, lorsque, taillé en pointe, promené sur le corps B, et soumis à une pression convenable, il détermine sur celui-ci une rayure, c'est-à-dire une désagrégation linéaire plus ou moins profonde.

Si A raie B, l'inverse n'a pas lieu, et B taillé en pointe ne peut, quelle que soit la pression exercée, désagréger A; sous l'augmentation graduelle de pression la pointe de B se brise avant qu'aucune rayure se soit produite sur A.

D'un autre côté si A raie B, il raiera toutes les substances que raie B lui-même.

On a donc pu se servir de ces remarques pour dresser des *échelles*, comprenant un nombre plus ou moins grand de corps rangés suivant l'ordre croissant des duretés. Lorsqu'on veut donner une idée de la dureté d'un corps quelconque, on la comprend entre celle de deux corps de l'échelle; l'un rayant le corps donné et l'autre en étant rayé.

L'échelle la plus usuelle est la suivante qui est due à Mohs :

1. Talc.	6. Orthose.
2. Gypse.	7. Quartz.
3. Calcite.	8. Topaze.
4. Fluorine.	9. Corindon.
5. Apatite.	10. Diamant.

Pour définir la dureté d'un corps, on dit, par exemple, que celui-ci

est rayé par l'orthose et raie l'apatite ; ce qu'on peut encore en disant que la dureté est comprise entre 5 (numéro d'ordre tite dans l'échelle) et 6 (numéro d'ordre de l'orthose), ou e la dureté est 5,5.

On comprend qu'on pourrait ainsi ranger tous les corps de suivant l'ordre croissant des duretés, mais la dureté elle-m une propriété inabordable à toute spéculation mathématique rait éclairer l'expérience et en augmenter la portée, car l dont elle a été définie n'en fait pas une *quantité*.

Expériences scléromètriques. — Seebeck a eu le premier mesurer la dureté relative de deux corps en cherchant la pres faut appliquer sur le corps rayant pour commencer à pro rayure. Ce procédé, d'un emploi fort délicat, surtout à ca difficulté d'apprécier le moment où commence la rayure, a ét œuvre par Franz[1], par MM. Grailich et Pekarek[2], et plus r par M. Exner[3]. Nous allons exposer les principaux résultat par ces observateurs.

L'instrument utilisé dans ces recherches et que Franz a dés le nom de *scléromètre* se compose essentiellement d'un petit (fig. 10) porté par des r biles sur des rails para chariot est sollicité à se par un fil passant sur u fixe et tiré à son extré un poids P. Le chariot plateau E, maintenu l par des vis calantes ; su

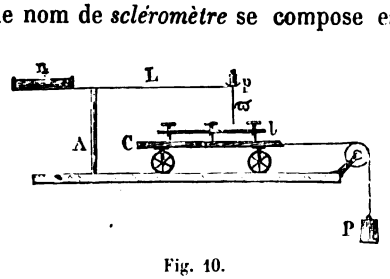


Fig. 10.

teau est un limbe divisé, au centre duquel une pièce mobile autou porte la plaque cristalline, à laquelle on peut ainsi donner des variés et mesurés avec précision. Un levier L, supporté par un pil porte d'un côté le niveau *n* qui en marque l'horizontalité, c côté une tige d'acier ϖ terminée par une pointe fine qui rep plaque cristalline. Un plateau fixé sur le levier au-dessus de reçoit des poids qui mesurent la pression exercée sur celle-c

La plaque cristalline étant placée dans un azimuth tel que tion des rails soit parallèle à une ligne cristallographiquem

1. *Pogg., Ann.*, V, 80, p. 37, 1850.
2. Wien., *Ak. Sitzb.*, V. 13, p. 410, 1854.
3. *Untersüchungen über die Härte an Krystallflächen.* Wien., 1873.

on dispose le levier de manière qu'il soit horizontal lorsque la e d'acier touche le cristal. On ajoute alors les poids p qui pro-nt et mesurent la pression exercée sur la pointe; puis on ente le poids P jusqu'à ce qu'il se produise un mouvement très du chariot, et on observe à la loupe le travail de la pointe. On ente graduellement les poids p jusqu'à ce qu'on voie se produire ommencement de rayure.

anz a trouvé, en opérant sur les substances comprises dans elle de Mohs, avec une pointe d'acier d'abord, puis avec une pointe iamant, les résultats suivants :

	POIDS dont il faut charger la pointe pour produire une rayure.	
	Pointe d'acier.	Pointe de diamant.
Gypse	1gr,5	»
Calcite	9gr,0	»
Fluorine	36	»
Apatite	163	12gr
Orthose	260	20
Quartz	»	34
Topaze	»	43
Corindon	»	51

L'acier dont se servait Franz se rayait avec le diamant sous une harge de 23 grammes. Il ne faut d'ailleurs pas attacher à ces nombres rop d'importance, car nous allons voir que la dureté est bien loin d'être la même pour toutes les faces d'un même cristal.

Il faut remarquer que le tableau précédent montre qu'une même substance, pour être rayée par deux corps différents A, B, exige que ces corps soient pressés par des poids P, P′, très différents l'un de l'autre.

Expériences de Grailich et Pekarek sur la calcite. — Relation de la dureté avec les clivages. — Mais les observations les plus intéressantes faites avec le scléromètre sont celles qui ont eu pour but de découvrir la loi de variation de la dureté suivant les diverses directions. Les observations de Grailich et Pekarek sur la calcite donnent une idée très précise du phénomène.

Soit d'abord une lame de calcite parallèle à un clivage rhomboédrique. A (fig. 11) est l'angle culminant, E, E′, E′ les angles latéraux; B, B les arêtes culminantes; D, D les arêtes latérales. Nous distinguons :

1° Les directions AE et EA suivant la petite diagonale;

2° La direction E'E' suivant la grande diagonale ;

3° Les directions $p_b\, p_d$ et $p_d\, p_b$ parallèles à une arête,

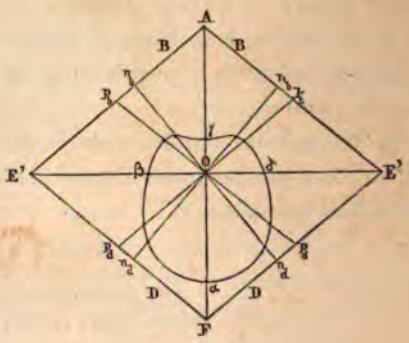


Fig. 11.

première d'une arête B à une arête D, la seconde d'une arête B ;

4° Les directions $n_b\, n_d$ et $n_d\, n_b$ perpendiculaires à une

Voici quels ont été les poids dont il a fallu charge d'acier pour produire une rayure suivant ces différentes d

AE	2gr,85
$n_b\, n_d$	2gr,50
$p_b\, p_d$	2gr,13
E'F'.	1gr,52
$p_d\, p_b$	1gr,37
$n_d\, n_b$	1gr,26
EA	0gr,96.

Pour représenter les variations de la dureté avec la dire prendre, à partir du centre O de la surface. et sur cha une longueur égale au poids qui représente la dureté co On obtient ainsi la *courbe des duretés*. Cette courbe doit ment symétrique, par rapport à AE puisque cette droite est du plan du rhombe par le plan de symétrie qui lui est per

Franz avait constaté ces curieuses variations, et il sur l'écart considérable qu'il peut y avoir entre la dureté c aux deux directions opposées d'une même droite. Il avait es

quer ces faits en remarquant que les diverses directions ne rencontrent pas les plans de clivage sous le même angle. Suivant la direction $p_b\ p_d$ par exemple, l'angle obtus formé par le poinçon et le plan de l'un des deux clivages qui coupent la lame est en arrière du sens du mouvement; en supposant le corps formé par une accumulation de feuillets parallèles à ce clivage, la pointe P qui se promène sur la tranche de ces feuillets tend à les coucher; suivant la direction $p_d\ p_b$, le contraire a lieu et la pointe tend à soulever les feuilets, en les prenant en quelque sorte à *rebrousse-poil*. Il n'est pas étonnant que la dureté se montre différente dans des conditions si évidemment dissemblables. L'observation montre d'ailleurs que dans les cristaux lorsque le mouvement de la pointe tend à rebrousser ou à lever les lames de clivage, la dureté est moindre que dans le sens contraire.

Si, au lieu d'être parallèle à un plan de clivage, la plaque est parallèle à un plan a^1 (111) perpendiculaire à l'axe ternaire, on trouve les résultats suivants :

B*n*. (fig. 9).	4gr,89
pp.	4gr,45
*n*B.	3gr,63.

Les duretés maxima et minima se produisent suivant l'intersection de la plaque avec le plan de symétrie. La dureté minima de la plaque parallèle à a^1 est d'ailleurs très supérieure à la dureté maxima de la plaque parallèle à *p*.

La courbe $\alpha\beta\gamma\beta'$ de la figure 9 représente, à la même échelle que dans la figure précédente, la courbe des duretés qui est nécessairement symétrique par rapport aux trois lignes OB, suivant lesquelles la plaque est coupée normalement par les plans de symétrie du cristal.

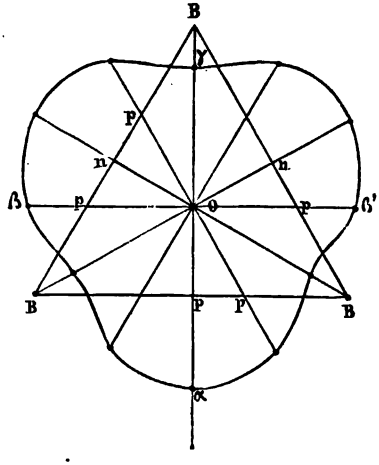


Fig. 12.

On taille la lame parallèlement à l'une des faces du prisme d^1 ($\bar{1}10$), et on essaie les duretés suivant

les intersections de la lame avec les plans du rhon
On obtient les résultats suivants :

e'a. (fig. 10)..	6gr,12
ae'.	6gr,12
ea	7gr,65
ae.	7gr,65.

La dureté suivant les droites *ae*, *ae'*, c'est-à-dire s
diagonale et le côté de la face du rhomboèdre primit
essayée dans le cas où ces droites sont tracées da
cette face. Les pressions qui mesurent cette dureté son
moins grandes que dans le cas actuel.

La courbe des duretés a un centre de symétrie, pui
binaires est perpendiculaire à la face.

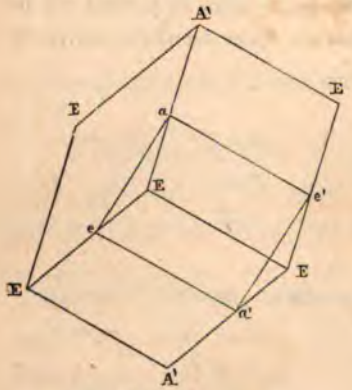


Fig. 13.

Fig.

Enfin on taille la lame parallèle à l'une des faces du p
On observe les nombres suivants :

EE (fig. 11)	(grande diagonale du rhombe).	6gr
bf	(parallèle à l'axe ternaire). . .	5gr
fb	— — — . . .	9gr

Le plan e^2 est donc celui dans lequel se trouve compri
de plus grande dureté, et celui dont la dureté moye
grande, tandis *que les plans de clivage sont ceux où l
plus faible*. La courbe des duretés est symétrique par ra

Expériences de M. Franz Exner. — M. Franz E

1. Untersüchungen über die Härte an Krystallflächen, von
Wien, 1873.

les expériences de Grailich et Pekarek, et a soumis à l'observation un nombre assez considérable de substances appartenant à divers systèmes cristallins. Il a constaté, comme ses devanciers, que la dureté ne paraît pas dépendre directement de la forme cristalline, quoique, pour une même substance, les variations en soient nécessairement soumises, comme celles de toutes les propriétés physiques, aux lois de la symétrie propre au cristal.

M. Exner a vérifié également que les variations de la dureté suivant les différentes directions sont surtout liées à l'orientation de ces directions par rapport aux plans de clivage. Dans deux substances, le chlorate de soude cubique, et l'hyposulfite de plomb hexagonal, qui sont dépourvues de clivage, les courbes de dureté sont toutes circulaires, et la dureté est la même suivant toutes les directions.

M. Exner a cherché à représenter par une formule empirique, la loi de variation de la dureté suivant toutes les directions d'un même plan. Il a pu satisfaire convenablement aux observations au moyen de la formule suivante :

$$= a + b \sin \psi \pm c \sin \psi + \ldots\ldots + b \cos A \sqrt{\sin \varphi} \pm c \cos B \sqrt{\sin \psi} + \ldots\ldots$$

dans laquelle a est une constante, φ l'angle de la direction considérée avec l'un des clivages, et b une constante dépendant de la plus ou moins grande facilité de ce clivage; c et ψ sont des quantités analogues se rapportant à un second clivage, etc.; enfin A est l'angle du premier clivage avec le plan considéré, le cosinus étant pris comme positif lorsque la direction dont il s'agit va de l'angle obtus à l'angle aigu de deux plans, et comme négatif dans le cas contraire; B, C.... sont des quantités analogues se rapportant aux autres clivages.

Essai d'une théorie rationnelle de la dureté. — Relation entre la dureté et le coefficient de frottement. — Pour tirer parti, au point de vue théorique, des observations faites sur la dureté, il faudrait avoir une définition précise de cette propriété physique. On peut essayer tout au moins une analyse exacte du phénomène.

Lorsqu'un corps glisse sur la surface d'un corps solide, que l'on supposera plane, les deux corps réagissent l'un sur l'autre. Une force, qu'on appelle force de frottement, peut-être supposée appliquée au corps mobile, et est égale à chaque instant à fP ; P étant la pression exercée sur la surface, et f un coefficient qui dépend de la nature des deux corps en présence. La réaction de cette force de frottement est appliquée

aux molécules du corps frotté voisines de la surface. Cel parallèlement à cette surface et dans le sens du mouv frottant. Des réactions élastiques sont ainsi mises en jeu déplacées de leur position d'équilibre, sont entraînées où la force élastique fait équilibre à l'action extérieur tant. Arrivées en ce point, elles reviennent en vibr mière position ; ces vibrations sont accompagnées de ph rifiques sur lesquels nous n'avons pas à nous arrêter. Si par le corps frottant, croissant avec la pression, devier les molécules peuvent être entraînées hors de la sph de leurs voisines, et se séparer du corps qui se dés lement.

Si le corps frottant se termine en pointe, la pression rapport de la réaction normale à la surface pressée, devi cette surface étant très petite ; l'action sur les molécul très forte, et comme elle ne s'exerce que sur un nombr elles, la désagrégation se produit pour une réaction pointe relativement faible en valeur absolue. Cette dés se produit dans un rayon très limité autour de la poin le mouvement de celle-ci est la *rayure*.

La rayure et le frottement sont donc deux phénomè ordre, et il est très vraisemblable que pour étudier la façon complète, il faudrait faire, sur la valeur du coeffi ment f dans les cristaux, des expériences délicates sa qui ne paraissent point impraticables.

Supposons donc une pointe dont la très petite surface unité ; la réaction tangentielle des forces élastiques est poids dont la pointe est chargée normalement. La forc libre à toutes les forces développées par l'écartement de leurs positions d'équilibre.

Si le point se déplace de dr, le travail du frottement par $fPdr$, et il est égal au travail moléculaire vibratoire d le corps pendant le déplacement. A mesure que P devie l'écartement des molécules va en croissant, ainsi que la f ment, qui est toujours représentée par fP. La rayure comm duire au moment où les forces élastiques développées dépassent la limite de résistance dont les actions moléculair tibles. Il y a alors désagrégation d'une certaine partie du c longueur dr, et sur une largeur et une profondeur égal

d'activité dl des actions exercées entre la pointe et la surface. Le volume désagrégé est ainsi $dr\,dl^2$, et si T est le travail nécessité par la désagrégation de l'unité de volume, on a :

$$fPdr = Tdl^2dr,$$

ou

$$fP = Tdl^2.$$

Sur la même surface plane, Tdl^2 est évidemment constant, quelle que soit la direction de la pointe. Il en est donc de même de fP, et P doit être ainsi en raison inverse de f. *La dureté*, qui est proportionnelle à P *est donc, pour les différentes directions d'un même plan, en raison inverse du coefficient de frottement f.*

C'est en effet ce que l'expérience vérifie, car elle montre que la dureté est plus grande lorsque la pointe tend à coucher les lames de clivage que lorsqu'elle tend à les relever ou qu'elle les prend à *rebrousse-poil;* or on comprend que le frottement doit être plus faible dans le premier cas que dans le second. C'est au reste ce qu'on peut voir par un raisonnement très simple. Soit en effet une surface S (fig. 15) coupée par des plans réticulaires de clivage AB, CD, et en A une pointe se mouvant dans la direction AC′. La molécule A de la surface est ainsi sollicitée à se mouvoir dans la direction AC′, et dans ce trajet elle est soumise à l'action des molécules du plan réticulaire AB qui, étant par hypothèse un plan de clivage, est un plan suivant lequel les actions moléculaires sont très intenses. La molécule A résistera donc avec plus d'énergie au déplacement de A vers C′, et le frottement sera plus grand lorsque la pointe ira de A vers C′ que lorsqu'elle ira de A vers C.

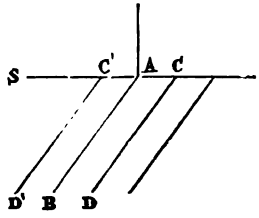


Fig. 15.

Lorsque la surface de frottement n'est plus la même, on peut se demander si le travail de désagrégation par unité de volume est le même ; je pense qu'il doit en être ainsi, car la rayure a pour résultat, non pas le déplacement ou l'extraction hors du corps d'un petit cylindre de longueur dr, mais la transformation en poudre ou la désagrégation complète de ce même cylindre, et on ne voit pas alors pourquoi le travail de désagrégation par unité de volume ne serait pas le même en tous les points du corps. S'il en est réellement ainsi la quantité fP, . .

est constante et, quelle que soit l'orientation de la surface, P varie en raison inverse de *f*.

Il en résulte que les surfaces de clivage qui sont des surfaces d'actions moléculaires maxima, et doivent être par conséquent des surfaces pour lesquelles *f* est maximum, doivent être aussi les surfaces de moindre dureté. On sait que telle est précisément la loi à laquelle ont abouti toutes les expériences faites jusqu'à ce jour. Ainsi se trouve rationnellement expliqué ce fait expérimental, qui semble au premier abord un paradoxe, que la dureté est la plus faible pour les plans qui présentent la cohésion maximum.

Il faut d'ailleurs remarquer que si nous considérons non plus les variations de dureté des surfaces d'un même cristal, mais les duretés de deux cristaux différents, le travail de désagrégation n'est plus le même; il doit être vraisemblablement plus grand dans le cristal qui présente la plus grande concentration de matière, c'est-à-dire dans celui où, toutes choses égales, le volume moléculaire est le plus petit. C'est en effet ce que semblent montrer les duretés comparées des corps isomorphes.

Je me suis étendu sur les expériences relatives à la dureté des minéraux non seulement parce qu'elles sont peu connues en France malgré leur intérêt théorique, mais encore parce qu'elles me paraissent de nature à trouver un emploi dans la pratique de la métallurgie. La dureté d'un métal est très souvent en effet une propriété du premier ordre, et même la propriété qui règle le prix de la matière. Je crois que les métallurgistes pourraient trouver, dans l'emploi du scléromètre, un moyen de définir cette propriété avec plus de rigueur qu'on n'a pu le faire jusqu'ici. Si je ne me trompe, les essais de l'acier au scléromètre trouveraient avantageusement place à côté des essais, devenus aujourd'hui si habituels, sur l'élasticité et la ténacité du métal.

CHAPITRE III

PHÉNOMÈNES THERMIQUES

PREMIÈRE SECTION

PROPAGATION DE LA CHALEUR

Définition de la température d'un point du corps. — Nous nous proposons d'étudier la propagation de la chaleur dans un corps solide cristallisé, lorsque l'état thermique de ce corps est devenu permanent. Cet état est défini par la température en chaque point. Il est d'abord nécessaire de préciser la signification de cette donnée physique.

On dit qu'un corps est à une température uniforme θ, quand une portion quelconque de ce corps supposée séparée de la masse totale est incapable d'échanger de la chaleur, soit avec une autre portion du corps, soit avec un autre corps quelconque à la température θ. Dans cet état, chaque molécule du corps ne recevant ni n'émettant aucune quantité de chaleur (ou, ce qui est la même chose, en recevant autant qu'elle en renvoie dans le même temps), est elle-même dans un certain équilibre thermique qu'il serait sans doute impossible de définir avec précision, mais que l'on désigne en disant que la molécule est à la température θ.

Dans un corps inégalement chaud en ses divers points, mais arrivé à un état thermique permanent, chaque molécule ne reçoit de celles qui l'entourent aucune quantité de chaleur; elle est encore dans un état d'équilibre thermique ; mais cet état n'est pas nécessairement identique avec celui qui se produit lorsque le corps est également

chaud dans toute la masse, car la molécule n'est pas, comm dans ce cas, entourée de molécules également chaudes. Il f quer cependant que les variations de chaleur qui se pro passant d'une partie du corps à une partie très voisine so bles; que, d'autre part, le rayon de la sphère décrite du gravité de la molécule comme centre, et au delà de laquell de chaleur avec la molécule est insensible, est très petit et qu ne comprend ainsi que des molécules dont l'état thermiq extrêmement peu. L'état d'équilibre thermique d'une mol donc être regardé comme étant de la même nature que ce produit lorsque le corps est à une certaine température u on dit que la molécule possède cette température θ.

Supposons deux molécules très voisines l'une de l'autre, e désignera par les numéros 1 et 2; l'une est à la température à la température θ_2. L'échange de chaleur entre ces deux serait nul si θ_1 était égal à θ_2. L'échange sera donc causé pa rence $\theta_1 - \theta_2$, différence infiniment petite, si les deux molé infiniment voisines. En vertu de la proportionnalité de l'effet à lorsque celle-ci est très petite, la chaleur envoyée par 1 à 2 proportionnelle à $\theta_1 - \theta_2$, et pourra être représentée par A A étant un coefficient convenablement choisi.

Au point de vue du transport de la chaleur d'une molé autre dans l'intérieur du corps, on peut donc supposer les réduites à des points fictifs qui seront par exemple les centr vité de chacune d'elles. Chacun de ces points sera supposé d certaine température, qui sera celle de la molécule; dans chaque nœud du réseau a ainsi sa température propre. On p senter les températures de tous ces nœuds par une certain continue des coordonnées des nœuds. Cette fonction donne d non-seulement pour les coordonnées de ces points particul encore pour celles d'un point quelconque de l'espace; les cette fonction définissent ce que l'on appelle la température point du corps.

Flux calorifique en un point du corps. — Conducti lorifique. — Cela posé, nous supposons le corps divisé par en deux parties dont l'une, plus chaude, M, envoie de la l'autre plus froide N. Une portion très petite m de M envoie de à une portion très petite n de N, et l'on peut dire que cet

asse par le point O, intersection de P et de mn. La distance mn est écessairement très petite, car dès que la distance devient sensible, la ropagation moléculaire de la chaleur devient insensible. Nous cherhons la somme des quantités de chaleur ui sont ainsi envoyées de M à N, suivant les directions rencontrant P dans l'intérieur l'une petite surface ω. C'est ce que nous appellerons le *flux calorifique suivant* ω.

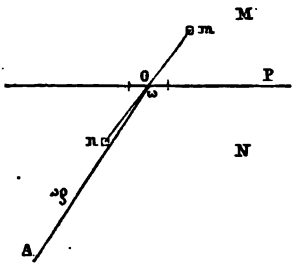


Fig. 16.

La température θ du point O est une fonction des coordonnées x, y, z du point; $\frac{d\theta}{dx}$, $\frac{d\theta}{dy}$, $\frac{d\theta}{dz}$ sont les dérivées partielles de θ prises par rapport à x, y, z et évaluées au point O.

La quantité de chaleur envoyée par m à n, pendant le temps dt, est, toutes choses égales, proportionnelle à la différence $d\theta$ entre la température de m et de n, ou à

$$dt\left(\frac{d\theta}{dx}dx+\frac{d\theta}{dy}dy+\frac{d\theta}{dz}dz\right)=dr.\left(u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)dt,$$

dr étant la distance mn, dont u, v, w sont les cosinus des angles avec les axes. La quantité de chaleur traversant ω et envoyée suivant la direction (u, v, w) étant évidemment proportionnelle à ω, pourra être représentée par une expression de la forme

$$\omega M\left(u\frac{d\theta}{dx}+v\frac{d\theta}{dy}+w\frac{d\theta}{dz}\right)dt.$$

Si nous portons sur la direction (u, v, w) une longueur égale à ωM[1], et si nous la considérons comme une force, l'expression ci-dessus représente le travail de cette force fictive correspondant à un déplacement également fictif, dont les projections sur les axes sont

$$\frac{d\theta}{dx}dt,\quad \frac{d\theta}{dy}dt,\quad \frac{d\theta}{dz}dt.$$

Pour avoir la somme de toutes ces quantités de chaleur, il faut faire la somme de tous ces travaux; on l'obtiendra aisément en cherchant

[1] M peut être appelé la *conductibilité élémentaire* suivant la direction mn.

la résultante de toutes les forces ωM, et le travail de cette r
correspondant au déplacement fictif qui est commun à toutes l
composantes. Si $OA = \omega\rho$ représente cette résultante, en gra
en direction, et si (m, n, p) sont les cosinus des angles que
direction avec les axes, le flux calorifique suivant ω sera :

$$\omega\rho\left(m\frac{d\theta}{dx} + n\frac{d\theta}{dy} + p\frac{d\theta}{dz}\right)dt,$$

ou, comme on a :

$$m\frac{d\theta}{dx} + n\frac{d\theta}{dy} + p\frac{d\theta}{dz} = \frac{d\theta}{dr};$$

en représentant par $\frac{d\theta}{dr}$ le rapport, suivant OA, de la variation
pérature à la variation de longueur dr, le flux calorifique dQ se

$$dQ = \omega\rho\frac{d\theta}{dr}dt.$$

La longueur OA divisée par ω, c'est-à-dire la quantité ρ est c
appelle la *conductibilité calorifique* correspondant au plan P
normale à ce plan[1].

Si l'on prend sur une perpendiculaire au plan P élevée en
longueur OB représentant l'aire ω, les points A et B sont liés e
par une relation analogue à celle que l'on suppose dans le chap
entre les points ayant la même dénomination. On en conclut d
les conductibilités calorifiques correspondant à tous les plans
croisent autour d'un point, sont représentées par les rayons
d'un certain ellipsoïde, qui est l'*ellipsoïde des conductibilités*.

On se trouve d'ailleurs dans le cas de l'égalité symétrique,
la conductibilité ne dépend ni de la forme de la molécule,
répartition des températures autour du point considéré[2].

[1] La *température* joue, dans la théorie actuelle, le même rôle que la *dilat*
bique de l'unité de volume dans la théorie de l'élasticité ; la *conductibili*
fique ρ correspond à la *force élastique ;* la *quantité de chaleur* Q serait
lent du *travail* de cette force élastique.

[2] Lamé n'admettait pas que le cas de l'égalité symétrique fût général ;
qu'il ne s'appliquait pas entre autres aux cristaux antihémiédriques comm
maline. Il supposait que, dans ces cristaux, la conductibilité élémentaire pou
pas la même, suivant les deux directions d'une même droite. Il faudrait, pou
fût ainsi, que la quantité de chaleur envoyée par une molécule A à une molé
toutes choses égales, différente de celle que B envoie à A, ce qui me paraît
cord avec les lois physiques les mieux établies. D'ailleurs, les conséquences
déduisait de sa théorie, relativement à la tourmaline, par exemple, n'ont pas
mées par l'observation.

Lorsque la chaleur passe de la partie M à la partie N du corps, la résultante des quantités de chaleur (positives ou négatives) est toujours dirigée de M sur N; l'angle que fait OA avec OB est donc toujours aigu. Les quantités A, B, C (chapitre I, page 14) étant toujours positives, la surface principale est un ellipsoïde, et l'on peut égaler A, B, C à des carrés a^2, b^2, c^2. L'équation de l'ellipsoïde des conductibilités est alors

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=1,$$

et celle de l'ellipsoïde principal :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Les conductibilités principales suivant les axes de l'ellipsoïde sont alors égales à a^2, b^2, c^2.

Les axes de l'ellipsoïde des conductibilités sont les *axes thermiques* du corps. Si le corps est identique en tous ses points, les axes thermiques ont la même grandeur et la même direction en tous les points.

L'ellipsoïde de conductibilité ne dépend pas de la loi de répartition des températures; la symétrie de cet ellipsoïde est donc réglée uniquement par celle de la structure intérieure. L'ellipsoïde est une sphère dans les cristaux du système cubique; un ellipsoïde de révolution autour de l'axe principal dans les systèmes quadratique, ternaire et hexagonal; dans les autres cas, un ellipsoïde à 3 axes inégaux pour lequel la direction de 3 axes ou d'un seul est déterminée suivant que le système est ortho ou clino-rhombique.

Surfaces isothermes dans les milieux cristallins indéfinis. — Concevons, dans un milieu *homogène*, un point O que l'on supposera être une source de chaleur constante, telle que, par une surface infiniment petite d'aire ω menée par O, passe dans l'unité de temps une quantité de chaleur constante ωq. Il se fait dans le corps une certaine répartition de température qui devient permanente au bout d'un certain temps, lorsque la quantité de chaleur arrivant par O est égale à celle qui se dissipe pendant le même temps. Considérons les choses arrivées à cet état de permanence, et supposons la surface du corps assez éloignée de O pour que les particularités de cette surface puissent être considérées comme sans influence sur la répartition des températures dans un rayon étendu autour de ce point. Nous nous proposons de chercher, dans ces conditions, la nature des *surfaces isothermes* telles

que tous les points d'une de ces surfaces aient la même
rature.

On mène l'ellipsoïde principal $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ayant
centre, et on suppose le corps découpé par une série d'e
infiniment peu distants les uns des autres et tous semblal
O pour centre de similitude, à cet ellipsoïde principal.
dère la portion du corps comprise entre deux de ces e
infiniment voisins dont l'un, le plus rapproché de O, se
intérieur, et l'autre extérieur. La quantité de chaleur
dant l'unité de temps passe à travers la surface de l'
intérieur est égale à celle qui sort par la surface de l'
extérieur.

Si ω (fig. 13) est une petite surface de l'ellipsoïde intérie
calorifique traversant ω est dirigé suivant le rayon vecteur
soïde OA en ω; c'est-à-dire que la
de chaleur totale qui, pendant l
temps, traverse ω, est représe

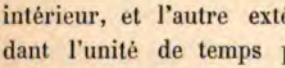


Fig. 17.

$\omega\rho\frac{d\theta}{dr}$, $\frac{d\theta}{dr}$ étant le rapport de la variation de température à la
de distance évaluée suivant OA. Si θ est la température
$\theta+d\theta$ la température au point B où le rayon vecteur OA
contrer l'ellipsoïde extérieur, $d\theta$ est la variation de tempér
luée suivant le rayon vecteur et $dr=$AB la variation de dist
respondante.

La chaleur après avoir traversé ω se répand dans tous les
la quantité totale de chaleur qui traverse la surface de l'ellip
rieur sera correctement évaluée si l'on suppose que la chale
à travers chaque élément de la surface, suit tout entière la
du rayon vecteur correspondant. Les choses se passent donc
la quantité de chaleur traversant ω restait tout entière comp
l'intérieur du prolongement du cône ayant pour sommet
base ω. Ce faisceau de chaleur vient rencontrer la petit
$\omega'=\omega+d\omega$ découpée par ce cône dans l'ellipsoïde extérieu
la traverser intégralement. Il faut donc que le flux calorifiq
qui traverse ω soit égal à celui qui traverse ω', c'est-à-dir

$\omega) \frac{d(\theta + d\theta)}{dr}$; condition qui peut se traduire par l'équation
ielle

$$d\left(\omega \frac{d\theta}{dr}\right) = 0.$$

déduit

$$\omega \frac{d\theta}{dr} = K,$$

une constante. Si M désigne la portion très petite de la surface
hère ayant l'unité pour rayon, qui est interceptée par le cône
ω, on a $\omega = \frac{M}{r^2}$, et M étant constant, on aura, C étant une con-
gale à $\frac{K}{M}$:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{C}{r^2},$$

qui, étant intégrée, donne :

$$\theta = -\frac{C}{r^2} + C',$$

une autre constante. Il faut déterminer C et C'.
n suppose le corps s'étendant à l'infini, la portion du corps
l'infini n'est pas atteinte par l'échauffement; elle est donc
la température θ_0 que l'on suppose avoir été la température
e de tous les points de corps avant l'échauffement. C' étant
r de θ pour $r = \infty$, on peut donc poser $C' = \theta_0$.
appelle Θ la température d'un point du corps situé sur la
OA, à une distance R de l'origine, en faisant $r = R$, on a :

$$\Theta - \theta_0 = -\frac{C}{R}.$$

on en θ devient ainsi :

$$\theta - \theta_0 = (\Theta - \theta_0)\frac{R}{r}.$$

lipsoïde auquel appartient le rayon vecteur R avait en tous ses
même température Θ, un autre ellipsoïde quelconque aurait

la même température θ en tous ses points, puisque les deu étant homothétiques, le rapport $\frac{R}{r}$ est constant. Tous les sont donc des surfaces isothermes, si cette propriété convie d'entre eux.

Or si l'on considère l'ellipsoïde infiniment petit tracé a il est permis de le regarder comme une surface isotherr tous ses points sont, à un infiniment petit près, à la même te

Donc, dans un milieu échauffé par un point intérieur, l isothermes sont des ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde prin O pour centre. On se rappelle que les longueurs des axes de cet ellipsoïde sont les racines carrées des conductibilit aux directions de ces axes.

Surfaces isothermes dans les plaques cristallines trè — Supposons maintenant non plus un solide, mais une p mince, indéfinie et chauffée en s Soit, dans le plan de la plaque, vecteur sur lequel on prend deux voisins A et B, et par lesquels on ellipsoïdes semblables à l'ellipsoïde principal. Dans les plan parallèles en A et B, nous prenons les sections ω et ω' découpé plans menés l'un suivant OA et le diamètre de l'ellipsoïde correspondant au plan de la plaque, l'autre suivant le mêm et un rayon vecteur très voisin de OA. On a ainsi découp volume ayant deux surfaces libres, ABA_1B_1 d'une part et u analogue de l'autre côté de la plaque. La quantité de chaleu l'unité de temps traverse ω, est égale à $\omega\rho\frac{d\theta}{dr}$, celle qui trav égale à $\rho\left[\omega\frac{d\theta}{dr}+d\left(\omega\frac{d\theta}{dr}\right)\right]$. La quantité de chaleur gag petit volume compris entre ω et ω' est $-\rho\, d\left(\omega\frac{d\theta}{dr}\right)$; elle nulle, comme dans le cas précédent, car elle doit compense tité de chaleur perdue par les deux surfaces libres inférieur rieure de la plaque.

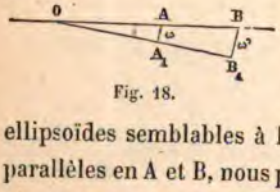


Fig. 18.

La quantité de chaleur perdue à travers la surface supérieu expression :

$$h\,(\theta-\theta_1)\,dS,$$

ı le coefficient de conductibilité extérieure de la surface
ı la température du milieu ambiant, et dS la surface $AB A_1 B_1$.
l'épaisseur de la plaque, le volume du petit solide élé-
pris entre ω, ω' et les deux surfaces de la plaque est edS.
re s'exprimer en multipliant par la base ω la hauteur cor-
du prisme. Si U est l'angle de dr avec la normale à cette
me sera $\omega dr \cos U$, et on pourra poser

$$edS = \omega dr \cos U.$$

gle du rayon vecteur de l'ellipsoïde principal avec la nor-
ı tangent, on a donc, d'après une relation connue :

$$\cos U = \frac{\rho}{\rho_1^2} = \frac{\rho}{r^2}$$

de chaleur perdue par le rayonnement de la face supé-
onc :

$$\frac{\omega\rho}{e}\frac{dr}{r^2} h(\theta - \theta_1).$$

de chaleur perdue par le rayonnement de la face infé-
de même :

$$\frac{\omega\rho}{e}\frac{dr}{r^2} h'(\theta - \theta'_1),$$

h' et θ'_1 le coefficient de conductibilité extérieure et la
du milieu ambiant inférieur.
ı qui exprime l'équilibre calorifique de l'élément consi-
ıc :

$$\rho d\left(\omega \frac{d\theta}{dr}\right) + \frac{h+h'}{e} \cdot \frac{\rho}{r^2}\left(\theta - \frac{h\theta_1 + h'\theta'_1}{h+h'}\right) = 0.$$

marque que $\omega + d\omega = \omega \frac{(r+dr)^2}{r^2} = \omega\left(1 + 2\frac{dr}{r}\right)$, cette
t s'écrire :

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \frac{h+h'}{e} \cdot \frac{1}{r^2}\left(\theta - \frac{h\theta_1 + h'\theta'_1}{h+h'}\right) = 0.$$

e la plaque indéfinie où la propagation calorifique issue

de O est sans influence, ont la température $\frac{h\theta_1 + h'\theta'_1}{h+h'}$.
compter les températures à partir de cette températ
que nous nommerons θ_0, l'équation différentielle devien

$$\frac{d^2\theta}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\theta}{dr} + \frac{h+h'}{e} \cdot \frac{1}{r^2}\theta = 0.$$

L'intégrale générale de cette équation est :

$$\theta = Cr^{-\sqrt{\frac{h+h'}{e}}} + C'r^{\sqrt{\frac{h+h'}{e}}};$$

ou, si nous nous rappelons que θ n'est ici que l'excès
rature sur θ_0 :

$$\theta - \theta_0 = Cr^{-\sqrt{\frac{h+h'}{e}}} + C'r^{\sqrt{\frac{h+h'}{e}}}.$$

Pour $r = \infty$, $\theta = \theta_0$, on doit donc avoir $C' = 0$. Si l'on
rayon vecteur pour lequel on a $\theta = \Theta$, on a :

$$\Theta - \theta_0 = CR^{-\sqrt{\frac{h+h'}{e}}}.$$

On a donc enfin :

$$\theta - \theta_0 = (\Theta - \theta_0)\left(\frac{R}{r}\right)^{\sqrt{\frac{h+h'}{e}}}.$$

d'où l'on concluerait, comme précédemment, que les su
mes sont des ellipsoïdes concentriques semblables à l'
cipal.

Expériences de Sénarmont et de M. Jannettaz.
qui précède nous fournit un moyen très simple de co
mentalement les propriétés des cristaux au point de vue
tion de la chaleur. Il suffit de tailler, dans un cristal, s
rection bien déterminée par rapport aux axes cristalli
suffisamment mince et assez large pour que l'irrégular
soit sans influence sur la propagation calorifique. On r
que sur ses deux faces d'une couche très mince de cire, p
d'un trou central aussi petit que possible; on y enfile
tallique par lequel on fait passer un courant d'air c
petite tige d'argent que l'on chauffe par conductibilit

ture du tube ou celle de la tige étant maintenue constante, on voit, comme dans l'expérience d'Ingenhouz, se dessiner tout autour du centre de chaleur, une courbe elliptique marquée par le bourrelet qui sépare la cire fondue de celle qui ne l'est pas. C'est la courbe isotherme correspondant à la température de fusion de la cire. On mesure, avec un appareil grossissant, les dimensions des axes de cette ellipse et leur orientation par rapport aux axes cristallographiques de la plaque. Ces expériences ont été pour la première fois exécutées par

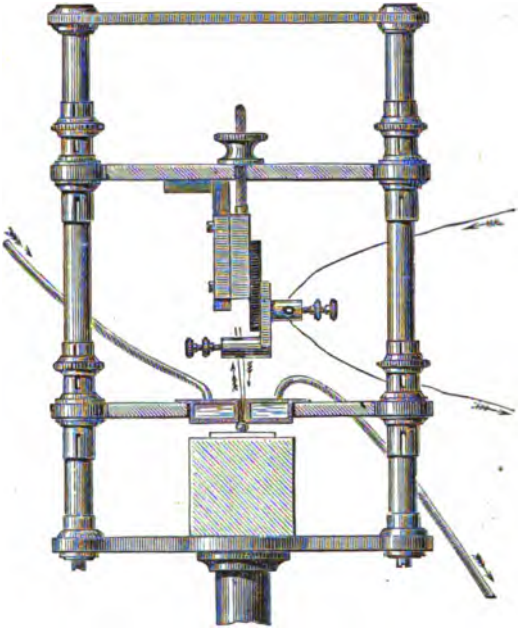


Fig. 19.

Sénarmont[1], qui ne paraît pas avoir eu connaissance du mémoire théorique de Duhamel présenté en 1828 à l'Académie des sciences[2]. Elles ont été, depuis cette époque, reprises par plusieurs savants, et particulièrement par M. Jannettaz[3].

M. Jannettaz a perfectionné la disposition expérimentale imaginée

[1] *Annales de chimie et de physique*, 3e série, t. XXI et XXII, 1847-48.

[2] A la suite des expériences de Sénarmont, Duhamel publia, dans le 32e cahier du journal de l'École polytechnique (1848) un nouveau mémoire sur la propagation de la chaleur dans les cristaux, où il applique la théorie générale aux conditions expérimentales réalisées par le savant observateur.

[3] *Ann. de chimie et de phys.*, 4e série, t. XXIX, 1873.

par Sénarmont. La source calorifique est une petite sphère de platine (fig. 19) posée sur la plaque cristalline enduite de cire. Cette sphère s'échauffe parce qu'elle est soudée à un fil fin de platine, replié sur lui-même et à travers lequel on fait passer un courant électrique qui rougit le fil. Au-dessus de la lame cristalline, et à peu de distance est placée une petite cuve à fond plat, dont la température est maintenue constante par un courant d'eau froide. La cuve est percée, en son centre, d'un trou annulaire par lequel passent les fils de platine dont le rayonnement calorifique est ainsi annulé [1].

Les tableaux suivants contiennent la plupart des observations publiées par M. Jannettaz.

I. — CRISTAUX A UN AXE PRINCIPAL.

Noms des substances.	Systèmes cristallins	Clivages domin.	Angle de l'axe de symétrie et du clivage dominant	Rapport de la longueur de l'axe cristallographique à l'axe qui lui est perpendiculaire.	Rapport à l'axe thermique principal de l'axe thermique qui lui est perpendiculaire.
A. — Substances dans lesquelles l'axe thermique principal est le plus petit.					
Antimoine.	R	a^1, p	55°53′	1.323	1.591
Oligiste	Id.	Id.	32°37′	1.359	1.1
Tourmaline.	Id.	Indist.	»	0.447	1.15 à 1.19 suiv. les var.
Eudialyte	Id.	a^1	»	2.112	1.532
Pennine	Id.	Id.	»	3.537	1.1576
Dolomie [CO^2(Mg,Ca)O].	Id.	p	47°46′	0.832	1.05
Giobertite (CO^2MgO). .	Id.	Id.	48°54′	0.8095	1.07
Sidérose (CO^2FeO). . .	Id.	Id.	48°28′	0.817	1.09
B. — Substances dans lesquelles l'axe thermique principal est le plus grand.					
Corindon.	R	p	32°35′	1.363	0.9
Troostite (Franklin) .	Id.			0.674	0.854
Chabasie.	Id.	p	33°1′	1.086	0.984
Émeraude.	H	p	0°	0.996	0.9
Calcite.	R	p	45°23′	0.854	0 913
Apatite	H	p, m	»	0.735	0.963
Pyromorphite	Id.	m	0°		0.973
Quartz.	R	p	37°48′	1.099	0.762
Rutile	Q	m	0°	0.911	0.8
Cassitérite.	Id.	Id.	0°	0.950	0.79
Zircon.	Id.	Id.	0°	0.906	0.90
Paranthine.	Id.	Id.	0°	0.621	0.845
Idocrase.	Id.	Id.	0°	0.760	0.95

[1] *Bulletin de la Société minéralogique de France*, t. I (1878).

II. — CRISTAUX SANS AXE PRINCIPAL.

Noms des substances.	Grandeur relative des axes thermiques.			Position des axes thermiques par rapport aux axes cristallographiques.	Clivages dominants indiqués suivant l'ordre décroissant de la facilité de leur production
			SYSTÈME TERBINAIRE.		
Barytine (Cornouailles). .	1.064	1.026	1	t (abc)	p, m
Célestine (SO^3StO) (Etats-Unis)	1.0834	1.027	1	t (abc)	p, m
Karsténite.	1	0.971	0.943	t (cab)	g^1, p, h^1
Staurotide (Alpes)	1	0.971	0.901	t (cab)	g^1
Liévrite.	1.155	1.055	1	t (abc)	p, g^1
Stibine	1	0.689	0.536	t (cab)	g^1, p, m
Mica de New-York (biaxe).	2.5	2.417	1	t (bac)	p, g^1
— (uniaxe).	2.45	2.3	1	Id.	Id.
Bournonite.	1	0.775	0.763	t (cab)	g^1 (h^1 et p indistincts)
			SYSTÈME BINAIRE.		
Amphibole trémolite . . .	1	0.754	0.6	(100) $b_t a_t = -5^0$	m, h^1, g^1
— hornblende . .	1	0.8	0.706	Id.	Id.
Épidote.	1.088	1	0.934	(100) $a_t\ c_t = -14^0 30'$	p, h^1
Orthose.	1	0.953	0.793	(100) $b_t\ a_t = +4^0$	p, g^1, m
Gypse.	1	0.8	0.65	(100) $c_t\ a_t = -17^0$	g^1, h^1, p

Dans ces tableaux, on a désigné par a_t, b_t, c_t, les axes de l'ellipsoïde thermique principal, rangés suivant l'ordre de grandeur décroissante. Dans les cristaux du système terbinaire, la position des axes thermiques par rapport aux axes cristallographiques est indiquée par un symbole de la forme t ($a\ b\ c$) qui montre les axes thermiques rangés dans un ordre tel que le premier est celui qui est dirigé suivant l'axe *cristallographique a*, le second suivant l'axe *cristallographique b*, le troisième suivant l'axe *cristallographique c*. Les axes cristallographiques a et b sont les axes horizontaux et a est le plus grand des deux ; c est l'axe cristallographique vertical.

Dans les cristaux du système binaire, on indique l'angle *aigu* formé par la normale à la face h^1 (100) avec le plan de symétrie de l'ellipsoïde thermique normal au plan de symétrie. Ce plan est désigné en indiquant en premier lieu l'axe thermique qui est dirigé suivant l'axe de symétrie,

puis celui qui est dirigé dans le plan de symétrie. La part
la normale (100) est dirigée en *avant*, c'est-à-dire du côté
faces p et h^1 est obtus
positif au-dessus de ce
négatif au-dessous. C'
le symbole (100) a_t c_t
indique que l'axe ther
mum a_t est dirigé sui
symétrie cristallograph
l'axe thermique b_t situé
de symétrie, fait avec la
un angle de 14°30′, con
sens indiqué par la figu

Fig. 20.

Loi formulée par M. Jannettaz. — M. Jannettaz a d
observations une loi intéressante qu'il énonce ainsi :

« Dans les substances minérales dont le réseau cristall
son équilibre normal, l'ordre est le même pour la grand
de conductibilité thermique et pour la facilité du clivag
parallèle. Lorsque les clivages se produisent obliquement
aux sections principales de l'ellipsoïde thermique, il faut
poser suivant les sections principales ; c'est évidemment
la plus voisine du clivage que sera parallèle un axe plus g

Cela revient à dire qu'en général, la conductibilité est
vant les plans de clivage, c'est-à-dire suivant les plans do
réticulaire est aussi maxima.

La loi formulée par M. Jannettaz se vérifie assez bien p
stances, encore fort peu nombreuses, sur lesquelles ont po
vations. Il y a cependant des exceptions ; l'émeraude don
peu net il est vrai, est parallèle à la base a son axe thermiq
dirigé suivant la hauteur ; la calcite, dont les trois clivag
l'axe ternaire un angle plus grand que 45°, devrait a
thermique maximum dirigé normalement à cet axe, tandis
contraire qui a lieu.

Il faut d'ailleurs remarquer, que la loi de M. Jannettaz
considérée comme exprimant véritablement une loi de la
fait dépendre en effet la grandeur relative des axes therm
seule condition, à savoir la position des clivages ; or tous
n'ont pas de clivages, et les mêmes causes qui, pour les

glent les grandeurs relatives des axes thermiques, doivent, taux clivables, intervenir pour une part importante dans le

it transformer l'énoncé de la loi de M. Jannettaz, en disant dont le paramètre cristallographique est le plus grand, i correspondent aux axes thermiques les plus petits et ré-nt. La loi ainsi énoncée pourrait s'appliquer à tous les cris-es ou non, mais elle serait encore soumise à des exceptions, euses même que celles qui affectent la loi de M. Jannettaz. çoit d'ailleurs, en serrant les choses de plus près, qu'il est e formuler une loi générale, faisant dépendre immédiate-ndeur des axes thermiques de celle des axes cristallogra-grandeur d'un axe thermique ne dépend pas seulement en nanière dont les molécules sont réparties sur la direction ond à cet axe; cette grandeur est, comme nous l'avons vu, , suivant cette direction, des conductibilités élémentaires ondent à toutes les autres. Les observations de M. Jannettaz bien de penser que les directions suivant lesquelles le para-pluspetit (c'est-à-dire suivant lesquelles les molécules sont rochées les unes des autres) sont celles suivant lesquelles se propage le plus facilement, ou en d'autres termes celles quelles la conductibilité *élémentaire* est la plus faible. Mais re ce fait en loi physique directement vérifiable, il faudrait ar des intégrations convenables, les résultantes, suivant des déterminées, des conductibilités élémentaires qui caracté-une des directions de l'espace. Des calculs semblables sont dans l'état actuel de la science.

e de la compression sur la conductibilité thermique. entation de la conductibilité avec le rapprochement des est une idée simple dont l'exactitude paraît, comme on voir, confirmée par l'étude des conductibilités cristallines. cependant en opposition formelle avec une observation très ite par Sénarmont et reproduite par M. Jannettaz. Si l'on un cube formé par un corps isotrope, tel que le verre, entre nâchoires d'un étau, la dimension du cube normale à la essée diminue, et suivant cette direction, les molécules se nt les unes des autres. Sur une face du cube parallèle à cette la courbe isotherme qui, avant la compression, était un vient une ellipse tant que la compression persiste. Or, le petit

axe de cette ellipse correspond à la direction de la pl
à-dire que la conductibilité la plus faible correspond à
des molécules le plus petit.

Cette observation est des plus importantes; elle mont
nière, manifeste, que la conductibilité ne dépend pas en rè
tement plus ou moins grand des molécules, mais bien des a
tives plus ou moins intenses que ces molécules exercent le
autres. Dans les cristaux où l'équilibre moléculaire est stab
gement des molécules est produit par leurs actions mutuel
duction de forces étrangères, les directions suivant lesquel
les actions moléculaires attractives les plus intenses sont v
ment, au moins en général, celles pour lesquelles l'écartem
cules est minimum. La grandeur de la conductibilité calori
taire peut donc être dans ce cas liée directement, par
inverse, à celle du paramètre cristallographique. Mais l
l'influence d'une action extérieure, les molécules sont ra
force suivant une direction donnée, la cohésion n'augm
vant cette direction; elle diminue au contraire, puisque
attractives intermoléculaires viennent s'ajouter des force
dont l'intensité va en croissant avec celle de la pression e
s'explique donc que la conductibilité thermique diminue
la direction de la pression.

Cette subordination de la conductibilité à la cohési
d'ailleurs dans une foule d'autres phénomènes. C'est ainsi
gaz où la cohésion est presque nulle, la conductibilité
qu'elle est à peine observable. Dans les liquides où la
peu considérable, la conductibilité est aussi très petite; la
lité dans les solides, où la cohésion prend une importa
rable, est incomparablement plus grande que dans les liqu

Lorsqu'un solide se transforme en liquide, la conductibi
aussitôt, par ce simple changement d'état, dans une éno
tion. Cette diminution se produit même lorsque, ainsi qu'il
la glace, le liquide est plus dense que le solide qui lui a
sance. Ce dernier fait achève de montrer péremptoirement
sion, et non l'écartement des molécules, règle seule la co

Il est d'ailleurs aisé de comprendre qu'il en doit nécessa
ainsi. La chaleur propagée par conductibilité est en effet
propage de molécule à molécule; or la force vive vibratoir
propager d'une molécule à une autre, que lorsqu'il s'exer

lécules des actions mutuelles, quelle que soit d'ailleurs la cause **ctions**; et la force vive transmise dans l'unité de temps est **ment** d'autant plus grande que l'intensité de ces actions est **e.**

DEUXIÈME SECTION

DILATATION THERMIQUE.

rie générale. — Lorsqu'un solide se dilate sous l'action de la les longueurs des axes de l'ellipsoïde de déformation deviennent

$$1+\alpha, \qquad 1+\beta, \qquad 1+\gamma,$$

étant les coefficients de dilatation suivant les directions de ces observation montre que ces nombres sont toujours très petits. rface inverse de l'ellipsoïde a pour équation

$$x^2(1+\alpha)+y^2(1+\beta)+z^2(1+\gamma)=1,$$

oordonnées polaires :

$$\rho'^2+\rho'^2(m'^2\alpha+n'^2\beta+p'^2\gamma)=1.$$

q. (17) — page 16] :

$$\rho'=\frac{1}{\sqrt{\rho_0\cos U}},$$

iblement, l'angle U étant toujours très petit :

$$\rho'^2=\frac{1}{\rho_0}$$

ion de la surface inverse est donc :

$$m'^2\alpha+n'^2\beta+p'^2\gamma=\rho_0-1.$$

$_0-1$ n'est autre chose que le coefficient de dilatation λ suivant ction ρ_0 caractérisée par les cosinus m, n, p que l'on peut assimi- ujours à cause de la petitesse de U, avec les cosinus m', n', p'. on pose

$$l=\frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

ion précédente devient donc :

$$l^2(m^2\alpha+n^2\beta+p^2\gamma)=1.$$

Si l'on y regarde l comme la longueur d'un rayon vecte
direction est déterminée par les cosinus m, n, p, cette équati
d'une surface du 2e degré dont $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\beta}}, \frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ sont les axes. L
de ces axes est la même que celle des axes de l'ellipsoïde d
tion.

La surface définie par cette équation est un ellipsoïde
trois dilatations α, β, γ sont positives. C'est un hyperbol
nappe lorsque l'une seulement des dilatations est négative
tations suivant les génératrices du cône asymptotique sont
dilatations suivant les directions comprises dans l'intérie
qui comprend l'axe imaginaire sont déterminées par les rayo
de l'hyperboloïde conjugué à deux nappes imaginaires.

Lorsque deux dilatations sont négatives, l'hyperboloïde
deux nappes; la dilatation suivant les génératrices du cô
tique est encore nulle; la dilatation suivant les directions c
dehors du cône asymptotique, du côté des axes imaginaire
minée par l'hyperboloïde imaginaire à une nappe.

Lorsqu'on donne les dilatations α, β, γ suivant les trois
paux, la dilatation λ suivant une direction qui fait avec l
angles dont les cosinus sont m, n, p, est donnée par la form

$$\lambda = m^2\alpha + n^2\beta + p^2\gamma.$$

La direction de ces axes est indiquée par celle des axes
phiques, sauf dans le cas des systèmes clinorhombique et
Dans le premier la direction d'un seul des axes est connue.

Expériences de M. Fizeau. — Pour déterminer la dila
cristal, le procédé plus simple est de découper des prismes da
suivant des directions déterminées par rapport aux axes
phiques. On mesure la dilatation du prisme suivant les
directions d'une même face, et l'on construit une courbe
sente pour chacune d'elles la dilatation correspondante d
longueur. Cette courbe est une ellipse qui est l'intersec
plan de la face, de l'ellipsoïde des dilatations. En répétant
observations pour un certain nombre de prismes d'orient
rente par rapport aux axes cristallins, on parviendra à
grandeur des axes de l'ellipsoïde de dilatation, et leur orie
tivement aux axes cristallins. Tout le reste s'en déduira.

ifficulté de ces observations est considérable à cause de l'extrême se de la grandeur à mesurer. M. Fizeau l'a surmontée en imagine méthode aussi ingénieuse qu'originale.

plaque de platine P (fig. 21) porte trois tiges t t' t'' également en et qui supportent horizontalement un plateau de verre V. Le dont on veut étudier la dilatation suivant une certaine direction cée sur le plateau P de manière que irection soit verticale et qu'entre la e supérieure C′ de ce cristal très ment convexe, et la surface infé- du plateau de verre il n'y ait qu'une ce extrêmement faible. Tout l'ap- est plongé dans l'huile. Il se pro-

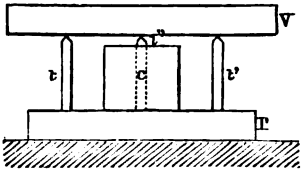


Fig. 21.

es anneaux colorés entre C′ et V. On note la position des anneaux és, avec la lumière homogène de l'alcool salé, à une certaine temre t; on élève la température qui devient t', la distance entre C′ et e d'une quantité égale à la différence qui existe entre la dilatae supports de platine et celle de la hauteur du cristal. Cette on fait changer la position des anneaux; on mesure ce dernier ement, et on en déduit, par une formule connue, la dilatau cristal, étant connue celle du platine. Ce procédé est extrêmesensible, car les anneaux se déplacent d'une quantité égale à tance qui sépare un cercle noir d'un cercle blanc lorsque tance entre le plateau de verre et le cristal varie seulement

$\times$ $0^{mm},000588$.

nt de donner quelques-uns des résultats des observations de eau, il faut dire quelques mots sur les notations dont il fait usage. t une certaine longueur mesurée dans le corps à une certaine temre prise pour zéro; à la température t, elle devient l_t, on pose :

$$l_t = l_0 (1 + At + Bt^2),$$

contentant, à cause de la petitesse des coefficients A, B, de l'apnation donnée par les termes du second degré en t. Par une difiation, on trouve :

$$\frac{1}{l_0}\frac{dl_t}{dt} = A + 2Bt,$$

est le coefficient de dilatation α_t à la température t.

Les tableaux de M. Fizeau, que l'on peut trouver dans l
Bureau des longitudes (1880, p. 605 et suiv.), donnent les d

$$\alpha_{40} = A + 2B \times 40, \qquad \frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta} = 2B.$$

Si $l_{t'}$ représente la température à t', et l_t la température à
dont la longueur est parallèle à un axe des dilatations,
négligeant les termes qui contiendraient les puissances sup
A ou de B,

$$\frac{l_t - l_{t'}}{l_{t'}} = A(t - t') + B(t^2 - t'^2) = (t - t')[A + B(t +$$

ou, en substituant les coefficients mêmes de M. Fizeau.

$$\frac{l_t - l_{t'}}{l_{t'}} = (t - t')\left[\alpha_{40} + \frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}\left(\frac{t + t'}{2} - 40\right)\right].$$

Voici quelques-uns des nombres donnés par M. Fizeau
des unités représente des chiffres décimaux occupant le hu
après la virgule :

SYSTÈME CUBIQUE.	α_{40}
Diamant	118
Sénarmontite	1953
Acide arsénieux octaédrique	4126
Magnétite	846
Cuprite	93
Galène	2014
Blende	670
Ullmannite	1112
Fluorine	1911
Chlorure de sodium	4039
— de potassium	3803
Bromure . . . id.	4201
Iodure . . . . id.	4265
Grenat oriental (de l'Inde)	837
Grenat aplôme (de Saxe)	743

SYSTÈMES A AXE PRINCIPAL.		
Cassitérite	α[2]	392
	α'	321
Rutile	α	919
	α'	714

[1] *Annuaire du Bureau des longitudes.*
[2] L'axe α est celui qui est dirigé suivant l'axe principal.

Quartz	α	781	2,38
	α'	1419	2,05
Spath d'Islande	α	2621	1,60
	α'	— 540	0,87
Dolomie de Traverselle	α	2060	3,68
	α'	415	1,93
Giobertite	α	2130	3,39
	α'	599	2,43
Sidéroplésite	α	1918	2,55
	α'	605	1,73
Tourmaline verte du Brésil	α	905	3,20
	α'	379	1,83
Émeraude	α	— 106	1,14
	α'	137	1,33
Iodure d'argent	α	— 397	— 4,27
	α'	65	1,38

SYSTÈME ORTHORHOMBIQUE.

Aragonite	α^1	3460	3,37
	α'	1719	3,68
	α''	1016	0,64
Cymophane	α	602	2,20
	α'	516	1,22
	α''	601	1,01
Topaze blanche (Australie)	α	592	1,83
	α'	481	1,53
	α''	414	1,68

SYSTÈME CLINORHOMBIQUE.

Orthose (Saint-Gothard) $D_0 = 18^0 48'$	α^2	— 203	1,28
	α'	1905	1,06
	α''	— 151	1,46
Épidote (Brésil) $D_0 = 34^0 8$	α	913	2,55
	α'	334	2,06
	α''	1086	3,05
Augite (Westerwald) $D_0 = 53^0 37'$	α	1386	0,76
	α'	272	0,76
	α''	791	2,08
Gypse (fer de lance de Montmartre) $D_a = 15^0 2'$	α	4163	9,36
	α'	157	1,09
	α''	2933	3,43

'axe α est dirigé suivant la bissectrice de l'angle aigu formé par les axes opti-
; l'axe α' est dirigé suivant la bissectrice de l'angle obtus formé par les axes op-
s ; l'axe α'' est dirigé suivant la normale au plan des axes optiques.
D_0 angle de l'axe α' situé dans le plan de symétrie avec la diagonale inclinée de
ée. — L'axe α' part d'un sommet O.
Même angle. — L'axe α' part d'un sommet A.
est dirigé suivant l'axe binaire.

Il résulte des expériences de M. Fizeau et de quelques
très antérieures de Mitscherlich sur la dilatation de la cal
dilatation des cristaux n'étant pas égale suivant toutes les
la nature du réseau cristallin, c'est-à-dire la forme prim
substance donnée, dépend de la température. Il ne faudrait
dant s'exagérer l'importance de ces variations. La dilatatio
solides, sous l'influence de la chaleur, est toujours très faib
dire, dans une première approximation du phénomène, que
bien différents des gaz sous ce rapport, gardent un volum
sous l'action de la chaleur. La dilatation n'est qu'un phén
turbateur et de second ordre.

Il est d'ailleurs peu utile, dans l'état actuel de nos con
d'essayer de tirer des observations précédentes quelques
riques. On peut cependant remarquer, avec M. Fizeau, qu
tains cristaux cubiques, tels que le diamant et la cuprit
cient α est très petit, en même temps que $\frac{\Delta\alpha}{\Delta\theta}$ est notable. I
que, si l'on abaisse la température, le coefficient α déc
devenir nul pour une certaine température et même néga
températures inférieures. C'est ainsi que si l'on admet qu
cients mesurés dans le voisinage de la température de
identiques aux températures inférieures, on trouve qu'à
ratures inférieures à — 42° pour le diamant et à —
cuprite, ces deux corps se contractent par la chaleur au
dilater. Il est donc vraisemblable que ces deux corps
températures précédentes, présenter comme l'eau à 4°, u
de densité.

PHÉNOMÈNES OPTIQUES

CHAPITRE IV

THÉORIE DE LA DOUBLE RÉFRACTION

ndes lumineuses se propageant dans un milieu isotrope sont ques; il n'en est plus de même dans un milieu continu mais ne ant pas des propriétés identiques suivant toutes les directions u'il arrive pour les corps cristallisés. Huyghens a montré quelle forme de l'onde dans les cristaux, tels que le spath calcaire, ésentent un axe principal de symétrie. Cette découverte, très quable, surtout pour l'époque à laquelle elle se produisit, n'était urs appuyée sur aucune idée théorique. Généralisant la construc- Huyghens, Fresnel découvrit la loi de la propagation lumineuse es corps cristallisés quelconques, et cette mémorable découverte sidérée à juste titre comme un des plus beaux titres de gloire grand savant.

content d'avoir trouvé les lois des phénomènes, Fresnel en donna orie, et c'est même sous la forme de déductions théoriques qu'il connaître pour la première fois. Malheureusement si l'expérience taté, de la manière la plus précise, l'exactitude des lois, les héoriques desquelles Fresnel avait cru pouvoir les déduire ont ontestables et peu rigoureuses, et les plus illustres géomètres, chy, les Lamé, etc., se sont mis à l'œuvre pour suppléer à cette . Ces travaux, qui ont été le point de départ de progrès impor- ans les sciences mathématiques, n'ont cependant pas complète- tteint le but que se proposaient leurs auteurs, et la théorie de la réfraction se trouve encore à peu près au point où l'avait laissée l. C'est donc la théorie de Fresnel que nous allons exposer. Nous ntrerons les lacunes, mais nous ferons voir aussi qu'elle suffit, out, lorsqu'on se place au point de vue purement physique.

Principes de la théorie des ondulations lumineuses rappellerons d'abord les principes sur lesquels est fondée générale des phénomènes lumineux.

On suppose ceux-ci produits par les vibrations d'un cert Ces vibrations sont transversales, c'est-à-dire qu'on peut le contenues dans un plan normal à la direction de la vitesse av se fait leur propagation dans le milieu. Toute vibration plane du milieu peut être supposée due à la combinaison de deux rectilignes composantes qui sont les projections, sur deux a gulaires, de la vibration résultante. Dans chacune des vibrat lignes le déplacement ε du point vibrant, c'est-à-dire la variable avec le temps, qui sépare le point mobile de l'o représenté par l'expression

$$\varepsilon = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right);$$

A est un coefficient constant qui représente le déplacemen ou *l'amplitude* de la vibration; α est une quantité constante pend que du moment choisi pour représenter l'origine du t le temps variable; et T la durée d'une oscillation.

Pendant la durée T d'une oscillation, le mouvement vi propageant dans le milieu parcourt la distance vT, si v es e propagation. Posons :

$$\lambda = vT;$$

λ est la longueur d'onde de la vibration considérée, c'est-à- tance qui sépare, sur la direction de la propagation, deux le déplacement est identique à un même instant. La long λ et la durée T d'une oscillation varient avec la couleur d vitesse v devrait être théoriquement la même dans le mé pour tous les rayons, quel que soit λ. C'est ainsi que le sonores graves se propagent dans l'air avec la même vite vibrations aiguës. Pour la lumière il n'en est pas de même tions de v avec λ dans le même milieu donnent lieu au phén ticulier auquel on a donné le nom de *dispersion*.

Si l'on différencie deux fois ε par rapport à t on a :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = 2\pi\frac{A}{T}\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right),$$

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt^2} = -4\pi^2\frac{A}{T^2}\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right) = -\frac{4\pi^2}{T^2}\varepsilon = -4\pi^2\frac{v^2}{\lambda^2}$$

Si l'on multiplie la dernière équation par la masse m du point vibrant, $-m\frac{d^2\varepsilon}{dt^2}$ représente la force élastique f qui sollicite ce point, et on obtient aisément :

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 m} \cdot \frac{f}{\varepsilon};$$

$\frac{\lambda^2}{4\pi^2 m}$ est, dans le même milieu, une quantité constante lorsque le rayon reste de même espèce, c'est-à-dire garde le même λ. En représentant cette quantité par k^2, et en appelant F la force élastique correspondant au déplacement maximum que nous prendrons pour unité de longueur, il vient

$$v^2 = k^2 F \quad \text{ou} \quad v = k\sqrt{F}.$$

La vitesse de propagation, dans le milieu considéré, *est donc proportionnelle à la racine carrée de la force élastique développée par la vibration* dans ce milieu.

Hypothèse de Fresnel sur la propagation, dans un milieu solide, d'un système d'ondes planes parallèles entre elles. — Fresnel admet, et nous admettons avec lui que les forces élastiques mises en jeu par la propagation d'un système d'ondes planes parallèles, à vibrations rectilignes et transversales, diffèrent des forces élastiques développées par la vibration d'une seule des molécules vibrantes, seulement par un facteur constant qui ne dépend pas de la direction des vibrations. Cette hypothèse n'est certainement pas exacte dans le cas général, mais elle le devient lorsque, la propagation du mouvement se produisant dans un milieu isotrope, la surface de l'onde (enveloppe des ondes planes) est une sphère.

Considérons, en effet, la position d'équilibre O d'une certaine molécule M comme le centre des vibrations. La partie la plus importante de la force élastique exercée sur M est déterminée par le déplacement absolu ε de M dans l'espace et les variations de distances qui en résultent par rapport aux autres molécules supposées immobiles. Les déplacements de ces autres molécules mises en mouvement par la vibration émanée de O, se font, par hypothèse, sur des sphères décrites de O comme centre ; les distances de ces molécules à O ne varient donc pas et leurs distances à la molécule M ne varient que par suite du déplacement ε. La force élastique, exercée sur M suivant la direction ε, et due aux déplacements des molécules environnantes est donc proportion-

nelle à ε, et peut être posée égale à KF. Le coefficient E
nature du milieu, mais ne dépend pas de la direction
dans le milieu isotrope supposé, toutes les directions jo
rôle au point de vue optique.

Or l'observation montre que tous les milieux cristallins
isotropes optiquement; l'hypothèse de Fresnel pourra
être regardée comme approximativement vraie.

Ellipsoïde d'élasticité optique. — Soit un milieu tra
vibrations lumineuses se transmettent dans l'éther au r
baignent les molécules matérielles qui forment ce milieu
gation se fait comme dans le vide, avec cette différence qu
des molécules modifie les propriétés mécaniques de l'ét
et en altère l'isotropie normale. Le déplacement *dl* d'un po
développe dans ce milieu une force élastique F égale et co
qui produit le déplacement. La force élastique F s'annule
dépend de la direction de *dl* et de la constitution du milie
de O. On en conclut que l'on se trouve dans le cas étudié a
de cette seconde partie. Lorsque le déplacement, gardant
gueur, prend successivement toutes les directions possible
de *dl* décrit une sphère; celle de F décrit un ellipsoïde
soïde d'élasticité optique.

On se trouve d'ailleurs évidemment dans le cas de l'
trique. En outre le déplacement, dont l'orientation seule v
seule cause qui mette en jeu la force F, l'ellipsoïde d'
tique ne dépendra que des propriétés optiques du milieu
petit rayon autour de O. On aura donc, entre la symétrie
celle de l'ellipsoïde, les relations spécifiées au chapitre Ie
que cet ellipsoïde sera une sphère dans les milieux à symé
qu'il sera de révolution dans les milieux à axe de sym
pale, etc.

Composantes de la force élastique. — Hypothèse
— Appelons U l'angle de la force F avec le déplacement
se décompose en deux autres, FcosU dirigé suivant *dl*,
lui est perpendiculaire. Si le déplacement *dl* se prop
milieu suivant la direction de la composante FsinU, on p
qu'il se transmettra sans altération, car la force FcosU s
instant la force élastique vibratoire, et Fresnel admet que l
FsinU, s'exerçant normalement au déplacement, et ne
comprimer les couches successives de l'éther, qu'il sup

est sans action sur le phénomène. Le déplacement *dl* se pro-
ne suivant une droite qui lui est perpendiculaire, située dans
i contient la force élastique F; il se propage en outre avec
e proportionnelle à $\sqrt{F \cos U}$.

ité le raisonnement de Fresnel est très insuffisant; il n'est
mis de se débarrasser, ainsi qu'il le fait, de la composante
lais on doit remarquer que, grâce à la faible biréfringence
ux les plus biréfringents, l'angle U est toujours petit, et par
nt la composante FsinU, toujours petite elle-même. On peut
er ainsi qu'il soit permis d'en négliger l'action vis-à-vis de celle
nposante FcosU.

naît la loi suivant laquelle varie, avec la direction de la vibra-
irection et la grandeur de la vitesse de propagation ; on peut
e que la théorie de la double réfraction est établie. Il ne s'agit
de la développer et d'en tirer les conséquences qu'elle contient
ment.

oïde d'élasticité D_0. — Ellipsoïde principal D_1. — Ellipsoïde E. — Soit Oa (fig. 22), la direction d'un déplacement, OA_0 la
r et la direction de la force
e F correspondante; D_0 l'el-
qui est, on le sait, le lieu des
$_0$ et dont l'équation est

$$\left(\frac{x}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{y}{b^2}\right)^2 + \left(\frac{z}{c^2}\right)^2 = 1.$$

le U étant toujours très petit,
nposantes normales N de la

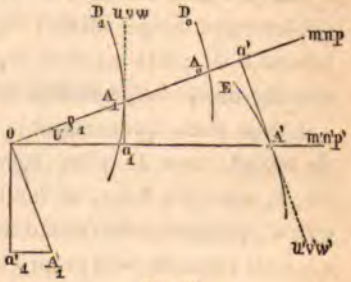


Fig. 22.

astique sont toujours positives et la *surface principale* (chap. Ier,
4) est un *ellipsoïde*. Cet ellipsoïde, qu'on représentera par D_1, a
quation :

ps. principal. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

est le point où le rayon vecteur OA_0 rencontre cet ellipsoïde D_1;
nt $OA_0 = \rho_0$, $OA_1 = \rho_1$ et $U = a_1 OA_0$, on a :

$$\rho_0 = \rho_1^2 \cos U.$$

mène en A_1 le plan tangent à l'ellipsoïde D_1, ce plan est per-

pendiculaire sur Oa_1 en un point qu'on appellera a_1 et

$$Oa_1 = \rho_1 \cos U = \sqrt{\rho_0 \cos U};$$

Oa_1 est donc proportionnel à la vitesse de propagation
et peut être supposé égal à cette vitesse même. La *surf*
comme la surface principale, un ellipsoïde, qu'on appe
l'équation est :

(E) Ellipsoïde inverse. $a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$

Si A′ est le point de cet ellipsoïde rencontré par le ray
le plan tangent en A′ à l'ellipsoïde E est normal à la dire
coupe en un point a'. En posant $OA' = \rho'$, on a :

$$\rho'\rho_0 = \rho_1, \quad \rho' = \frac{1}{Oa_1}, \quad Oa' = \frac{1}{\rho_1}.$$

Surface des vitesses normales. — La vitesse de
déplacement dirigé suivant Oa_1 est dirigée, dans le plan
lement à Oa_1; elle est donc représentée en grandeur e
par une droite Oa', parallèle à A_1a_1 et égale à Oa_1.

L'onde plane qui contient le déplacement et qui coïnc
du temps, avec le plan mené suivant Oa et perpend
Oa_1 A_1 coïncide donc, au bout de l'unité de temps, avec
par a'_1 perpendiculairement à Oa_1. La surface qui est le
a'_1 jouit ainsi de cette propriété que les plans normaux à
chacun de ses rayons vecteurs représentent les diverses
prend le plan de l'onde au bout de l'unité de temps. En
la grandeur d'un rayon vecteur de cette surface représ
de propagation, évaluée suivant une normale au plan
vibrations contenues dans le plan. Cette surface est appe
vitesses normales.

Il est très aisé d'en trouver l'équation. Soient

m, n, p les cosinus des angles que fait la direction OA_1
m', n', p' — — — — Oa_1

Posons $r = Oa_1 = Oa'_1$, et cherchons les cosinus u,
que fait la direction Oa'_1 ou A_1a_1 avec les axes.

z' représentent les coordonnées du point A′ de l'ellipsoïde

$$OA' = \frac{1}{r},$$

$$x' = \frac{x_1}{a^2}, \quad y' = \frac{y_1}{b^2}, \quad z' = \frac{z_1}{c^2};$$

duit :

$$\frac{m'}{r} = \frac{x_1}{a^2}; \quad \frac{n'}{r} = \frac{y_1}{b^2}, \quad \frac{p'}{r} = \frac{z_1}{c^2}.$$

ξ, η, ζ, les coordonnées de a_1, on a d'ailleurs :

$$\xi = m'r, \quad \eta = n'r, \quad \zeta = p'r,$$

aisément de ce qui précède :

$$x_1 - \xi = \frac{m'}{r}(a^2 - r^2) = -u \times A_1a_1,$$

$$y_1 - \eta = \frac{n'}{r}(b^2 - r^2) = -v \times A_1a_1,$$

$$z_1 - \zeta = \frac{p'}{r}(c^2 - r^2) = -w \times A_1a_1.$$

e rappelle enfin que Oa_1 est perpendiculaire à Oa'_1 ce qui se la relation :

$$m'u + n'v + p'w = 0;$$

emplaçant dans cette équation m', n', p' par les valeurs déduiations ci-dessus :

$$\frac{u^2}{a^2 - r^2} + \frac{v^2}{b^2 - r^2} + \frac{w^2}{c^2 - r^2} = 0.$$

où n'entrent que $r = Oa'_1$ et les cosinus des angles que fait es axes. C'est l'équation polaire de la surface des vitesses

lle *surface de l'onde* le lieu des points de l'espace atteints, au temps qu'on peut prendre pour unité, par le mouvement qui, à l'origine du temps, affectait l'origine O des vibrations. re que cette surface est l'enveloppe des ondes planes, ayant orientations possibles, et qu'on peut supposer partant du

point O à l'origine du temps. On démontre en outre qu
est le lieu des points A'_1.

La considération de la surface de l'onde est rarement
recherches cristallographiques, on en renverra l'étude
chapitre.

**Polarisation rectiligne, à angle droit, des deux ray
suivant une même direction.** — Après avoir exposé la
double réfraction, on va revenir sur quelques conséquenc
qu'on aurait pu déduire immédiatement des principes q
point de départ, mais qu'on a laissées de côté pour ne p
l'enchaînement de la démonstration.

Considérons le plan de l'onde qui contient la vibratio
et se propage suivant la droite normale Oa'_1. Un plan me
perpendiculairement au plan a_1 OA_1, coupe l'ellipsoïde pr
vant une ellipse dont OA_1 est l'un des axes, car le plan ta
normal au plan a_1 OA_1 et coupe le plan de l'ellipse suiva
normale à OA_1. La tangente à l'ellipse en A_1 est donc nor
vecteur. Par une raison entièrement analogue OA′ sera l'
la section que détermine dans l'ellipsoïde inverse E un p
plan a_1 OA_1 mené suivant Oa_1. Le deuxième axe OB′ d
correspond de même à une vibration Ob_1, qui se prop
même direction que la vibration Oa_1, mais avec une vite
au moins en général.

Ainsi, parmi toutes les vibrations rectilignes que l'on
issues d'un même point et contenues dans un même plan,
et deux seulement dans le cas général, qui se propagen
tesses inégales, suivant une même direction normale au
tient les deux vibrations. Ces vibrations sont dirigées su
axes de l'ellipse que détermine l'intersection du plan de
l'ellipsoïde inverse E. La vitesse de propagation de chac
égale à l'inverse de la grandeur de l'axe de l'ellipse auqu
est parallèle.

On peut encore déduire de là que tous les rayons qui c
milieu biréfringent sont, sauf les cas singuliers, polaris
ment, et que, suivant une même direction de propagation
transmises deux vibrations rectilignes rectangulaires entr

Forme de la surface des vitesses normales. — Axe
La surface des vitesses normales se déduit si aisément de

lipsoïde inverse E, qu'on peut, sans recourir à son équation, acquérir de sa forme une idée très suffisante pour ce qui doit suivre.

Nous allons, à cet effet, chercher la trace de la surface sur les 3 plans coordonnés, et comme ces plans sont évidemment des plans de symétrie, nous pouvons nous borner à l'étude de l'octant antérieur supérieur droit. Soit (fig. 23) l'ellipsoïde inverse réduit, pour simplifier la figure, à sa moi-

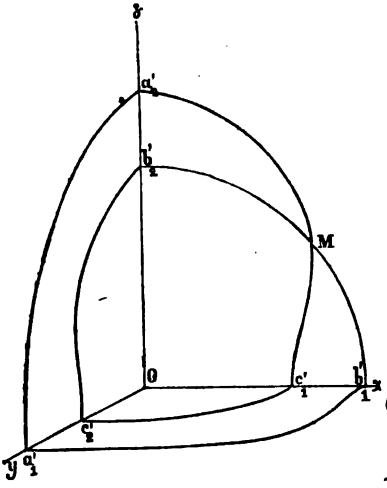


Fig. 24.

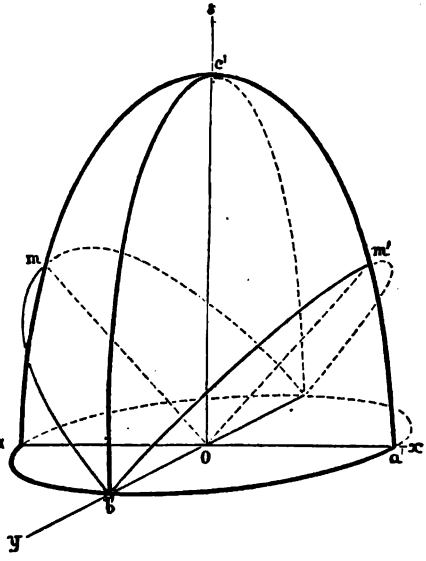


Fig. 23.

tié supérieure; Oa', Ob', Oc' sont les 3 axes, $m\,b'$ et $m'\,b'$ les sections circulaires; on a $Oa' = \frac{1}{a}$, $Ob' = \frac{1}{b}$, $Oc' = \frac{1}{c}$. Par Oc' et les diamètres de l'ellipse principale $a'b'$ menons une série de sections de l'ellipsoïde; toutes auront pour axes Oc' et le diamètre correspondant de l'ellipse $a'b'$; toutes correspondront en outre à des vitesses de propagation normales situées dans le plan principal $a'b'$; on aura donc tous les points de la surface des vitesses normales qui sont situés dans le plan $a'c'$ en menant dans ce plan sur chaque direction perpendiculaire à l'une des sections menées suivant Oc', c'est-à-dire perpendiculaire à l'un des diamètres de l'ellipse $a'b'$, deux longueurs égales l'une à $\frac{1}{Oc'} = c$, l'autre à l'inverse du diamètre de l'ellipse $a'b'$. On obtient ainsi pour la trace de la surface des vitesses normales sur le plan $a'\,c'$ (fig. 24) un cercle $c'_1\,c'_2$

de rayon égal à c et une courbe[1] sur la forme de laquelle il est inutile d'insister, mais qui coupe l'axe des x en b'_1 à une distance de O égale à b, et l'axe des y en a'_1 à une distance de O égale à a. La courbe enveloppe le cercle.

On verra de même que dans le plan des zy, la trace de la surface se compose d'un cercle $a'_1 a'_2$ de rayon égal à a, et d'une courbe $b'_2 c'_2$ telle que $Ob'_2 = b$.

Enfin, dans le plan des zx, c'est-à-dire dans le plan qui contient l'axe maximum a et l'axe minimum b d'élasticité optique, la trace se compose d'un cercle $b'_2 b'_1$ de rayon égal à b et d'une courbe $a'_2 c'_1$ qui vient nécessairement rencontrer le cercle en un certain point M.

On a $OM = b$, la direction du rayon vecteur OM de la courbe $a'_2 c'_1$ est donc obtenue en faisant décrire 90° au rayon vecteur Om de l'ellipse $a' c'$, qui est aussi compris dans la section circulaire et est égal à $\frac{1}{b}$. La direction de OM est ainsi perpendiculaire sur l'une des sections circulaires de l'ellipsoïde inverse et les vibrations qui se transmettent suivant la direction de propagation OM sont contenues dans le plan de cette section circulaire. Tous les diamètres de la section circulaire sont des axes de cette section; les vibrations qui se propagent suivant OM ne se

[1] L'équation polaire de l'ellipse $a'c'$ rapportée à l'axe des x est :

$$\rho^2 (a^2 \cos^2 \omega + b^2 \sin^2 \omega) = 1 ;$$

le rayon vecteur de la courbe $a_2'c_1'$ qui fait avec l'axe des x un angle $\frac{\pi}{2} - \omega$ est égal à $\frac{1}{\rho}$, l'équation de la courbe est donc :

$$\rho^2 = a^2 \sin^2 \omega + b^2 \cos^2 \omega.$$

C'est une courbe du 4e degré qui est d'ailleurs identique au lieu des points a_1' (fig. 22), c'est par conséquent le lieu des projections du centre O sur la tangente à l'ellipse $a'c'$, auquel on a fait subir un quart de révolution.

On trouve aisément pour l'angle α que fait le prolongement de la tangente avec celui du rayon vecteur

$$\operatorname{tg} \alpha = \rho \frac{d\omega}{d\rho} = \frac{1}{a^2 - c^2} (a^2 \operatorname{tg} \omega + c^2 \operatorname{cotg} \omega).$$

La tangente est verticale lorsque $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{cotg} \omega$, c'est-à-dire pour

$$\operatorname{tg} \omega' = \frac{\sqrt{a^2 - 2c^2}}{a}.$$

Entre $\omega = 0$, pour lequel la tangente est verticale, et $\omega = \omega'$ (lorsque $\operatorname{tg} \omega'$ n'est ni nul ni imaginaire, ou lorsque $a^2 > 2c^2$), la courbe a donc un point d'inflexion. Pour tous les corps cristallisés on a $a^2 < 2c^2$, et par conséquent le point d'inflexion n'existe pas.

Les courbes $b_1'a_1'$ et $b_2'c_2'$ donneraient lieu à des remarques analogues.

onc pas en deux rayons vibrant à angle droit suivant des déterminées et cheminant avec des vitesses inégales; elles ıt suivant cette direction spéciale comme elles le feraient lieu isotrope. On donne à cette direction OM le nom d'*axe* encore axe de *réfraction intérieure*.

autre axe optique perpendiculaire à l'autre section circulaire ïde inverse et placé par rapport au premier symétriquement s zy.

on polaire de l'ellipse $a'c'$, rapportée à l'axe des x, est :

$$\rho^2(a^2\cos^2\omega + c^2\sin^2)\,\omega = 1;$$

que fait le rayon vecteur $Om' = \frac{1}{b}$ appartenant à la section est donc donné par l'équation :

$$a^2\cos^2\omega_1 + c^2\sin^2\omega_1 = b^2$$

$$\operatorname{cotg}^2\,\omega_1 = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2};$$

OX étant le complément de ω_1, on a

$$\operatorname{tg} MOX = \pm\sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}}.$$

ıx axes optiques OM sont distincts l'un de l'autre dans tous x pour lesquels les 3 axes de l'ellipsoïde d'élasticité a, b, c aux. C'est pourquoi ces cristaux sont souvent désignés sous *biaxes*. On dit que le cristal est *négatif* lorsque MOX est plus 45°, c'est-à-dire lorsque la bissectrice de l'angle aigu des ques, ou, comme on dit pour abréger, la bissectrice aiguë, vec l'axe maximum a; le cristal est dit *positif* lorsque MOX est à 45°, c'est-à-dire lorsque la bissectrice aiguë coïncide avec mum c.

e inspection de la fig. 24 montre que la surface des vitesses a deux nappes, qui se coupent en quatre points analogues au placés symétriquement dans le plan des zx, qu'on appelle s axes. Ces points sont les *ombilics*.

On peut ajouter, pour donner une idée plus complète d qu'elle est comprise entre la sphère de rayon a qui la tou un cercle situé dans le plan des zy et dont un quadrant e $a'_1 a'_2$, et la sphère de rayon c qui la touche suivant un cerc le plan yx et dont un quadrant est figuré en $c'_1 c'_2$. La sphèr touche la surface suivant un cercle situé dans le plan d un quadrant est figuré en $b'_1 b'_2$; sauf le long de cette circo appartient à la nappe intérieure dans l'angle des axes optiq prend l'axe des z, et à la nappe extérieure dans l'angle de comprend l'axe des x, tout le reste de la sphère de rayon b entre les deux nappes.

Lorsque la substance possède un axe principal de sym psoïde inverse, ainsi que tous les autres, est de révolution ou $b = a$. Lorsque $b = c$, l'ellipsoïde est de révolution au des x, *le plus grand axe d'élasticité optique coïncide avec volution* et le cristal est *négatif*. Lorsqu'au contraire $b = a$, *axe d'élasticité optique coïncide avec l'axe de révolution* et l *positif*. Il est aisé de voir que dans ces deux cas les deux a OM se confondent en un seul qui est l'axe principal; c'es raison que le cristal est dit alors *uniaxe*.

Supposons le cristal uniaxe positif, c'est-à-dire $b = c$ montre que la nappe intérieure se réduit à une sphère $b = c$; le point M vient se placer sur l'axe des x, et la napp est une certaine surface qui est de révolution autour de l'a tangente à la sphère au point d'intersection avec cet axe. leurs ce qu'il est aisé de voir sur l'équation même de la lorsqu'on y fait $b = c$, se réduit aux deux équations :

$$r^2 = c^2, \qquad u^2 (r^2 - c^2) + (v^2 + w^2)\ (r^2 - a^2) = 0.$$

La 1re équation est celle d'une sphère de rayon égal à c; la que l'on peut mettre sous la forme

$$r^2 = a^2 - u^2 (a^2 - c^2),$$

est celle d'une certaine surface fermée plus ou moins sem ellipsoïde.

Relations entre les deux vitesses de propagation pondent à une même direction et les angles que fait tion avec les axes optiques. — La direction de l'axe op

L′ et qui est contenue dans l'angle des xz positifs, fait avec les onnés des x, y, z des angles dont les cosinus sont respec-

$$+\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad 0 \qquad +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

nus des angles que fait avec les mêmes axes la direction L″, axe optique contenue dans l'angle des $z\bar{x}$, sont :

$$-\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}} \qquad 0 \qquad +\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

s u, v, w, ainsi que nous l'avons toujours fait, les cosinus s que fait avec les axes une certaine direction de propagation. , en outre, par θ' et θ'' les angles que fait cette direction avec En posant pour abréger l'écriture :

$$A^2=a^2-b^2, \qquad B^2=b^2-c^2, \qquad C^2=a^2-c^2,$$

$$\cos\theta'=u\frac{A}{C}+w\frac{B}{C},$$

$$\cos\theta''=-u\frac{A}{C}+w\frac{B}{C}.$$

e là .

$$A=\frac{C(\cos\theta'-\cos\theta'')}{2u},$$

$$B=\frac{C(\cos\theta'+\cos\theta'')}{2w}.$$

n de la surface des vitesses normales, lorsqu'on y remplace $-u^2-w^2$, devient :

$$\frac{u^2A^2}{r^2-a^2}-\frac{w^2B^2}{r^2-c^2}+1=0,$$

veloppant :

$$-r^2(a^2+c^2-u^2A^2+w^2B^2)-u^2c^2A^2+w^2a^2B^2+a^2c^2=0.$$

ent de r^2, changé de signe, est la somme des racines r'^2 et te équation bicarrée, et l'on a :

$$r'^2+r''^2=a^2+c^2+C^2\cos\theta'\cos\theta''.$$

Le terme indépendant de r^2 est égal au produit des racin
plaçant A et B par les valeurs précédentes, il vient

$$4r'^2r''^2 = C^4\cos^2\theta' + C^4\cos^2\theta'' + 2C^2(a^2+c^2)\cos\theta'\cos\theta''$$

On en déduit aisément :

$$r'^2 - r''^2 = \sqrt{(r'^2+r''^2)^2 - 4r'^2r''^2} = C^2\sin\theta'\sin\theta'' = (a^2-c^2)$$

Cette expression de $r'^2 - r''^2$ combinée avec celle
donne :

$$r'^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\theta'-\theta''),$$

$$r''^2 = \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{a^2-c^2}{2}\cos(\theta'+\theta'').$$

Les plans de vibration d'un même rayon bissèque dièdres formés par les plans qui passent par la dire pagation et les axes optiques. — Imaginons que la fig sente une certaine section elliptique de l'ellipsoïde inverse

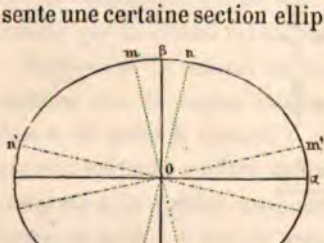


Fig. 25.

tions circulaires de cet e
pent suivant deux rayons
gale longueur, et par co
lement inclinés sur les axe
Il en sera de même des ra
respectivement perpendi
les deux précédents. Ma
peuvent être regardés co
jections sur le plan de l'ell
optiques perpendiculaires aux sections circulaires. Les ax
$O\alpha$ et $O\beta$ sont les traces des plans des vibrations qui se p
malement suivant la perpendiculaire au plan de l'ellip
bissèquent donc les angles dièdres formés par les plans q
la direction commune de propagation normale et les axes

Formules approchées que l'on peut substituer a complètes. — La théorie de Fresnel ne peut être reg
démontrée, d'après ce qui a été dit plus haut, que pour l
qui ne sont pas très biréfringentes, c'est-à-dire pour lesqu
quantités a, b, c ne sont pas très différentes l'une de

en effet le cas de toutes les substances biréfringentes que nous présente la nature. Pour mettre à même d'en juger, on a réuni dans le tableau suivant tous les cristaux dont les constantes optiques se trouvent dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*. Ces cristaux ont été rangés en deux groupes, celui des substances uniaxes, et celui des substances biaxes. Dans chaque groupe ils ont été rangés suivant l'énergie décroissante de la biréfringence, cette énergie étant appréciée par la valeur du rapport $\frac{(a-c)^2}{c^2}$. Sur les 68 substances comprises dans ce tableau, une seule, le calomel, donne un rapport $\frac{(a-c)^2}{c^2}$ très peu supérieur à $\frac{1}{10}$; pour une substance, l'arséniate de soude, ce rapport est très peu supérieur à $\frac{1}{20}$; pour six autres, la calcite, le cinabre, la cérusite, le soufre, l'asparagine et l'azotate de potasse, le rapport est compris entre $\frac{1}{50}$ et $\frac{1}{100}$. Pour toutes les autres substances, le rapport est inférieur à $\frac{1}{100}$.

L'examen de ce tableau suggère l'idée d'une simplification possible dans toutes les formules. Puisque, dans l'immense majorité des cas, on peut considérer comme négligeable, et de l'ordre des erreurs d'observation, la quantité $(a-c)^2$ relativement à c^2, on pourra négliger aussi, par rapport à c^2 ou à b^2, le carré de la différence qui existe entre un rayon vecteur quelconque r et le demi-axe b, puisque $r-b$ est toujours inférieur à $a-c$.

Posons donc :

$$a=b+d_1, \quad c=b-d_2, \quad r=b+\delta,$$

d_1, d_2, δ étant des quantités très petites dont le carré est négligeable, l'équation de la surface des vitesses normales devient :

$$\frac{u^2}{\delta-d_1}+\frac{v^2}{\delta}+\frac{w^2}{\delta+d_2}=0,$$

ou encore

$$\delta^2+\delta\,[d_2(1-w^2)-d_1(1-u^2)]-d_1d_2v^2=0,$$

équation dont les deux racines δ' et δ'' donnent les deux valeurs, $b+\delta'$

et $b + \delta''$, du rayon vecteur de la surface qui correspo
même direction (u, v, w). Ces deux racines sont de sign
puisque le dernier terme de l'équation est négatif, ce
comme on le savait déjà, que la sphère ayant b pour rayon
entre les deux nappes de la surface. La distance qui, sui
vecteur considéré, sépare les deux nappes, est donc égale
l'on a :

$$\delta' - \delta'' = \sqrt{[d(1-u^2) - d_2(1-w^2)]^2 + 4d_1d_2v^2}.$$

On a trouvé précédemment :

$$r'^2 - r''^2 = (a^2 - c^2)\sin\theta' \sin\theta''.$$

On a, dans l'ordre d'approximation où nous nous plaçons,

$$r'^2 - r''^2 = 2b(\delta' - \delta'') \quad \text{et} \quad a^2 - c^2 = 2b(a-c)\ ;$$

on peut donc écrire :

$$\delta' - \delta'' = (a-c)\sin\theta' \sin\theta''.$$

Il serait, en effet, aisé de démontrer que la première expre
ci-dessus pour $\delta' - \delta''$ revient à celle-là.

En faisant subir des transformations analogues aux ex
r'^2 et de r''^2, on trouverait encore aisément :

$$\delta' = \frac{a+c-2b}{2} - \frac{a-c}{2}\cos(\theta' - \theta''),$$

$$\delta'' = \frac{a+c-2b}{2} - \frac{a-c}{2}\cos(\theta' + \theta'').$$

En restant dans le même ordre d'approximation, on a

$$\text{tg MOX} = \sqrt{\frac{b-c}{a-b}}.$$

L'angle MOX est donc $< 45°$, et le cristal est dit négatif lo
$b - c < a - b$ ou $2b - (a+c) < 0$; cet angle est $> 45°$
est positif lorsque $b - c < a - b$ ou $2b - (a+c) > 0$.

Substances uniaxes.

Couleur de la lumière employée pour l'observation.	Noms des substances.	a	c	Rapport $\frac{(a-c)^2}{c^2}$
Rouge.	Calomel.	0.5102	0.3846	0.10666
Jaune.	Arséniate de soude.	0.7485	0.6021	0.05392
Raie D.	Calcite (spath d'Islande). . . .	0.67280	0.60294	0.01343
»	Cinabre.	0.3551	0.3183	0.01337
Rouge.	Argent rouge (Proustite). . .	0.3688	0.3357	0.00972
Rouge lithine.	Zircon.	0.5208	0.5076	0.00676
Jaune.	Dolomie	0.6655	0.6205	0.00526
Rouge.	Argent rouge (Argyrythrose) .	0.3471	0.3243	0.00494
Rouge.	Parisite.	0.6374	0.5988	0.00415
Rouge.	Tartrate d'antim. et de strontiane.	0.6300	0.5943	0.00361
Rouge.	Wulfénite (PbO,Mo^2O^3). . . .	0.4340	0.4163	0.00180
Rouge.	Arséniate d'ammoniaque. . .	0.6566	0.6345	0.00121
Vert.	Dioptase	0.5999	0.5804	0.00113
Rouge.	Arséniate de potasse.	0.6601	0.6394	0.00105
Rouge.	Phosphate de potasse.	0.6826	0.6644	0.00075
Rouge.	Phosphate d'ammoniaque. . .	0.6775	0.6614	0.00059
Jaune.	Méionite	0.6418	0.6273	0.00053
?	Anatase.	0.4011	0.3915	0.00052
Jaune.	Érythrite (érythroglucine) . .	0.6575	0.6475	0.00024
Jaune.	Mellite (mellate d'alumine). .	0.6489	0.6281	0.00023
Vert.	Émeraude verte.	0.6337	0.6313	0.00020
Rouge.	Wernérite d'Arendal.	0.6472	0.6386	0.00018
Orangé.	Phosgénite	0.4730	0.4673	0.00015
Rouge.	Mélinophane.	0.6281	0.6207	0.00014
Raie D.	Tourmaline incolore.	0.6175	0.6110	0.00011
Rouge lithine.	Phénakite de Framont. . . .	0.6058	0.5998	0.00010
Rouge.	Dipyre incolore de Pouzac. .	0.6481	0.6418	0.000096
Rouge.	Schéelite (chaux tungstatée). .	0.5214	0.5171	0.000069
Rouge.	Mimétèse (phosph. de plomb).	0.6826	0.6784	0.000038
Raie D.	Quartz	0.64757	0.64380	0.000034
Rouge.	Sulfate de potasse hexagonal.	0.6698	0.6662	0.000029
Rouge.	Corindon rubis	0.5684	0.5658	0.000021
Jaune.	Néphéline de la Somma. . . .	0.6519	0.6498	0.000010
Rouge.	Sulfate de lanthane.	0.6394	0.6374	0.0000098
Raie D.	Apatite.	0.60913	0.60749	0.0000073
Rouge.	Hidyphane (arséniate de plomb)	0.6835	0.6817	0.0000070
Rouge.	Sulfate cérosocérique.	0.6410	0.6394	0.0000060
Jaune.	Idocrase bleu d'Ala	0.5824	0.5817	0.0000015
Rouge.	Apophyllite de Naalsoë. . . .	0.6529	0.6523	0.0000008
Rouge.	Pennine de Zermatt	0.6345	0.6341	0.0000004

Substances biaxes.

Signe de la double réfraction.	Couleur de la lumière employée pour l'observation.	Noms des substances.	*a*	*b*	*c*
—	Jaune.	Cérusite (carbonate de plomb)	0.5562	0.4824	0.48
+	Jaune.	Soufre	0.5107	0.4907	0.44
+	Jaune.	Asparagine	0.6456	0.6525	0.61
—	?	Azotate de potasse	0.7502	0.6646	0.66
—	Raie D.	Aragonite	0.6535	0.5947	0.59
—	Jaune.	Formiate de strontiane	0.6739	0.6575	0.65
+	?	Anhydrite (sulfate de chaux anhydre)	0.6365	0.6345	0.61
+	Jaune.	Tartrate d'antim. et de chaux, avec azotate de chaux	0.6225	0.6307	0.61
—	Rouge.	Épidote de Sulzbach	0.5780	0.5701	0.56
+	Jaune.	Péridot vert de Torre del Greco	0.6020	0.5959	0.58
—	Jaune.	Borax	0.6911	0.6803	0.67
+	Rouge.	Chlor. de baryum ($BaCl^2+2Aq$)	0.6143	0.6094	0.60
+	Jaune.	Diopside d'Ala	0.5978	0.5953	0.58
+	Jaune.	Calamine (silicate de zinc hydraté	0.6192	0.6180	0.61
+	Jaune.	Euclase	0.6053	0.6041	0.59
+	Rouge.	Anglésite (sulfate de plomb)	0.5336	0.5320	0.52
+	Rouge.	Mésotype	0.6771	0.6758	0.67
—	Orangé.	Cordiérite de Bodenmais	0.6515	0.6489	0.64
+	Raie D.	Barytine (sulfate de baryte)	0.6111	0.6107	0.60
—	Rouge.	Andalousite du Brésil	0.6127	0.6105	0.60
—	Bleu.	Orthose de Wehr	0.6551	0.6513	0.65
+	Jaune.	Gypse	0.6576	0.6567	0.65
+	Raie D.	Topaze blanche du Brésil	0.6205	0.6197	0.61
+	Jaune.	Cymophane	0.5724	0.5719	0.56
—	Rouge.	Axinite	0.5981	0.5960	0.59
—	Jaune.	Orthose du Saint-Gothard	0.6583	0.6563	0.65
+	Rouge.	Sulfate de potasse biaxe	0.6702	0.6695	0.66
+	Rouge.	Sel de Seignette potassique (dextrotartrate de soude et de potasse)	0.6711	0.6707	0.66

Grandeurs relatives des vitesses avec lesquelles s
suivant la même direction les deux vibrations rectan
Distinction des rayons ordinaire et extraordinaire.
sectrice aiguë des axes optiques coïncide avec l'axe maxi
à-dire si le cristal est *négatif*, les sections cycliques d
principal comprennent l'axe *c* dans l'intérieur de leurs
Le plan normal à la direction de la propagation lumine
les deux sections cycliques de part et d'autre du plan p

m et *m'* (fig. 26). La vibration qui, comprise dans l'angle *aigu* des sections cycliques, bisséque l'angle *mOm'*, correspond au plus petit axe

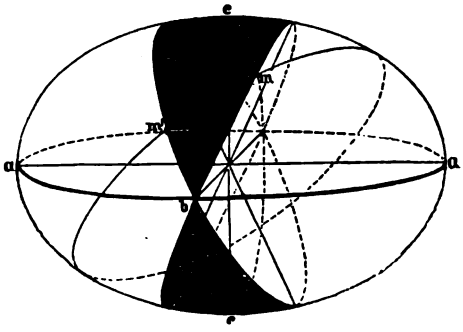


Fig. 26.

de l'ellipse; c'est celle dont la vitesse de propagation est la plus *petite*. Si la bissectrice aiguë est l'axe minimum *c*, c'est-à-dire si le cristal est positif, l'inverse a lieu, et la bissectrice de l'angle *mOm'* com-

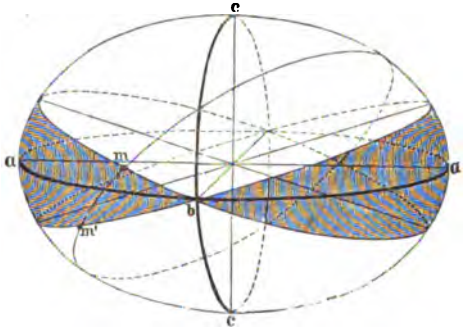


Fig. 27.

prise dans l'angle aigu des sections cycliques (fig. 27) donne la vibration dont la vitesse de propagation est la plus *grande*.

Comme on l'a dit plus haut, on détermine ordinairement les directions des vibrations transmises normalement à un plan donné, en projetant sur ce plan les deux axes optiques, et menant les bissectrices des angles formés par ces deux droites, qui sont perpendiculaires sur les traces des plans cycliques. L'angle qui comprend la projection de la bissectrice aiguë comprend aussi la vibration dont la vitesse de propa-

gation est la plus petite dans les cristaux négatifs, et
dans les cristaux positifs.

On convient d'appeler *vibration ordinaire* celle qui
l'angle aigu des sections cycliques de l'ellipsoïde princi
la *vibration extraordinaire*. Si l'on appelle δ_o le δ corre
vibration ordinaire, et δ_e celui qui correspond à la vib
dinaire, δ_o est *positif* dans les cristaux *positifs* et *négati*
taux *négatifs*. En d'autres termes, la vitesse de propaga
ordinaire correspond à la nappe de la surface des vitesses
rieure à la sphère de rayon b, dans les cristaux positifs ;
est enveloppée par cette sphère, dans les cristaux négati

Passage d'un rayon lumineux d'un milieu quelco milieu cristallisé. — Les lois de la propagation lumi
cristaux permettent de se rendre compte des phénomène
qui se produisent dans ces corps. On considère un rayo
premier milieu dans un second qui est cristallisé. La s
ration des deux milieux est supposée plane, ce qui n'es
triction à la généralité du raisonnement, puisque l'on
considérer qu'un élément très petit de cette surface.

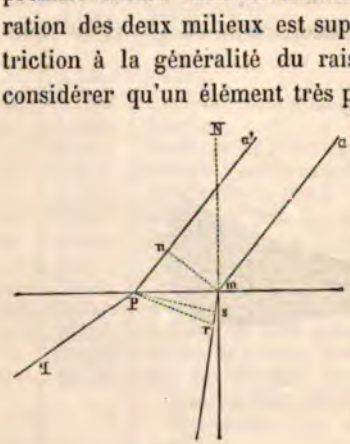


Fig. 28

faisceau lumineux
transversales assez pe
la surface de l'onde p
sidérée comme pla
(fig. 28) la directio
ceau. Le plan de la f
posé mené par *ma* et
à la surface de sépar
plan d'incidence.

L'onde plane *mn* e
points du premier
par une vibration en un même instant qu'on regardera c
des temps. On aura l'onde réfractée dans le second milie
le lieu des points atteints par cette même vibration au
de temps. Choisissons $a'p$ parallèle à mn, de telle sorte
sente la vitesse de propagation dans le premier milieu,
chemin parcouru dans ce milieu par la vibration dans l'
Le point p, commun aux deux milieux, appartient à l'
d'ailleurs tous les points de la droite pq perpendiculair

cidence sont atteints en même temps par la vibration, la droite *pq* est donc contenue dans l'onde réfractée; onde nécessairement plane, puisque le faisceau lumineux réfracté a, comme le faisceau incident, des dimensions transversales très petites. On suppose menée la surface des vitesses normales aux extrémités des rayons vecteurs de laquelle sont normaux, au bout de l'unité de temps, toutes les ondes planes qui, partant de *m*, peuvent se propager dans le second milieu; l'onde cherchée est comprise parmi celles-là. Soit donc *r* et *s* deux points de cette surface situés sur chacune des deux nappes, contenus dans le plan d'incidence et tels que *pr* et *ps* soient respectivement perpendiculaires sur *mr* et *ms;* les plans normaux aux plans d'incidence, c'est-à-dire qui passent par *pq*, et ont pour traces *pr* et *ps*, sont les ondes planes réfractées. Les longueurs *mr* et *ms* représentent en grandeur et en direction les vitesses de propagation correspondant aux deux rayons réfractés; ces directions sont peu différentes l'une de l'autre, à cause de la faible biréfringence des milieux cristallisés.

Si ces deux directions étaient rigoureusement identiques, les vibrations de chacun des rayons seraient mutuellement perpendiculaires; ces vibrations seront donc effectivement très près d'être rectangulaires entre elles. On peut donc dire qu'un faisceau lumineux passant dans un milieu cristallisé s'y décompose en deux autres très voisins l'un de l'autre, et dont les vibrations sont à angle droit.

Lorsqu'un faisceau lumineux, après avoir traversé le milieu cristallisé, en ressort et rentre dans le premier milieu, on ferait, pour trouver le faisceau émergent, une construction inverse de celle qui nous a permis de déduire la direction du rayon réfracté de celle du rayon incident. Si la surface de séparation des deux milieux à l'émergence est parallèle à la surface de séparation à l'incidence, chacun des deux rayons réfractés issus d'un même rayon incident donne, pour le même rayon émergent, une même direction, et le faisceau émergent est parallèle au rayon incident.

La longueur *n p* représente la vitesse de propagation *l* de la lumière dans le premier milieu; les longueurs *mr* et *ms* sont les vitesses de propagation respectives des deux rayons réfractés dans le second milieu; nous les appellerons *r* et *s*. Nous appellerons en outre I l'angle d'incidence, c'est-à-dire celui que fait avec la normale *m*N la direction de propagation *ma* dans le premier milieu; R′ et R″ sont les angles que font respectivement les directions des vitesses de propagation *r′* et *r″* avec le prolongement de la normale *m*N. Dans le triangle

rectangle mpn, on a

$$pm = \frac{l}{\sin \mathrm{I}};$$

dans les triangles prm, et psm, on a :

$$pm = \frac{l}{\sin \mathrm{I}} = \frac{r'}{\sin \mathrm{R}},$$

$$pm = \frac{l}{\sin \mathrm{I}} = \frac{r''}{\sin \mathrm{R}''}.$$

Le rapport du sinus de l'angle d'incidence à celui de fraction est le même que celui de la vitesse de propa premier milieu à la vitesse de propagation dans le deu Les vitesses de propagation sont donc les inverses des l'on désigne sous le nom *d'indices de réfraction*. Dans u tallisé, il y a en général deux indices de réfraction corr même direction de propagation, et ces indices changent av

Calcul des directions de propagation des deux ray — Pour trouver les directions des vitesses de propaga rayons réfractés r' et s'', il suffit, on le voit, de chercher par le plan d'incidence, de la surface des vitesses norm pour centre et de calculer les points d'intersection r courbe avec le cercle ayant $pm = \frac{l}{\sin \mathrm{I}}$ comme diamètr vecteurs mr et ms sont les deux directions cherchées.

Soit

$$(1) \qquad f(r) = 0$$

l'équation de la surface des vitesses normales; si $u'\ v'\ w$ les cosinus que fait avec les axes la normale au plan l'équation

$$(2) \qquad uu' + vv' + ww' = 0,$$

qui exprime que toutes les directions $(u\ v\ w)$ qui y satisfo nues dans le plan d'incidence, est l'équation du plan. S g, h, k les cosinus que fait avec les axes la direction $m\,p$, fait le rayon vecteur $(u\ v\ w)$ avec $m\,p$ est donné par la re

$$\cos \omega = gv + hu + kw.$$

L'équation du cercle ayant $m\ p$ pour diamètre est

$$(3) \qquad r = mp\cos\omega = \frac{l}{\sin I}(gu + hv + kw).$$

On a ainsi trois équations qui, par élimination, en donnent deux autres ne contenant plus r; ces deux équations, combinées avec

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1,$$

donnent les valeurs de u, v, w qui résolvent le problème.

Le calcul se simplifierait dans le cas des cristaux uniaxes. Il se simplifie davantage encore, même dans le cas général, si l'on emploie le procédé d'approximation qui a été défini plus haut.

Soit PR_1 (fig. 29) la direction de la vitesse du rayon réfracté qui se produirait si le milieu était isotrope, et si la vitesse de propagation y était la vitesse moyenne de propagation dans le cristal, c'est-à-dire b. Les vitesses des deux rayons réfractés réels PR′ et PR″ ne font avec PR_1 qu'un petit angle; les vitesses de propagation r' et r'' qui leur correspondent sont donc très peu différentes des deux rayons vecteurs de l'une et l'autre nappe de la surface des vitesses normales qui ont la direction commune PR_1. Les longueurs de ces deux rayons vecteurs sont $b + \delta'$ et $b + \delta''$, si δ' et δ'' sont les deux racines de l'équation en δ (page 117), dans laquelle on donne à u, v, w les valeurs qui conviennent à la direction PR_1.

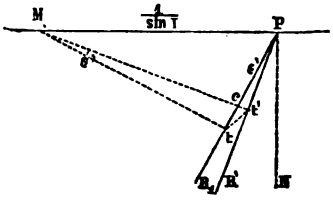


Fig. 29.

Prenons $PM = \frac{l}{\sin I}$ et menons par M des perpendiculaires Pt et Pt' sur les directions respectives PR_1 et PR′; soit c le point où Mt' rencontre PR. Le triangle Mtc est presque rectangle en c à cause de la petitesse de l'angle $R'PR_1$; $Pt' = r' = b + \delta'$ peut être considéré comme égal à Pc, et par conséquent on a sensiblement $ct = -\delta'$. Soit ε' le petit angle $R'PR_1$, considéré comme positif lorsqu'il est parcouru, à partir de PR_1, en s'éloignant de la normale PN, et comme négatif dans le cas contraire, convention qui revient à dire que le signe de ε' est celui

de δ'; dans le triangle tMc où $tMt' = \varepsilon'$, on a :

$$\varepsilon' = \frac{\delta'}{Mt} = \frac{\delta' \sin I}{l \cos R}.$$

On aurait de même, en appelant ε'' l'angle que forme a
rection de propagation PR″ de l'autre rayon réfracté :

$$\varepsilon'' = \frac{\delta'' \sin I}{l \cos R}.$$

D'après ce qui a été dit page 122 sur le signe de δ, l'a
pondant au rayon ordinaire est positif dans les cristaux po
tif dans les cristaux négatifs. La direction de propagati
extraordinaire est donc plus rapprochée de la normale
rayon *ordinaire* dans les cristaux positifs et plus éloig
cristaux négatifs.

Si ω est l'angle que forment entre elles les deux directi
gation PR′ et PR″, on aura :

$$\omega = \varepsilon' - \varepsilon'' = (\delta' - \delta'') \frac{\sin I}{l \cos R} = \frac{\sin I}{l \cos R} (a - c) \sin \theta' s$$

Lorsque le rayon PR est dirigé suivant un axe optique, on a θ'
L'onde plane qui se propage dans le milieu cristallisé est
c'est ce qu'il était facile de voir directement.

Il ne s'agit donc plus, pour résoudre le problème dans l
que de connaître les co
que fait, avec les axes
des vitesses normales,
de propagation PR, et d
troduire les valeurs da
en δ pour obtenir δ' e

Fig. 30.

Soit U, V, W, les cos
avec les axes la direct
pagation PI (fig. 30)
cident ;

g, h, k, ceux que fait avec les axes la direction P
male à la surface de séparation des deu

λ, μ, ν, ceux que fait avec les axes la direction ts de
PN, menée du point t pris sur la direct
distance de P telle que $Pt = 1$.

nt le triangle Pts sur l'axe des x, on obtient

$$U + g\cos I + \lambda \sin I = 0,$$

$$\lambda = -\frac{U + g\cos I}{\sin I}.$$

s valeurs analogues pour μ et ν, en remplaçant U et g suc-
par V, h, puis par W, k.
ection PR, on prend P$t' = 1$, on mène $t's'$ perpendiculaire
ngement de la normale PN ; la projection, sur l'axe des x,
P$t's'$ donne

$$u + \lambda \sin R + g\cos R = 0,$$

roduisant la valeur de λ trouvée précédemment, on déduit :

$$u = (U + g\cos I)\frac{\sin R}{\sin I} - g\cos R.$$

es valeurs de v et w en remplaçant U et g successivement
puis par W et k.
lerait d'ailleurs I par la formule :

$$\cos I = gU + hV + KW,$$

relation :

$$\frac{\sin I}{\sin R} = \frac{l}{b}.$$

a réfraction dans le cas particulier des cristaux uniaxes.
s cristaux uniaxes, les lois du phénomène de la réfraction
ent. La surface des vitesses normales se réduit alors, comme
une sphère et à une surface à une nappe. Des deux direc-
ropagation du rayon bifurqué après la réfraction, l'une a
ur vitesse le rayon de la sphère, le faisceau lumineux qui lui
et qui est le *rayon ordinaire* se comporte comme si le
t un milieu *ordinaire* ou isotrope ; la vitesse de l'autre direc-
pagation, qui est celle du rayon *extraordinaire*, est marquée
on vecteur de la surface à une nappe.
cristaux *positifs*, l'axe principal coïncide avec le plus petit

axe d'élasticité, c'est-à-dire l'axe des z; on a $a = b$, et la sphère de la surface des vitesses normales enveloppe la surface à une nappe; la vitesse du rayon extraordinaire est inférieure ou au plus égale à celle du rayon ordinaire. L'angle ω que font entre elles ces deux directions est donné par la formule :

$$\omega = \varepsilon' = -(a - c)\sin^2\theta \frac{\sin I}{\cos R} = -\frac{a - c}{a}\sin^2\theta \operatorname{tg} R.$$

Dans les cristaux *négatifs*, l'axe principal coïncide avec le plus grand axe d'élasticité, c'est-à-dire l'axe des x; on a $b = c$, et la sphère est enveloppée par la surface à une nappe; la vitesse du rayon extraordinaire est toujours supérieure ou au moins égale à celle du rayon ordinaire. On a :

$$\omega = \varepsilon' = (a - c)\sin^2\theta \frac{\sin I}{\cos R} = \frac{a - c}{b}\sin^2\theta \operatorname{tg} R.$$

La direction de propagation du rayon extraordinaire est en quelque sorte attirée par la normale dans les cristaux positifs, et repoussée par elle dans les cristaux négatifs; c'est pourquoi on donne souvent aux cristaux positifs le nom d'*attractifs*, et celui de *répulsifs* aux cristaux négatifs.

Dispersion. — Si la théorie de Fresnel était rigoureuse, l'élasticité optique du milieu dans lequel se fait la propagation lumineuse ne pouvant pas varier avec la couleur du rayon, c'est-à-dire avec la période du mouvement vibratoire, il en résulterait que la vitesse de propagation serait indépendante de la couleur de la lumière. C'est en effet ce qui a lieu pour la propagation des vibrations sonores. On sait qu'il n'en est pas ainsi pour les vibrations lumineuses dont l'inégale vitesse de propagation donne lieu au phénomène connu sous le nom de *dispersion*. Toutefois la dispersion n'existe pas dans le vide, ainsi que le montre l'observation des étoiles dont l'éclat varie très rapidement, comme *Algol*, qui passe en trois heures et demie de la seconde à la quatrième grandeur. Ces variations d'éclat seraient nécessairement accompagnées de changements de coloration si les rayons différemment colorés employaient des temps inégaux pour parcourir la distance qui sépare l'étoile de la terre; on n'a constaté aucun changement de cette nature. La dispersion est donc due à la présence, dans l'éther, des molécules pondérables des corps.

Fresnel a le premier indiqué la cause probable à laquelle la dispersion

portée. Il fit remarquer que les ondes lumineuses diffèrent nores par la grandeur incomparablement moindre de leurs ondulation ; celles-ci ne sont donc plus, comme celles du tites par rapport aux rayons d'activité des forces molécu- la propagation d'une vibration rectiligne lumineuse, si nous deux molécules pondérables séparées, suivant la direction ion, par une distance r, moindre que le rayon d'activité des culaires, ces molécules peuvent avoir, au même instant, ements assez différents l'un de l'autre pour que la varia- ition mutuelle qui résulte de cette différence influe sur la que. Cette force, qui règle la vitesse de propagation, ne nc pas seulement de la structure du corps ; elle dépend en- nature et plus particulièrement de la longueur d'onde des que ce milieu transmet.

a traduit cette indication de Fresnel dans une théorie très t dont nous nous bornerons à donner ici une idée.

idère une série de molécules alignées suivant la direction ation d'une vibration rectiligne. Le déplacement ε de la mo- vibre à l'origine en O est, à l'instant t,

$$\varepsilon = A \sin 2\pi \frac{t}{T} = A \sin 2\pi \frac{vt}{\lambda}.$$

e instant, la molécule située sur la direction de propagation ance de O égale à r, éprouve un déplacement

$$\varepsilon' = A \sin 2\pi \frac{t - \frac{r}{v}}{T} = A \sin \frac{2\pi}{\lambda}(vt - r);$$

:

$$\varepsilon - \varepsilon' = \varepsilon \left(1 - \cos \frac{2\pi}{\lambda} r\right) + A \cos \frac{2\pi}{\lambda} vt \sin \frac{2\pi}{\lambda} r.$$

lastique développée, sur la molécule située en O, par le dépla- utuel des deux molécules considérées, et évaluée suivant le ent, est proportionnelle à $\varepsilon - \varepsilon'$; la force élastique totale t sur O est donc une somme de termes, en nombre infini, cun se compose d'une valeur de $\varepsilon - \varepsilon'$ correspondant à une

valeur particulière de r, multipliée par un certain facteu
donc écrire :

$$f = \varepsilon \Sigma M \left(1 - \cos 2\pi \frac{r}{\lambda}\right) + \Sigma MA \cos 2\pi \frac{vt}{\lambda} \sin 2\pi$$

Le second terme de cette expression est nul, car à chaqu
somme pour lequel r est positif et qui provient d'une m
sur la direction de propagation, en correspond un autre
a une valeur égale mais de signe contraire, et qui provie
lécule située sur la direction opposée à celle de la propag

Reste donc le premier terme. Pour les ondes sonores
geable, et f est proportionnel à ε et indépendant de λ; p
lumineuses, $\frac{r}{\lambda}$ n'est plus négligeable, mais il est petit, et l'
lopper $1 - \cos 2\pi \frac{r}{\lambda}$ suivant les puissances croissantes
donne

$$1 - \cos 2\pi \frac{r}{\lambda} = P \frac{r^2}{\lambda^2} - Q \frac{r^4}{\lambda^4} + R \frac{r^6}{\lambda^6} \ldots,$$

d'où l'on déduit

$$f = \varepsilon \left(\frac{1}{\lambda^2} \Sigma MPr^2 - \frac{1}{\lambda^4} \Sigma MQr^4 + \ldots\right).$$

On a vu (page 105) que

$$v^2 = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 m} \cdot \frac{f}{\varepsilon};$$

on aura donc pour v^2 une expression de la forme

$$v^2 = A + B \frac{1}{\lambda^2} + C \frac{1}{\lambda^4} + \ldots$$

La somme des termes qui suivent le premier étant pe
prendre par approximation la racine du second membre,

$$v = A' + B' \frac{1}{\lambda^2} + C' \frac{1}{\lambda^4} + \ldots$$

La vitesse de propagation dans le vide étant indépend

ui précède peut aussi représenter le rapport de la vitesse de on absolue dans le milieu à la vitesse de propagation dans le ce qui équivaut presque, dans l'air.

t, en général, se borner au second terme de la série qui donne me est nécessairement négatif, puisque la vitesse de propaga. avec la longueur d'onde. On peut donc poser

$$v = g - h\frac{1}{\lambda^2},$$

ant des coefficients que l'expérience doit faire connaître.

expression s'applique aux corps isotropes comme aux corps sés; mais dans ces derniers une complication nouvelle inter- r après avoir déterminé les constantes pour la vitesse de pro- d'une vibration rectiligne déterminée, il faudra en déterminer eaux pour représenter la vitesse de propagation d'une autre n.

fois, pour chaque valeur de λ, il existe un certain ellipsoïde cité et un certain ellipsoïde principal. Supposons que le cristal nne à un système à axe principal ou au système terbinaire, ellipsoïdes, par des raisons de symétrie connues, ont leurs igés de la même façon. Si le système de cristallisation est ter- par exemple, on pourra représenter les vitesses de propagation, suivant les axes communs par des expressions de la forme

$$a = g_a - h_a\frac{1}{\lambda^2},$$

$$b = g_b - h_b\frac{1}{\lambda^2},$$

$$c = g_c - h_c\frac{1}{\lambda^2}.$$

oefficients qui entrent dans ces formules suffiront à déterminer soïdes correspondant à toutes les valeurs de λ. Beer a montré formules satisfont en effet convenablement aux observations s cristaux dont les constantes optiques correspondant aux couleurs sont bien connues, tels que le quartz, la calcite, l'ara- t la topaze.

cristal appartient à l'un des systèmes binaire ou asymétrique, il axes d'élasticité dont la symétrie du cristal ne détermine plus

la direction; les directions de ces axes peuvent alors varier ave
servation doit dans ce cas déterminer non-seulement les gran
axes des ellipsoïdes correspondant aux diverses valeurs d
encore les angles que font ces axes avec ceux d'un des ellips
comme point de départ. En général ces angles sont petits
dans le même sens lorsqu'on passe successivement du ro
lequel λ est le plus grand, au violet, pour lequel λ est le
Nous aurons à revenir plus tard sur ce sujet important.

SURFACE DE L'ONDE. — RAYONS LUMINEUX.

Surface de l'onde. — On a bien rarement besoin de pouss
théorique des phénomènes de double réfraction plus loin qu'o
dans ce qui précède. Bien que les résultats déjà obtenus soien
qui nous soient nécessaires pour les études ultérieures, il pa
de ne pas laisser incomplète une théorie aussi importante
mière lacune grave qu'il y ait à combler est la détermina
direction du *rayon* qui se propage dans un milieu biréfringen

Après avoir considéré la propagation lumineuse comme pr
la propagation d'une multitude d'ondes planes partant en mê
de l'origine des vibrations et se répandant dans tout l'espace,
miné théoriquement la vitesse avec laquelle chaque onde plan
toujours parallèle à elle-même, s'éloigne de l'origine ; c'est c
appelé la vitesse de propagation normale.

Si l'on considère toutes les ondes planes, ayant toutes les or
possibles, et partant de l'origine des vibrations à une même é
l'on prendra pour l'origine des temps, elles occupent une
position dans l'espace à la fin de l'unité de temps, et c
tion est déterminée par la surface des vitesses normales
il a été dit plus haut. Tous ces plans enveloppent une
surface que l'on appelle la *surface de l'onde*. En se servant de
des interférences, on démontre que si $A'_1a'_1$ (fig. 31) est le
gent en A'_1 à la surface de l'onde S, la seule partie efficace
tions que propagent les ondes planes parallèles à $A'_1a'_1$ est ce
transmet suivant la direction menée de l'origine O au poin
gence A'_1, de sorte qu'un écran placé entre O et A'_1 supprime
la lumière transmise directement à A'_1; OA'_1 est ce qu'on a

du rayon lumineux dont $O\,a'_1$ perpendiculaire au plan de la direction de propagation normale.

que le point a'_1, qui appartient à la surface des vitesses nor- t la position que le point a_1 (fig. 22, page 107) vient occuper fait tourner Oa_1 de 90° dans le plan $A'Oa_1$ qui contient le dé- t élastique et la force élastique qu'il engendre. Nous allons que A'_1 est la position que prend OA_1 après une rotation de 90°

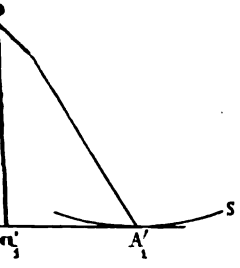


Fig. 31.

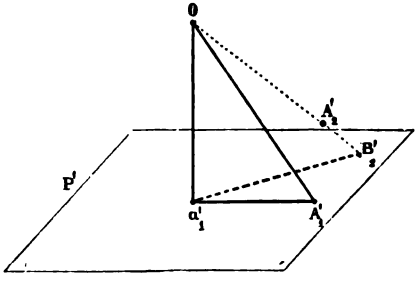


Fig 32.

même plan, de sorte que le triangle $Oa'_1\,A'_1$ est la position nt prendre le triangle Oa_1A_1 après une rotation de 90°.

démontrer ce théorème, il suffit de montrer que le plan P'), normal à Oa'_1 et mené suivant $a'_1\,A'_1$, est tangent en A'_1 à la qui est le lieu des points A'_1 ; c'est-à-dire que si A'_2 est un point nfiniment voisin de A'_1, la droite OA'_2 rencontre le plan P' en un , tel que la longueur $A'_2\,B'_2$ est un infiniment petit du second i la distance $A'_1\,A'_2$ est du premier. Le point A'_2 correspond à t A_2 de l'ellipsoïde principal très voisin de A_1, et comme l'elli- est tangent au plan P mené suivant A_1a_1 perpendiculairement rayon vecteur OA_2 rencontre ce plan en un point B_2 tel que $B_2\,A_2$ nfiniment petit du second ordre. Si l'on démontre que l'angle OA'_2 avec Oa'_1 ne diffère que d'un infiniment petit du second e l'angle que fait OA_2 avec Oa_1, la différence entre OB_2 et OB'_2 ne e du 2e ordre, et en vertu de l'égalité $OA_2 = OA'_2$, la diffé- $B'_2 - OA'_2$ sera du 2e ordre comme $OB_2 - OA_2$.

fig. 31), sur une sphère décrite du point O comme centre, a_1, a_2 et A'_1, A'_2, a'_1, les traces des rayons vecteurs OA_1, OA_2, etc. ns A_1Oa_1 et A_2Oa_2 deviennent sur la sphère deux grands cercles

qui font entre eux un très petit angle α et qui se rencontrent diamètre mm'.

Fig. 33.

Dans le triangle sphérique $A_1 A_2 a_1$ où $A_1 a_1 = U$, on a :

$$\cos a_1 A_2 = \cos U \cos A_1 A_2 + \sin U \sin A_1 A_2 \cos A_1;$$

dansle triangle $A'_1 A'_2 a'_2$, où $A'_1 a'_1 = U$, on a :

$$\cos a'_1 A'_2 = \cos U \cos A'_1 A'_2 + \sin U \sin A'_1 A'_2 \cos A_1.$$

Si l'on mène le grand cercle $A_2 A'_1$, on a deux triangles A $A_2 A'_1 A_1$ qui ont le côté $A_2 A'_1$ commun et qui sont rectilatèr et $A_1 A'_1$; ils donnent :

$$\cos A_2 A_1 = -\sin A_1 A_2 \cos A_1 = -\sin A'_1 A'_2 \cos A'_2.$$

On en déduit :

$$\cos a_1 A_2 = \cos U \cos A_1 A_2 + \sin U \sin A'_1 A'_2 \cos A'_2,$$

et par conséquent :

$$\cos a'_1 A'_2 - \cos a_1 A_2 = \cos U(\cos A'_1 A'_2 - \cos A_1 A_2) + \sin U \sin A'_1 A'_2 (\cos A$$

Or la surface S du triangle sphérique $A'_1 m A'_2$ est :

$$S = A'_1 + A'_2 + \alpha - \pi,$$

S et α sont infiniment petits, on a :

$$A'_2 = \pi - A'_1 + \beta,$$

iniment petit.

quation ci-dessus, le 1er membre, $\cos a'_1 A'_2 - \cos a_1 A_2$, est le produit de deux sinus, $\sin \frac{a'_1 A'_2 + a_1 A_2}{2} \sin \frac{a_1 A_2 - a'_1 A'_2}{2}$;

membre, $\cos A'_1 A'_2 - \cos A_1 A_2$ est le produit de deux sinus . petits et est par conséquent du 2e ordre; $\cos A'_1 - \cos A'_2$ ordre, mais multiplié par $\sin A'_1 A'_2$ il donne un terme du Le second membre étant du 2e ordre, il en est de même du t par conséquent de $\sin \frac{a_1 A_2 - a'_1 A'_2}{2}$ ou de $a_1 A_2 - a'_1 A'_2$, D.

ion de la surface de l'onde. — L'équation de la surface de obtient d'une manière tout à fait analogue à celle qui nous l'équation de la surface des vitesses normales. On cherche les u', v', w', des angles que fait avec les axes la direction $A'a'$ page 107) parallèle au rayon vecteur $OA'_1 = \rho_1$ de la surface . Les coordonnées de A' sont :

$$\frac{x_1}{a^2}, \quad \frac{y_1}{b^2}, \quad \frac{z_1}{c^2};$$

ase de la relation

$$Oa' = \frac{1}{\rho'},$$

donnés de a' sont :

$$\frac{m}{\rho_1}, \quad \frac{n}{\rho_1}, \quad \frac{p}{\rho_1}.$$

nc :

$$m\rho_1 \left(\frac{1}{\rho_1} - \frac{1}{a^2}\right) = u' \times A'a',$$

$$n\rho_1 \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{b^2}\right) = v' \times A'a',$$

$$p\rho_1 \left(\frac{1}{\rho_1^2} - \frac{1}{c^2}\right) = w' \times A'a',$$

et, en écrivant que la direction OA_1 est perpendiculaire
obtient :

$$\frac{u'^2}{\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{1}{a^2}}+\frac{v'^2}{\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{1}{b^2}}+\frac{w'^2}{\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{1}{c^2}}=0,$$

équation polaire de la surface de l'onde.

L'équation de la surface de l'onde n'est autre que celle d
des vitesses normales dans laquelle on a changé r en $\frac{1}{\rho}$, a
et c en $\frac{1}{c}$. Toute relation trouvée entre le rayon vecteur
mètres de cette dernière surface deviendra une relation app
surface de l'onde en y faisant les mêmes changements.

Directions des deux vibrations correspondant à
direction du rayon. — Un plan perpendiculaire à OA'_1 c
psoïde principal D_1 suivant une ellipse C_1 dont OA_1 est l'un
théorème se démontrerait comme le théorème analogue
vitesses normales. Cette droite OA_1 marque la direction
élastique que développe la vibration rectiligne dirigée sui
second axe de l'ellipse déterminé dans l'ellipsoïde principal
normal à OA'_1 marque la direction de la force élastique corr
une autre vibration rectiligne qui se transmet aussi suivan
directions des deux vibrations rectilignes qui se transmetten
vant le même rayon OA'_1 ne sont pas perpendiculaires entre
elles sont contenues respectivement dans les deux plans p
laires entre eux menés par le rayon vecteur et les deux a
lipse C_1. Comme d'ailleurs l'angle que fait le déplacement a
élastique est toujours petit, les deux vibrations rectilignes
siblement perpendiculaires entre elles. On peut donc dire q
rayon transmet deux vibrations rectilignes sensiblement p
laires entre elles. La direction de chacune de ces vibration
$A'_1 a'_1$, s'obtient aisément en projetant le rayon vecteur de la
l'onde sur le plan tangent à l'extrémité de ce rayon vecteur.

Il faut ajouter que le plan tangent à la surface de l'onde
exactement normal au rayon vecteur correspondant, les vibra
neuses, dans un milieu cristallin, ne sont pas rigoureusemen
sales; elles approchent seulement de l'être parce que l'angl

petit, le plan tangent en A'_1 n'est pas très éloigné d'être nor-

de la surface de l'onde. — La discussion de la surface de rait comme celle de la surface des vitesses normales. On sup- urs que l'axe maximum a est dirigé suivant l'axe des x, l'axe uivant l'axe des y, l'axe minimum c suivant l'axe des z. Les donnés étant des plans de symétrie, on se borne à chercher le la surface dans l'octant antérieur supérieur droit.

tenir l'intersection de de l'onde avec le plan l suffit de remarquer ayons vecteurs situés an xy sont normaux à sections de l'ellipsoïde suivant OZ ; toutes ces nt un axe commun c ; e est l'un des rayons de l'ellipse principale ns le plan xy. La sec-

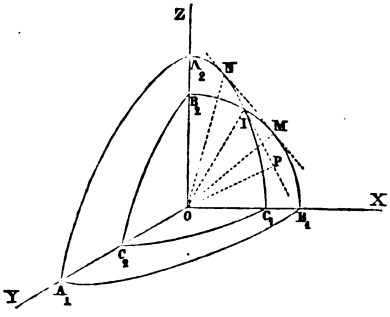


Fig. 34.

surface de l'onde par le plan xy s'obtiendra donc en menant n cercle de rayon égal à c, et portant ensuite sur chaque eur une longueur égale à celle du rayon de l'ellipse princi- qui lui est perpendiculaire. On obtient ainsi l'ellipse princi- même, mais tournée de 90°, c'est-à-dire ayant l'axe b dirigé et l'axe a suivant Oy. Cette ellipse est extérieure au cercle .

a de même que l'intersection par le plan yz se compose d'un rayon égal à a, et d'une ellipse dont l'axe b est dirigé sui- t l'axe c suivant Oy. Le cercle est extérieur à l'ellipse.

ection par le plan xz se compose encore d'un cercle de rayon d'une ellipse ayant un axe égal à a suivant l'axe des z, et un c suivant l'axe des x. Le cercle et l'ellipse se coupent en un g. 34). Le rayon vecteur OI de l'ellipse étant égal à b, est celui des rayons vecteurs de l'ellipse principale de D_1 située an zx qui a pour longueur b et par conséquent au plan mené on vecteur et l'axe b de l'ellipsoïde. La direction OI est donc ulaire à l'une des sections circulaires de l'ellipsoïde D_1.

e réfraction extérieure. — L'équation de l'ellipse située

dans le plan méridien des zx est

$$\rho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{c^2}+\frac{\sin^2\omega}{a^2}\right)=1,$$

ω étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x ; en faisa

cette équation, on trouve pour la valeur correspondante d

est égale à IOX,

$$\operatorname{tg} \mathrm{IOX}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,(^1).$$

Il y a, symétriquement placés dans les 4 quadrants formés des x et des z, 4 points I qui sont les ombilics de la surfa

Ces 4 points correspondent à deux droites telles que nomme *axes de réfraction extérieure*. Les points I sont des liers de la surface de l'onde ; et de chacun d'eux on peu nombre infini de plans tangents à cette surface. En projetan sur chacun de ces plans tangents, on a la direction d'une se propage suivant la direction OI. Il est aisé de voir comm cées toutes ces vibrations ainsi que les vitesses de propag pondantes qui sont les normales à chacun des plans tang face de l'onde.

Soit en effet $\alpha\beta\gamma$ (fig. 35) une des sections circula psoïde D_1 et OI la droite normale qui est l'axe de réfracti correspondant. Tous les rayons de la section circulaire so symétrie et peuvent, par conséquent, correspondre à transmise suivant OI.

Soit $O\alpha$ l'intersection de la section circulaire avec le pl plan tangent à l'ellipsoïde en α coupe ce plan suivant u Les plans tangents à l'ellipsoïde en chacun des points de la sec ont pour enveloppe un cylindre dont les génératrices sont p et dont la section droite est une certaine ellipse $\beta\varpi$. menées à ces plans tangents par le point O sont les no lipse $\beta\varpi$.

Soit OA_1 un rayon quelconque de la section circulair génératrice A_1m du cylindre, puis, au point m, la tang

1. On aurait pu déduire cette équation de celle qui donne *tg* M changeant dans celle-ci a, b, c en $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$, conformément à la ren haut.

droite, et enfin la normale Oa_1 à cette tangente. La droite male au plan tangent A_1ma_1, et OA_1 étant normale à la ercle en A_1, cette tangente est perpendiculaire au plan trouve ainsi perpendiculaire sur le plan de la section cir-ferme OI. Le plan OA_1a_1 est donc bien le plan de vibra-

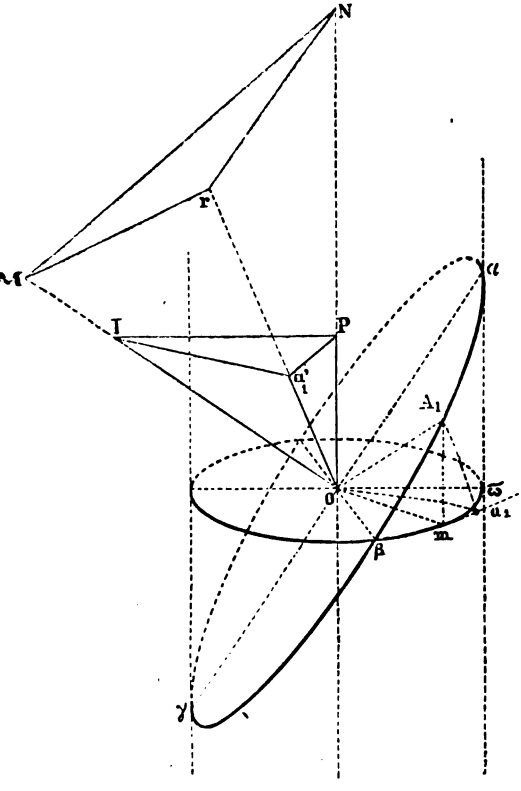


Fig. 35.

n obtient la direction la'_1 de cette vibration en menant Oa'_1 rpendiculaire à Oa_1, puis menant la'_1 qui se trouve ainsi Oa_1 puisque OI est égal à OA_1.

que les vibrations transmises suivant la direction OI sont allèles à un même plan normal à OP menée parallèle à $\alpha\varpi$. facilement OP en menant en I (fig. 34) la tangente à l'ellipse le cercle de rayon b représente l'intersection de la surface de le plan ZX, puis menant OP normal à cette tangente.

Pour trouver la direction de la vitesse de propagation ces vibrations, nous remarquons que Oa'_1 est la vitesse à la vibration Ia'_1; que le triangle POa'_1 est semblable au et que par conséquent Pa'_1 est parallèle à ma_1; on en d est perpendiculaire sur Ia'_1. Le point a'_1 se trouve donc normal à OP sur une circonférence de cercle décrit a diamètre. Cette circonférence est la section circulair 2e degré formé par les directions des vitesses de pro que Oa'_1 correspondant à toutes les vibrations transmises

Si, dans le plan zx, on mène la tangente commune M à l'ellipse qui forment sur ce plan la trace de la surfa plan mené suivant MN perpendiculairement au plan zx N à la surface de l'onde, et perpendiculaire en M au rayon OM représente donc en grandeur et en direction la pagation de la vibration dirigée suivant MN; c'est donc teur de la surface des vitesses normales, et puisque ce r b, il est perpendiculaire à l'une des sections circulaires inverse E, section dont le rayon est $\frac{1}{b}$. C'est la direction a appelé l'axe optique.

Mais le plan MN est non seulement tangent à la surface points M et N; il touche encore la surface suivant une c Il est clair en effet que si nous considérons la section cir lipsoïde E dont tous les rayons sont des axes, chacun correspond à une vibration rectiligne, et ces vibrations, le plan de la section circulaire, se propagent avec une qui est la même pour toutes, et qui est représentée en direction par OM. Toutes ces vibrations seront représ droites menées par M perpendiculairement à OM, et la surface de l'onde en un autre point. Le lieu de tous la courbe de contact de la surface de l'onde et du plan mené en M.

Il est aisé de trouver la nature de cette courbe. Sup que, dans la fig. 35, $\alpha\beta\gamma$ représente la section circula verrons, comme précédemment, que, pour avoir la dire correspondant à une vibration quelconque OA_1 dirigée la section, il faut prendre sur la normale à cette section $OM = \frac{1}{OA_1}$; puis mener dans le plan MOA_1 une droite p

sur OA_1, et prendre sur cette droite une longueur $Or = \frac{1}{Oa_1}$. La droite Or est la direction du rayon, et le point r l'un des points de tangence, avec la surface de l'onde, du plan mené en M perpendiculairement à OM.

Or Mr, étant perpendiculaire à OM, est parallèle à OA_1. Le plan MNr étant parallèle au plan $\alpha\beta\gamma$, et le plan RON étant parallèle au plan mA_1a_1, la droite Nr est parallèle à la tangente au cercle menée en A_1. Les droites Mr et Nr sont donc perpendiculaires l'une sur l'autre et le point r se trouve sur un cercle dont MN est le diamètre.

Remarques d'Hamilton. Expériences de Lloyd. — Lorsqu'un rayon lumineux tombe sur la surface de séparation d'un milieu cristallisé sous une incidence telle que l'onde plane résultante se propage dans ce milieu suivant un axe optique, cette onde plane est unique. Elle transmet des vibrations orientées d'une manière quelconque dans son plan, et par conséquent propage de la lumière non polarisée.

Supposons que le milieu cristallisé soit une lame à faces parallèles. Si IS (fig. 36) est le rayon incident, à l'onde plane se propageant dans le cristal correspondra un nombre infini de rayons réfractés formant

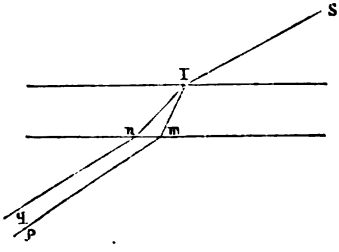


Fig. 36.

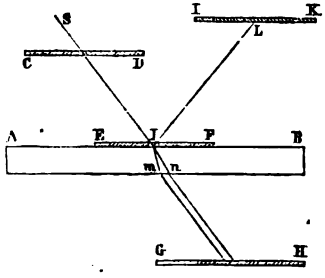


Fig. 37.

les génératrices d'un cône du second degré mIn. Après l'émergence, chacun de ces rayons donnera un rayon émergent parallèle à IS, et il est évident que tous ces rayons formeront un cylindre creux du second degré.

On peut tirer de là une vérification très curieuse de la théorie de la double réfraction. Supposons que la lame cristalline soit taillée de telle sorte que les deux faces parallèles soient perpendiculaires au plan des axes a et c d'élasticité optique. On recouvre la surface de la lame d'un écran EF (fig. 37) percé en I d'une très petite ouverture, et l'on fait tomber en I un faisceau très mince limité par un écran CD placé à une

certaine distance du cristal. En faisant glisser dans son plan la lame et son écran, on fait varier à volonté l'angle d'incidence du faisceau SI. On mesure cet angle en recevant sur un écran IK, l'image L du point I et mesurant l'angle SIL qui est le double de l'angle d'incidence.

Les rayons émergeant de la lame sont reçus sur un écran GH parallèle à la surface de la lame. En général, on voit se dessiner sur cet écran deux points lumineux. Mais en faisant varier lentement l'angle d'incidence, on voit, pour une valeur particulière de cet angle, les deux points se réunir et former une ellipse brillante continue.

On voit pour quelle raison les axes optiques sont appelés quelquefois axes de réfraction conique intérieure.

Si le plan de l'onde transmise par le milieu cristallisé est tangent à la surface de l'onde en un point I, le rayon transmis dans le milieu est unique et coïncide avec l'axe de réfraction extérieure. Mais il y a une infinité de plans qui sont tangents à la surface de l'onde au point I, il y a donc une infinité d'ondes planes transmises, bien qu'il n'y ait qu'un seul rayon. A chacune de ces ondes planes correspond un rayon incident. Il y a donc un nombre infini de rayons incidents correspondant tous à un seul et même rayon réfracté dirigé suivant une ligne OI. Tous ces rayons forment les génératrices d'un cône du deuxième degré. On verrait de même qu'un rayon unique dirigé suivant OI donne à l'émergence un cône de rayons lumineux.

De là une expérience remarquable. La lame qui a servi dans l'expérience précédente reçoit en un point A (fig. 38) un cône de rayons rendus divergents par une lentille convenable. Les rayons ressortent de la lame en traversant une très petite ouverture pratiquée en B dans un écran CD fixé sur la face d'émergence. En faisant glisser la lame parallèlement à elle-même, on trouve une position pour laquelle le rayon AB transmis dans l'intérieur du cristal est dirigé suivant un axe de réfraction conique extérieure, et alors le rayon émergent s'épanouit en formant un faisceau creux qui dessine un anneau lumineux sur un écran EF. Cet anneau augmente de diamètre lorsqu'on éloigne de la lame l'écran EF; et le diamètre est à chaque instant proportionnel à la distance qui sépare la lame de l'écran.

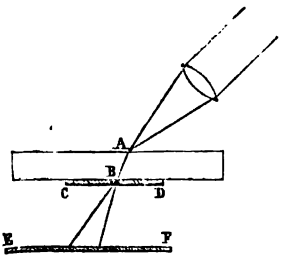


Fig. 38.

Tous ces phénomènes indiqués, d'après la théorie, par Hamilton, ont

par Lloyd, et sont venus confirmer d'une façon éclatante Fresnel.

ristaux à axe principal, les deux axes optiques, de même de réfraction conique extérieure, se réduisent à une seule i est celle de l'axe principal. Un faisceau lumineux traver- al suivant cette direction, ne se dédouble ni à l'entrée ni à peut transmettre de la lumière polarisée dans toutes les

nation des directions des deux rayons réfractés corres- un rayon incident. — Une onde plane se dédouble géné- orsqu'elle pénètre dans un milieu cristallisé, en deux ondes ne correspond à un rayon réfracté. Pour trouver les direc- s deux rayons réfractés provenant d'un rayon incident uni- it, en répétant la construction employée précédemment pour s deux ondes planes, de mener en P (fig. 27, page 125) la l'onde; les deux ondes planes perpendiculaires au plan d'in- menées par le point M à une distance de MP égale à $\frac{l}{\sin I}$, oucher la surface de l'onde en deux points; les rayons vec- és par ces deux points sont les directions des rayons réfractés. nt pas, en général, contenus dans le plan d'incidence. Cette ité se présente cependant quand le plan d'incidence est l'un de symétrie de la surface de l'onde.

nt encore résoudre le problème en déduisant les deux direc- rayons lumineux réfractés de la connaissance des deux direc- propagation des ondes planes. On sait en effet que le rayon et la direction de propagation sont dans un même plan avec ion de vibration, et la direction de vibration est connue donne celle de la propagation. Il ne reste plus qu'à con- angle U que fait la direction de propagation avec celle du dont nous allons chercher la valeur.

ules de Mac-Cullagh donnant l'angle U compris entre la n de propagation normale et celle du rayon lumineux. — s l'équation de la page 109,

$$\frac{m'}{r}(a^2 - r^2) = -u \times A_1 a_1 \quad \text{ou} \quad -m' = \frac{u}{a^2 - r^2} \cdot A_1 a_1 \cdot r,$$

peut encore écrire :

$$-m' = \frac{ur^2}{a^2 - r^2} \cdot \operatorname{tg} U'.$$

Si nous formons les équations analogues en n' et p', si élevons au carré les membres de chacune des trois équati tenues, et si enfin nous les ajoutons membre à membre, drons :

$$1 = r^2 \operatorname{tg}^2 U' \left(\frac{u^2}{(a^2 - r^2)^2} + \frac{v^2}{(b^2 - r^2)^2} + \frac{w^2}{(c^2 - r^2)^2} \right)$$

Or, si nous appelons r' et r'' les deux valeurs de r corres v, w, on trouve

$$S \frac{u^2}{(a^2 - r'^2)^2} = \frac{r''^2 - r'^2}{(r'^2 - a^2)(r'^2 - b)(r'^2 - c^2)},$$

en désignant par S $\frac{u^2}{(a^2 - r'^2)^2}$ la somme des trois terme $\frac{v^2}{(b^2 - r'^2)^2}$, $\frac{w^2}{(c^2 - r'^2)^2}$ [1]. Si l'on appelle θ' et θ'' lesang les que tion(u v w) avec les axes optiques, il est aisé de voir que l

$$r'^2 - a^2 = -\frac{a^2 - c^2}{2}[1 + \cos(\theta' - \theta'')],$$

$$r'^2 - c^2 = \frac{a^2 - c^2}{2}[1 - \cos(\theta' - \theta'')],$$

$$r'^2 - b^2 = a^2 - b^2 - \frac{a^2 - c^2}{2}[1 + \cos(\theta' - \theta$$

On connaît d'ailleurs la relation :

$$r'^2 - r''^2 = (a^2 - c^2) \sin \theta' \sin \theta''.$$

On peut donc écrire :

$$r'^2 \operatorname{tg}^2 U' = \frac{(a^2 - c^2)^2 \sin(\theta' - \theta'') \left[\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} - \cos^2 \frac{\theta +}{2} \right.}{8 \sin \theta' \sin \theta''}$$

En appelant v l'angle de l'axe optique avec l'axe des x; $\frac{a^2}{a^2}$ et la parenthèse du numérateur devient :

$$\cos^2 v - \cos^2 \frac{\theta' - \theta''}{2} = \frac{1}{2}[\cos 2v - \cos(\theta' - \theta'')];$$

[1] V. Lamé. — *Théorie mathématique de l'élasticité*, pages 237 et 238.

éduit :

$$\text{tg}^2\, U' = \frac{(a^2 - c^2)^2 \sin^2(\theta' - \theta'')\,[\cos(\theta' - \theta'') - \cos 2v]}{16 \sin\theta' \sin\theta''}$$

s représentons sur la surface d'une sphère (fig. 39) les traces de la direction OP (u, v, w), et des des axes optiques OA_1 et OA_2, nous ns le triangle sphérique PA_1A_2, en l'angle $A_1 PA_2$:

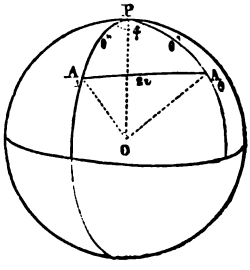


Fig. 39.

$$\text{os}\ \theta' \cos\theta'' - 2 \sin\theta' \sin\theta'' \sin^2 \frac{1}{2}\psi,$$

$$\theta'') - \cos 2v = 2 \sin\theta' \sin\theta'' \sin^2 \frac{1}{2}\psi.$$

ans la valeur de $r'^4 \text{tg}^2 U'$, il vient :

$$4r'^2 \text{tg}^2 U' = (a^2 - c^2)^2 \sin^2(\theta' - \theta'') \sin^2 \frac{1}{2}\psi,$$

$$\text{tg}\ U' = \pm \frac{a^2 - c^2}{2r'^2} \sin(\theta' - \theta'') \sin \frac{1}{2}\psi.$$

verait de même :

$$\text{tg}\ U'' = \pm \frac{a^2 - c^2}{2r''^2} \sin(\theta' + \theta'') \cos \frac{1}{2}\psi.$$

eux équations remarquables ont été établies par Mac Cullagh. éterminent complètement les deux rayons réfractés lorsqu'on les deux vitesses de propagation, les plans de vibration, et le ns lequel il faut compter l'angle U à partir de la direction de se. Pour préciser cette dernière donnée, il suffit de remarquer 'on considère l'ellipse suivant laquelle l'ellipsoïde principal est par le plan de vibration, l'angle aigu du rayon vecteur avec la e est dirigé du côté du petit axe de l'ellipse. Le pied de la perulaire abaissée du centre sur la tangente est donc placé du côté t axe ; l'angle U doit ainsi être compté à partir de la direction de sse de propagation et en se dirigeant sur le grand axe de e.

nules approchées. — Lorsqu'on fait usage du genre d'approximajà employé et qui consiste à négliger le carré de la différence de

deux rayons vecteurs quelconques de l'ellipsoïde principal, fondre sin U et U, 1 et cos U. On aura donc $Oa_1 = \rho_1$ (fig. de la relation $Oa_1 = \rho_1 \cos U$, et la surface de l'onde se co celle des vitesses normales, les axes optiques se confon axes de réfraction intérieure. Toutefois l'angle U que fait l la direction de propagation normale ne s'annule pas ; il très petit, et la longueur du rayon vecteur de la surface va du centre de propagation à un point de l'onde plane n d'un infiniment petit du second ordre de la longueur du r de la surface des vitesses normales qui est la normale à l'o

En appliquant notre méthode d'approximation à la formu tg U', il vient :

$$\operatorname{tg} U' = \frac{a-c}{b} \sin(\theta' - \theta'') \sin \frac{1}{2} \psi.$$

Si on l'applique aux cristaux uniaxes, on trouvera que l'un est nul, et que pour l'autre on a :

$$\operatorname{tg} U' = \frac{a-b}{b} \sin 2\theta.$$

Si le plan d'incidence contient l'axe principal, le rayo naire et le rayon ordinaire sont dans le plan d'incidence tion de la vitesse de propagation du rayon extraordinaire fa du rayon ordinaire un angle ε égal à $\pm \frac{a-b}{b} \sin^2\theta \operatorname{tg} R$; le rayon extraordinaire fait avec le rayon ordinaire est don

$$\lambda = \varepsilon \pm U = \frac{a-b}{b} (\pm \sin^2\theta \operatorname{tg} R \pm \sin 2\theta).$$

Soit ω l'angle aigu que fait l'axe principal avec la normale de séparation ; si le cristal est positif, l'axe principal est l'a d'élasticité, et il faut porter l'angle U soit du côté de la nor sens opposé, suivant que $R + \omega$ est plus petit ou plus gr On a :

$$\lambda = \frac{a-b}{b} (-\sin^2\theta \operatorname{tg} R \pm \sin 2\theta) ;$$

on prendra le signe + lorsque $R + \omega < 90^\circ$, et le signe − contraire.

cristal est négatif, on aura :

$$\lambda = \frac{a-b}{b}(\sin^2 \theta \operatorname{tg} R \pm \sin 2\theta);$$

dra le signe — si $R + \omega$ est plus petit que 90° (fig. 40), le dans le cas contraire.

oit que le rayon extraordinaire est plus, tantôt moins éloigné de la e que le rayon ordinaire. La direc- rayon n'est pas soumise à des lois imples que celle de la vitesse de ation.

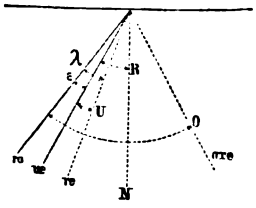


Fig. 40.

POLARISATION CHROMATIQUE

CHAPITRE V

LUMIÈRE PARALLÈLE

I. — DESCRIPTION DES APPAREILS.

Les vibrations d'une molécule du fluide qui propage la lu
planes. Si l'on ne considère que les vibrations isochrones, c
celles qui donnent naissance à de la lumière d'une couleu
née, le déplacement périodique de la molécule rapporté à
rectangulaires ξ et η peut toujours être représenté par les
tions :

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \alpha\right);$$

$$\eta = B \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} + \beta\right).$$

En éliminant le temps variable t entre ces deux équatio
aisément que, en réalité, la trajectoire de la molécule est u
ellipse. On dit que la vibration est *elliptique*. Rapportées a
l'ellipse de vibration, les projections des déplacements de l
sur les axes coordonnés seraient :

$$\xi = M \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad \eta = N \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

L'équation de l'ellipse étant :

$$\frac{\xi^2}{M^2} + \frac{\eta^2}{N^2} = 1.$$

vibration est *circulaire* lorsque M = N.

rsque M = 0 ou N = 0, la vibration est *rectiligne*.

emploie souvent les mots de polarisations rectiligne, circulaire, ique. Nous nous contenterons de rappeler que, lorsque la pola- on est rectiligne, on appelle *plan de polarisation* un plan perpen- aire à la vibration.

lumière qu'émettent directement les sources lumineuses, et qu'on le lumière naturelle, ne possède, à proprement parler, aucun des es de polarisation qui vient d'être défini. Les molécules qui vibrent l'influence de ces radiations lumineuses sont dans le même état si elles vibraient elliptiquement, et si en même temps on concevait l'ellipse de vibration se déplaçât très rapidement et très irrégu- ment dans son plan. En d'autres termes, la projection du mouve- t de la molécule sur une droite est la même quelle que soit e droite.

n possède le moyen de régulariser cette vibration en quelque e désordonnée de la lumière naturelle et de rendre stable l'ellipse ratoire. La lumière qui a subi cette modification est dite polarisée. affecte cependant plus spécialement cette dénomination à celle qui polarisée rectilignement ou pour laquelle l'ellipse vibratoire est e droite.

Les appareils qui servent à polariser la lumière portent le nom de lariseurs; nous allons passer successivement en revue ceux qui sont plus employés.

Polariseurs par réflexion. — On fait tomber sur un miroir en

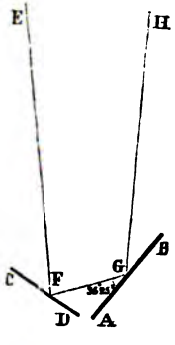


Fig. 41.

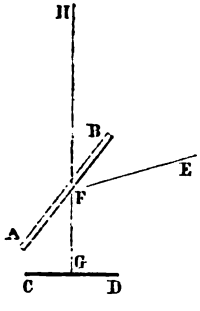


Fig. 42.

erre noir AB (fig. 41) un faisceau de lumière parallèle FG, faisant

avec la surface du miroir un angle d'environ 35° 25′. Le f
fléchi est polarisé dans le plan d'incidence, il vibre donc
ment au miroir. Pour former le faisceau parallèle incident,
faisceau réfléchi doit être vertical, on place devant le mir
miroir étamé ordinaire CD qui reçoit la lumière des nuée
renvoie suivant la direction FG. On peut substituer au miro
noir une pile de glaces minces sans couleur.

On peut encore recourir à la disposition suivante. Une
tain AB (fig. 42) reçoit la lumière diffuse EF, la réfléchit su
étamé horizontal CD, qui la renvoie suivant la verticale GH.
est polarisée par la première réflexion sur AB; en travers
elle reste polarisée dans le plan d'incidence.

Polariseur par absorption. — On interpose sur le fais
dent parallèle et dans une direction normale une plaque de t
La tourmaline cristallise dans le système rhomboédrique, et
est taillée parallèlement à l'axe ternaire. Le faisceau de lum
relle donne donc à l'émergence deux faisceaux vibrant l'un sui
l'autre perpendiculairement à l'axe. Or la tourmaline jouit de
priété curieuse de posséder un pouvoir absorbant considér
les rayons ordinaires vibrant perpendiculairement à l'axe. I
transmis se composera donc, à peu près en totalité, des ray
ordinaires vibrant suivant l'axe.

Ce polariseur très commode a l'inconvénient de colorer l
de lumière, les tourmalines qui jouissent de propriétés al
convenables étant toujours assez fortement colorées.

Polariseurs réfringents. — 1° *Prisme de Nicol.* — On
sur le faisceau de lumière naturelle un appareil nommé
Nicol. Pour le construire, on prend un de ces cristaux de
bonatée parfaitement limpides et transparents qu'on rencontr
terrains volcaniques de l'Islande. On sait que la chaux carbo
tallise dans le système rhomboédrique, et possède des clivage
suivant les faces du rhomboèdre. On prend un solide de cl
limpide dont le rapport de la longueur à l'épaisseur so
de 3 à 1; on le scie en deux suivant la petite diagonale AA
qui fait alors avec AB un angle d'environ 89° 17′, puis on
deux morceaux avec du baume de Canada. Dans la calcite, q
cristal uniaxe, l'indice ordinaire est égal à 1,483, et l'indic
dinaire à 1,658. De la grande différence de ces deux indice

n particulière donnée à la section AA′, il résulte les consé-
s suivantes.

n considère un rayon cheminant suivant une direction paral-
a longueur AB′ du spath, et les deux vibrations
res et extraordinaires qui se meuvent à la fois
te direction, le rayon ordinaire, arrivant à la
de séparation du spath et du baume, la ren-
en faisant un angle d'incidence égal à 69° 49′;
gle étant supérieur à l'angle de réflexion totale
on ordinaire, celui-ci est réfléchi et ne poursuit
marche. Le rayon extraordinaire au contraire,
angle de réflexion totale est plus grand, pour-
a marche, pénètre dans la seconde partie du
et en ressort parallèlement à sa direction pri-
.

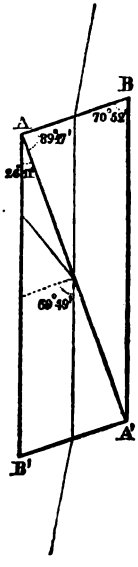


Fig. 43.

restera vrai pour les rayons compris dans un
n cône que l'on pourrait déterminer par le cal-
Les rayons situés dans l'intérieur de ce cône
polarisés par leur passage à travers le prisme,
ue les rayons extraordinaires seuls sont trans-
les rayons situés en dehors de ce cône ne sont
olarisés. L'ouverture de ce cône, qui détermine le
p, varie suivant les dispositions données à l'appareil, c'est-à-dire
nt la direction du plan de coupe AA′, et suivant la nature du milieu
posé entre ses deux moitiés. Avec les nicols ordinaires, le champ
'environ 30°.

I. Hartnack et Prazmowski[1] ont modifié le prisme de Nicol, de
ère à lui donner une moindre hauteur, sans que le champ soit
nué. Ils dirigent le trait de scie perpendiculairement à l'axe optique
ristal, et ils recollent avec de l'huile de lin dont l'indice est 1,485.
champ est encore d'environ 30°, tandis que, à largeur égale, la
eur du prisme n'est plus que 0,71 de celle du nicol ordinaire.

n peut aussi se servir pour polariseur d'un simple rhomboèdre de
h d'Islande. Si l'on fait tomber sur une des faces du rhomboèdre
petit faisceau de lumière parallèle limité latéralement, par son pas-
à travers un diaphragme circulaire très petit par exemple, ce fais-
n se divisera, en traversant le cristal, en deux autres qui suivent des

[1] *Ann. de ch. et de ph.*, 4e S., T. 7.

chemins différents, et sont polarisés à angle droit. Si le rhoı
assez épais pour que, en vertu de leur légère divergence n
deux faisceaux soient complètement séparés à la sortie d
suffira d'arrêter par un écran l'un de ces faisceaux pour
donne de la lumière polarisée. Lorsque l'écran est mobil
volonté se procurer de la lumière polarisée dans un plan
plan perpendiculaire.

Analyseurs. — Lorsqu'on fait tomber de la lumière po
lignement sur un cristal, elle se partage en deux rayons
brations sont rectangulaires. La vibration incidente se part
les règles de la composition des petits mouvements, entr
tions de ces deux rayons. Ces deux vibrations se propagen
parallèlement dans l'intérieur du cristal, mais la vitesse d
gation est inégale et les deux vibrations, synchroniques à
temps, c'est-à-dire affectant en même temps l'origine des
contractent l'une par rapport à l'autre un certain retard.
n'est pas très épais, si c'est une simple lame cristalli
rayons sont à peine séparés à l'émergence, les ondes pla
respondent à chacun d'eux se confondent à très peu près,
tions qui leur correspondent peuvent être supposées se co
elles comme si elles étaient dans un même plan. On peut d
les vibrations du faisceau émergent sont formées par la
de deux vibrations rectangulaires, et par conséquent qu
émergent est polarisé elliptiquement au moins dans le cas

Mais on peut placer à la sortie du cristal un autre app
riser la lumière, et qui, dans cette position particulière, p
d'*analyseur*. La vibration rectiligne du faisceau unique q
l'analyseur est la projection des vibrations rectangulaires
qui émerge du cristal. On voit donc que la vibration de l'a
pend à la fois des deux vibrations propagées par le
dépend en particulier du retard relatif que l'inégalité
tion a introduit entre ces deux vibrations. C'est dans ce
que se produisent les plus remarquables et les plus im
phénomènes qui se rapportent à la biréfringence.

Les phénomènes diffèrent suivant que le faisceau lu
tombe sur la lame cristalline est formé par des rayons
parallèles entre eux, ou par des rayons très divergents,
pour employer l'expression consacrée, suivant que la lu
rallèle ou convergente.

lons étudier d'abord les phénomènes dus à la lumière paral-
s commencerons par dire quelques mots des appareils qui
les observer. Ils comprennent tous un polariseur et un ana-
tre lesquels se place la lame cristallisée.

ption de quelques appareils — Appareil de Norremberg.
scope polarisant. — L'appareil de Norremberg (fig. 44),
nmode lorsqu'on n'a pas besoin d'un fort grossissement, em-

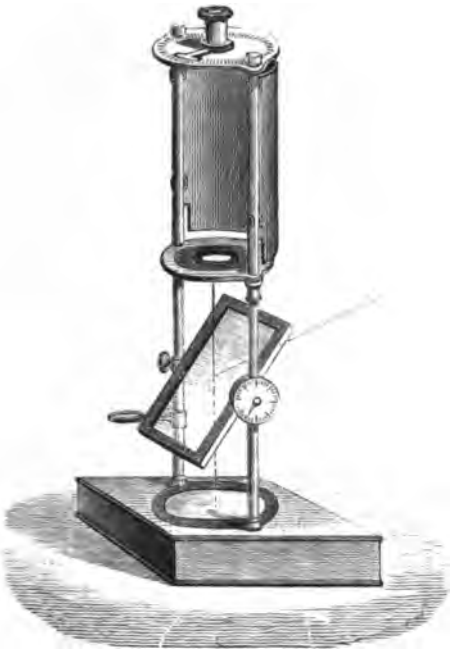


Fig. 44.

omme polariseur une glace sans tain combinée avec un miroir
Le cristal est posé sur une plaque tournante, qui permet de
ter dans tous les azimuts possibles. On peut substituer à la pla-
ne lame de verre tournant autour d'un axe horizontal, de ma-
à donner aussi au cristal des inclinaisons quelconques. L'ana-
est formé d'un spath épais ou d'un nicol. Si l'on a un spath, un
mobile sert à arrêter tantôt l'une, tantôt l'autre image; un écran
he la lumière directe de frapper le cristal.
pareil dont on se sert le plus habituellement est un microscope
ire, sous le porte-objet duquel on place un prisme de Nicol, et

au-dessus de l'oculaire duquel est disposé, soit un autr rhomboèdre de spath. Nous reviendrons plus tard su détaillée du microscope polarisant.

II. — Lumière normale.

§ 1. CAS D'UNE SEULE LAME CRISTALLINE.

Intensité des vibrations émergeant de l'analyse gine un faisceau de lumière parallèle et polarisée recti bant normalement sur une la faces parallèles. On suppose d lumière est homogène, et qu en sont caractérisées dans l'a gueur d'ondulation égale à λ rée d'oscillation égale à T.

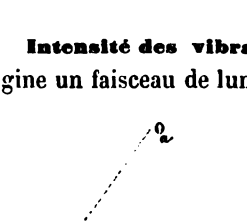


Fig. 45.

Soit AI (fig. 45) la direction du rayon incident ; A*o* et A*e* tions perpendiculaires entre e quelles vibrent les deux rayo l'on représente par 1 le dépla vibration AI, et par α l'angle le déplacement 1 se décompo deux directions A*o* et A*e* d ment des déplacements égaux à cos α et à — sin α. dité du langage, nous distinguerons les deux vibratio donnant arbitrairement à la première le nom de vibrat l'autre celui de vibration extraordinaire.

La vibration ordinaire se propage avec une vitess l'épaisseur de la lame, $\frac{\varepsilon}{u_o}$ est le temps qu'elle mettra tandis que la vibration extraordinaire emploie le te même chemin. La vibration d'une molécule du rayon or à l'émergence, en retard sur celle qui se produit à l' quantité de temps égale à $\frac{\varepsilon}{u_e}$.

Si le déplacement à l'incidence, évalué suivant la direction du déplacement, est, pour le rayon ordinaire, représenté par

$$\xi_0 = \cos\alpha \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

il est représenté à l'émergence par

$$\xi_0 = \cos\alpha \sin 2\pi \frac{t - \frac{\varepsilon}{u_0}}{T}.$$

Pour le rayon extraordinaire, on trouve de même

$$\eta_e = -\sin\alpha \sin 2\pi \frac{t - \frac{\varepsilon}{u_e}}{T}.$$

Posons, pour simplifier l'écriture,

$$o = \frac{\varepsilon}{u_0}, \qquad e = \frac{\varepsilon}{u_e};$$

o et e sont des temps. Mais si l'on considère un milieu, tel que l'air, pour lequel on supposera la vitesse de propagation représentée par l'unité, o et e seront aussi les épaisseurs de ce milieu, que la lumière parcourt dans des temps respectivement égaux à ceux qu'emploie chacune des deux vibrations à traverser la lame cristalline.

Si d'ailleurs on appelle λ la longueur d'onde que possède dans l'air l'espèce de lumière considérée dont la durée des vibrations est T, on aura $\lambda = T$, et les équations des deux vibrations pourront prendre la forme suivante :

$$\xi_0 = \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{o}{\lambda}\right),$$

$$\eta_e = -\sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right).$$

Lorsqu'on considère o et e comme représentant des temps, ils prennent le nom de *phases* ou *retards;* lorsqu'on les considère comme représentant des longueurs, ce sont des *différences de marche;* les angles $\frac{2\pi o}{\lambda}$, $\frac{2\pi e}{\lambda}$ sont des *anomalies.*

Au sortir de la lame les deux vibrations cheminent vitesses égales, et sans changer, par conséquent, leu Arrivées sur l'analyseur, elles se composent de mani vibrations dirigées suivant les deux sections princi l'analyseur. Appelons β l'angle de la vibration Ao_a (rons être l'ordinaire, avec la vibration ordinaire Ao line ; l'angle β sera compté dans le même sens que

La vibration ordinaire Ao_a est représentée par :

$$\Xi_o = \cos\alpha\cos\beta\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{o}{\lambda}\right) - \sin\alpha\sin\beta\sin$$

La vibration extraordinaire Ae_a est représentée par

$$H_e = -\cos\alpha\sin\beta\sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{o}{\lambda}\right) - \sin\alpha\cos\beta$$

La première expression peut se mettre sous la form

$$\Xi_o = \Big[\cos\alpha\cos\beta\cos 2\pi\frac{o}{\lambda} - \sin\alpha\sin\beta\cos 2\pi$$

$$-\Big[\cos\alpha\cos\beta\sin 2\pi\frac{o}{\lambda} - \sin\alpha\sin\beta\sin 2\pi\frac{e}{\lambda}$$

et l'on voit immédiatement que l'intensité (ou la forc la vibration) est représentée par

$$I_o = \Big[\cos\alpha\cos\beta\cos 2\pi\frac{o}{\lambda} - \sin\alpha\sin\beta\cos 2$$

$$+\Big[\cos\alpha\cos\beta\sin 2\pi\frac{o}{\lambda} - \sin\alpha\sin\beta\sin 2$$

En effectuant ces calculs très simples, il vient :

$$(1)\quad I_o = \cos^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\alpha\sin^2\beta - 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\,\mathrm{si}$$

ou encore à cause de $\cos 2\pi\frac{o-e}{\lambda} = 1 - 2\sin^2\pi\frac{o-}{\lambda}$

$$I_o = \cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\pi\frac{o-}{}$$

On trouverait de même pour l'autre vibration :

$$I_e = \sin^2(\alpha + \beta) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o - e}{\lambda}.$$

Les intensités des deux rayons émergents sont, comme il était nécessaire, complémentaires l'une de l'autre.

Discussion des formules précédentes. — Si l'on considère en particulier l'un des rayons, l'ordinaire par exemple, on voit que l'intensité dépend de deux termes dont le premier, $\cos^2(\alpha + \beta)$, ne varie qu'avec l'angle $(\alpha + \beta)$ que font entre elles les deux vibrations de la lumière au sortir de l'analyseur et du polariseur, ou, comme on le dit encore, avec l'angle que font entre elles les deux sections principales de l'analyseur et du polariseur. Le second terme de l'expression qui donne I_o, dépend au contraire de la grandeur relative de α et de β, c'est-à-dire de l'angle que fait la section principale de la lame avec celle de l'analyseur.

Lorsque $\alpha + \beta$ est égal à 90°, c'est-à-dire lorsque les sections principales de l'analyseur et du polariseur sont à angle droit, $\cos(\alpha + \beta)$ est nul, et l'intensité I_o ne dépend que du 2e terme. Elle s'annule pour

$$\sin 2\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \sin 2\beta = 0,$$

c'est-à-dire lorsque l'une des deux section sprincipales de la lame coïncide avec la section principale de l'analyseur ou avec celle du polariseur. L'intensité est d'ailleurs la plus grande possible, toutes choses égales, lorsque le deuxième terme est maximum, c'est-à-d re lorsque le produit $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ est maximum, ou encore lorsque $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$. La condition qui donne le maximum d'intensité est donc remplie lorsque la section principale de la lame est à 45° de chacune des sections principales de l'analyseur et du polarisateur.

Le second terme de I_o dépend encore de la valeur de $\sin^2 \pi \frac{o - e}{\lambda}$. La valeur de $o - e$ est facile à connaître, car

$$o - e = \varepsilon \left(\frac{1}{u_o} - \frac{1}{u_e} \right),$$

u_o et u_e étant les deux valeurs du rayon vecteur de la surface des vitesses

normales correspondant à la direction du rayon i
que l'on a sensiblement (pages 118 et 122) :

$$u_e - u_o = \delta_e - \delta_o = \pm (a - c) \sin \theta' \sin$$

θ' et θ'' étant les angles formés par le rayon avec l
cristal; on sait en outre que dans cette formule, il
gne — quand le cristal est positif, le signe + quand
aurons donc approximativement :

$$o - e = \pm \varepsilon \frac{u_e - u_o}{u_o u_e} = \pm \varepsilon \frac{a - c}{b^2} \sin \theta' \sin$$

On voit aisément que, dans l'ordre d'approxima
plaçons, on peut assimiler $\frac{a-c}{b^2}$ à $\frac{a-c}{ac}$ ou à $\frac{1}{c}$
écrire encore

$$o - e = \pm \varepsilon \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) \sin \theta' \sin \theta''.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$n_a = \frac{1}{a}, \qquad n_b = \frac{1}{b}, \qquad n_c = \frac{1}{c}$$

les quantités n_a, n_b, n_c, qui sont rangées dans l'
croissante, sont appelées les *indices principaux* du

$$o - e = \pm \varepsilon (n_c - n_a) \sin \theta' \sin \theta''.$$

Lorsque

$$\pi \frac{o - e}{\lambda} = k\pi,$$

k étant un nombre entier quelconque, le second te
tensité I_0 est constante, quelle que soit l'orientatio
tensité ne dépend plus que de $\alpha + \beta$; elle est nulle
et le polariseur sont croisés à angle droit.

L'équation

$$\frac{o - e}{\lambda} = k \qquad \text{ou} \qquad \frac{n_c - n_a}{\lambda} \sin \theta' \sin \theta$$

peut encore s'écrire :

$$\varepsilon = k \frac{\lambda}{(n_c - n_a) \sin \theta' \sin \theta''}.$$

On peut donc donner à la lame des épaisseurs telles que les phénomènes ne dépendent plus de l'orientation de celle-ci. Toutes choses égales, ces épaisseurs forment une progression arithmétique dont la raison est

$$\frac{\lambda}{(n_c - n_a)\sin\theta'\sin\theta''}.$$

Le premier terme de cette progression est égal à 0.

On peut satisfaire à la condition $\frac{o-e}{\lambda} = 0$ sans rendre nulle l'épaisseur ε de la lame; il suffit, en effet, que l'un des deux angles θ' et θ'' soit nul, c'est-à-dire que la lame soit taillée perpendiculairement à un axe optique. Dans ce cas, la lame, quelle qu'en soit l'épaisseur, se comporte entre le polariseur et l'analyseur comme une substance monoréfringente.

Cas où la lumière incidente n'est pas homogène. — Nous avons usqu'ici supposé que la lumière employée était homogène. Il importe d'examiner le cas où elle est blanche.

On peut, on le sait, considérer la lumière blanche comme formée par la superposition d'un nombre infini de lumières homogènes. Il suffit donc d'appliquer à chacune de ces lumières différentes la théorie qui vient d'être exposée. On trouve sans peine que la lumière qui sort de l'analyseur est divisée en deux faisceaux; dans le faisceau ordinaire, l'intensité I_0 s'obtient en formant pour chaque couleur, de longueur d'onde λ, le binôme

$$\cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}.$$

et en le multipliant par une quantite i_λ qui représente la proportion de lumière, de longueur d'onde λ, que contient la lumière blanche d'intensité égale à 1.

On a donc pour l'intensité I_0 une expression de la forme :

$$I_0 = \cos^2(\alpha+\beta)\ \Sigma i_\lambda + \Sigma\left(i_\lambda \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\pi \frac{o-e}{\lambda}\right).$$

Le symbole Σ indique la somme d'un nombre infini de termes correspondant à toutes les valeurs de λ. D'après la définition même, Σi_λ est égal à 1 ; quant à $\Sigma i \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2\pi \frac{o-e}{\lambda}$, on peut remarquer qu'à

chaque valeur de λ répondent des valeurs particulières
puisque les sections principales de la lame ne sont p
général du moins, pour les différentes valeurs de λ.
taux où la dispersion est faible relativement à la do
où, par conséquent, l'ellipsoïde d'élasticité optique
différents rayons colorés, le produit $\sin 2\alpha \sin 2\beta$
même valeur pour tous les termes de la somme, et l'o

$$I_o = \cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \, \Sigma \left(i_\lambda \sin^2 \pi \right.$$

On voit, sous cette forme que, pour des valeurs don
l'intensité se compose de deux parties ; l'une, indépe
gueur d'onde, représente une certaine quantité de lum
portionnelle à la valeur de $\cos^2(\alpha+\beta)$; quant à l'
représente la somme des intensités de diverses lumi
viennent compléter le faisceau. La proportion de c
colorés est marquée pour chacun d'eux par $i_\lambda \sin^2 \pi \frac{o}{}$

$\Sigma i_\lambda \sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$ donne donc, au moyen de la rég
Newton, la teinte du faisceau. Le coefficient $\sin 2\alpha$ si
tensité de cette partie colorée du faisceau, que la qu
blanche proportionnelle à $\cos^2(\alpha+\beta)$, vient ensui
moins de blanc.

Il résulte de là que la teinte du faisceau émergent
la quantité

$$A = \Sigma i_\lambda \sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}.$$

Les positions respectives des sections principales
la lame et de l'analyseur, font varier seulement l'int
et la proportion de lumière blanche dont il est
lavé.

Pour le faisceau extraordinaire, on aura de même :

$$I_e = \sin^2(\alpha+\beta) - A \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

ou encore :

$$I_e = \sin^2(\alpha-\beta) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \, \Sigma i_\lambda \cos^2 \pi \frac{o}{}$$

ne dépend que de la quantité $\Sigma i\lambda \cos^2\pi\frac{o-e}{\lambda}$, elle est plus
vée de blanc, suivant les valeurs de α et de β.

om des formules dans les cas de la lumière non . — Pour discuter la formule qui donne I_0, nous supposerons nent :

$+\beta=\omega$ est constant et que α varie d'une manière conti- 0 jusqu'à 2π, ce qui revient à laisser fixe le polariseur et et à faire tourner la lame dans son plan ;

x restant constant, ω varie d'une manière continue, ce qui aisser fixe le polariseur et la lame et à faire tourner l'analy-

$\beta=\omega$ *est constant* et plus petit que 90°.

$$I_0=\cos^2\omega+A\sin 2\alpha\sin 2(\omega-\alpha),$$

$$I_1=\sin^2\omega-A\sin 2\alpha\sin 2(\omega-\alpha).$$

mplifier le langage, nous désignerons par M le terme

$$A\sin 2\alpha\sin 2(\omega-\alpha).$$

isé de voir que pour les 8 valeurs de α

°, ω, 90°, 90° + ω, 180°, 180° + ω, 270°, 270° + ω,

0 et par conséquent de la lumière blanche. Toutes les fois que ar zéro, il change de signe, et toutes les fois que M est négatif, est celle qui caractérise le rayon extraordinaire.

a fig. 46, les 4 secteurs non hachés dont l'angle est ω compren- c toutes les valeurs de α pour lesquelles la teinte est celle que ellerons directe et qui est donnée par M positif. Les 4 secteurs omprennent toutes les valeurs de α pour lesquelles la teinte est ientaire. Pour toutes les directions qui limitent les secteurs, re est blanche.

considérait le rayon extraordinaire, les secteurs blancs de la rrespondraient à la teinte complémentaire, les secteurs hachés te directe.

Lorsque $\omega = 90$, il n'y a plus de positions donnant la
mentaire avec le rayon ordinaire ni de positions donn

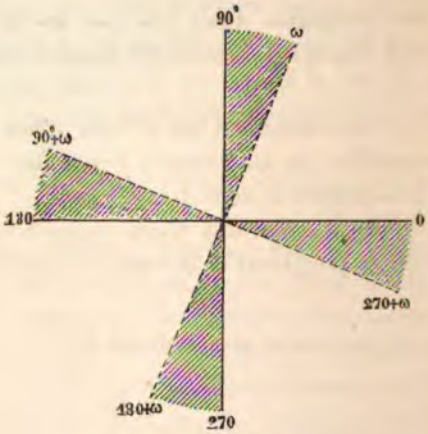


Fig. 46.

directe avec le rayon extraordinaire. Mais alors pour $\alpha =$
on a $M = 0$, et $I_0 = 0$, puisque le terme $\cos^2(\alpha + \beta)$ est
reste toujours de même teinte, mais elle s'éteint lorsque
sections principales est parallèle ou perpendiculaire à l'un
principales du polariseur ou de l'analyseur.

2° *α est constant;*

M s'annule pour

$$\omega = \alpha, \quad 90^\circ + \alpha, \quad 180^\circ + \alpha, \quad 270^\circ + \alpha,$$

ce qui donne 4 positions de l'analyseur pour lesquelles l
blanche.

Le terme M changeant de signe pour chaque valeur de
nule, la lame présentera la teinte directe pour toutes les
comprises entre α et $90^\circ + \alpha$, ainsi qu'entre $180^\circ + \alpha$
elle présentera la teinte complémentaire pour les autres
l'analyseur (fig. 47).

On voit en résumé qu'une même lame ne peut prése

teintes; l'une, que nous appelons *directe*, est comprise dans la série des valeurs que peut présenter

$$A = \Sigma i_\lambda \sin^2 \pi \frac{o - e}{\lambda},$$

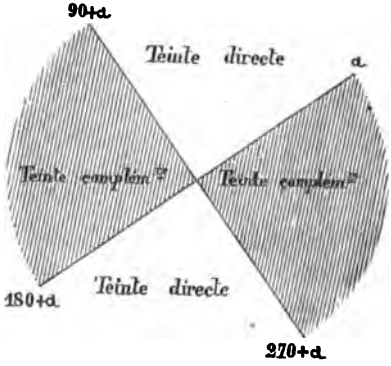


Fig. 47.

et l'autre, que nous appelons *complémentaire*, est comprise dans la série des valeurs que peut présenter

$$B = \Sigma i_\lambda \cos^2 \pi \frac{o - e}{\lambda}.$$

Échelle chromatique de Newton. — Lorsqu'un rayon de lumière blanche tombe presque normalement sur l'une des faces d'une lame mince non cristallisée, il chemine d'abord dans celle-ci, se réfléchit sur la face opposée et ressort au dehors en suivant, mais en sens contraire, un chemin opposé à celui que suit le rayon émergeant. Il a acquis, en traversant la lame, un certain retard d, et la couleur que les phénomènes d'interférence communiquent à la lame est donnée par une expression de la forme

$$\Sigma i_\lambda \sin^2 \pi \frac{d}{\lambda}.$$

C'est ainsi que se colorent les bulles de savon et les anneaux de Newton.

Si, dans la formule qui donne la teinte de la lame cristallisée placée entre le polariseur et l'analyseur croisés, on supposait $o - e$ constant pour toutes les couleurs, comme l'est d dans la formule précédente, les deux formules seraient identiques, et les teintes seraient

les mêmes lorsque l'on aurait $o - e = d$. Il n'en est p
ment ainsi, car on a vu que, pour la lame cristalline,

$$o - e = \varepsilon (n_e - n_a) \sin \theta' \sin \theta'',$$

et toutes les quantités n_e, n_a, θ', θ'' dépendent elles-mêm

Mais, dans la plupart des cristaux, la dispersion des
très considérable ; on peut donc, dans une première
considérer $o - e$ comme une constante et admettre qu
la lame cristallisée, dans laquelle le retard moyen
$o - e$, est identique à celle d'une lame mince isotro
égale à d, lorsque $o - e = d$.

Newton a noté la succession des couleurs que prenn
minces isotropes lorsque d augmente graduellement ;
appelle l'échelle chromatique de Newton. Cette échel
également la succession des teintes que prend une la
entre un polariseur et un analyseur, lorsque $o - e$ var
ment. On trouvera dans le tableau ci-joint cette échell
est donnée par M. Billet, d'après Brücke. Dans ce table
appelées directes sont celles qui sont observées avec u
talline lorsque le polariseur et l'analyseur sont crois
complémentaires sont celles qui s'observent lorsque le
l'analyseur sont parallèles.

On voit qu'il se fait périodiquement des récurrences de
gues. On appelle ordre l'ensemble des teintes qui vont d
une couleur analogue. On a ainsi les teintes du prem
deuxième ordre, etc.

Toute cette échelle de teintes peut être très aisément
se servant d'un parallélépipède de verre que l'on pla
pièces métalliques dont l'une est fixe et l'autre mobile a
vis. En tournant la vis, on fait subir à la lame de verre
sion graduellement croissante. On a soin de placer ent
le métal des bandes de carton ou de caoutchouc de mani
uniformément la pression sur les bases du parallélép
pression développe dans le verre la double réfraction, e
entre deux nicols croisés, il montre, à mesure qu'on
toute la succession des teintes de l'échelle chromatique[1]

[1] Wertheim s'est même servi de ce phénomène pour mesurer la
sur un prisme de verre.

d — s m.	DIFFÉRENCES	TEINTES COMPLÉMENTAIRES.	TEINTES DIRECTES.
		Premier ordre.	
0	»	Blanc.	Noir.
0	40	Blanc.	Gris de fer.
7	37	Blanc jaunâtre.	Gris de lavande.
8	61	Blanc brunâtre.	Gris bleu.
8	60	Jaune brun.	Gris plus clair.
4	16	Brun.	Blanc avec une lég. teint. verte
9	25	Rouge clair.	Blanc presque pur.
7	8	Rouge carmin.	Blanc jaunâtre.
75	8	Rouge brun presque noir.	Jaune paille.
81	6	Violet foncé.	Jaune paille.
06	25	Indigo.	Jaune clair.
32	26	Bleu.	Jaune brillant.
30	98	Bleu verdâtre.	Jaune orangé.
05	75	Vert bleuâtre.	Orangé rougeâtre.
36	31	Vert pâle.	Rouge chaud.
51	15	Vert jaunâtre.	Rouge plus foncé.
		Deuxième ordre.	
65	14	Vert plus clair.	Pourpre.
75	10	Jaune verdâtre.	VIOLET.
89	14	Jaune vif.	Indigo.
64	75	Orangé.	Bleu.
28	64	Orangé brunâtre.	Bleu verdâtre.
47	19	Rouge carmin clair.	Vert.
26	79	Pourpre.	Vert plus clair.
43	17	Pourpre violacé.	Vert jaunâtre.
66	25	Violet.	Jaune verdâtre.
10	44	Indigo	Jaune pur.
948	38	Bleu foncé.	Orangé.
98	50	Bleu verdâtre.	Orangé rouge vif.
01	105	Vert.	Rouge violacé foncé.
		Troisième ordre.	
28	27	Vert jaunâtre.	VIOLET BLEUATRE CLAIR
51	23	Jaune impur.	Indigo.
58	107	Couleur de chair.	Bleu, teinte verdâtre.
54	76	Rouge mordoré.	Vert bleuâtre, vert d'eau.
76	42	Violet.	Vert brillant.
26	50	Bleu violacé grisâtre.	Jaune verdâtre.
95	69	Bleu verdâtre.	Rouge rose.
34	39	Vert bleu.	Rouge carmin.
21	87	Vert clair.	Carmin pourpré.
		Quatrième ordre.	
52	31	Vert jaunâtre.	GRIS VIOLACÉ.
82	30	Jaune verdâtre.	Gris bleu.
11	29	Gris jaune.	Bleu verdâtre clair.
744	33	Mauve.	Vert bleuâtre.
3.1	67	Carmin.	Vert bleu clair.
927	116	Gris rouge.	Gris vert clair.
007	80	Gris bleu.	Gris presque blanc.

A mesure que le retard augmente, la teinte va du viol passant par le vert; on dit alors que la couleur monte dans le cas contraire.

Il faut remarquer qu'on va, en montant, du violet au l cendant on va du violet au rouge, et que, lorsque la violet, de très légères variations d'épaisseur en plus ou changer la couleur d'une manière très sensible. Ces t prennent le nom de *teintes sensibles*. Dans les teintes deux teintes sensibles, l'une du deuxième ordre corres tard 575, l'autre du troisième ordre et plus sensible enc mière, correspondant au retard 1128. Parmi les teint taires, il y a aussi des teintes sensibles dans le premie et le troisième ordre.

Pour montrer quel usage on peut faire de l'échelle de chons quelle épaisseur il faudrait donner à une lame d parallèlement à l'axe pour qu'elle présentât entre le croisés, la teinte du rouge du premier ordre (n° 16 de l avons

$$\frac{o-e}{\varepsilon}=n_c-n_a=\frac{1}{109,9},$$

ce qui veut dire que, à épaisseur égale, une lame de qu qu'un retard égal à $\frac{1}{109,9}$ du retard produit par une faudra donc donner à la lame de quartz une épai $0^{mm},000551\times109,9=0^{mm},605$ pour obtenir la teinte

Plus le retard $o-e$ est grand, plus la teinte est élevée à épaisseur égale. Or, $o-e$ est égal à $\varepsilon(n_c-n_a)\sin\theta'\sin$ maximum pour $\sin\theta'\sin\theta''=1$. Ce qui veut dire que lame est la plus élevée possible lorsque celle-ci est ta ment à l'axe dans les cristaux uniaxes et perpendicula moyen dans les cristaux biaxes. La quantité n_c-n_a mes sorte l'énergie biréfringente du cristal; l'inverse de ce l'épaisseur de la lame, taillée parallèlement au plan des qui est équivalente à une lame d'air d'une épaisseur égal

Dans le tableau suivant, qui comprend un certain no minérales communes rangées suivant l'ordre décroiss biréfringent, la première colonne donne le rapport $\frac{1}{n_c-}$

ique quelle est l'épaisseur en millimètres que doit avoir **illée** parallèlement au plan des axes optiques pour qu'elle **deux** nicols croisés, le rouge du premier ordre. Des épais- **moindres** donneraient le jaune paille ou le blanc.

bstances.	$\frac{1}{n_c - n_a}$	Épaisseur donnant le rouge du prem. ordre.	Noms des substances.	$\frac{1}{n_c - n_a}$	Épaisseur donnant le rouge du prem. ordre.
. . . . .	5.20	0.00293	Andalousite.	90.91	0.050
. . . . .	5 86	0.00323	Topaze.	106.6	0.059
. . . .	19.52	0.0107	Quartz.	109.9	0 0605
. . . .	23.82	0.0131	Gypse	110.6	0.0609
. . . . .	26.21	0.0144	Corindon.	123.1	0.0678
. . . . .	27.96	0.0154	Orthose	143.6	0.0791
. . . . .	33.75	0.0186	Émeraude	166.0	0.0915
. . . .	47.42	0.0261	Néphéline.	201.0	0.1107
e.	57.43	0.0317	Apatite.	225	0.124
. . . . .	65.39	0.0360	Idocrase.	483.4	0.266
. . . . .	86.74	0 0478	Pennine	100.5	0.554
. . . . .	89.60	0.0493			

immédiatement sur ce tableau que, si l'on use un fragment qui contient un grand nombre de minéraux associés, de ma- diminuer graduellement l'épaisseur, les premiers minéraux ont leurs couleurs de polarisation seront la chlorite, puis l'ido patite, l'orthose, le quartz, etc.; la calcite gardera toujours urs vives. On comprend quel rôle important jouent de sem- bservations pour reconnaître, par l'emploi du microscope t, les minéraux qui entrent dans la composition des roches. ur habituelle des plaques qu'on fait tailler pour cet usage est $0^{mm},04$ à $0^{mm},05$; aussi voit-on l'orthose blanc ou de couleur quartz est jaune rougeâtre, le pyroxène a de vives couleurs du ordre; quant à la calcite, les plus minces lamelles ressortent colorées sur le fond plus gris de la roche.

rition des phénomènes de polarisation chromatique dans nes épaisses. — Nous avons vu que pour chaque nature de homogène, les phénomènes redeviennent identiques pour des le l'épaisseur ε marquées par

$$\varepsilon = k \cdot \frac{\lambda}{(n_c - n_a)\sin\theta'\sin\theta''}.$$

Lorsque la lame est épaisse, le facteur $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$, ou $\sin^2 \pi$ passe pour des valeurs très voisines de λ, de 0 à 1, c'est-à-dire du nimum au maximum. On peut en effet poser

$$r\varepsilon = k\lambda.$$

Si ε est grand, λ étant petit, k est grand. Les deux valeurs λ' λ'' de λ qui donnent à $\sin^2 \pi \frac{r\varepsilon}{\lambda}$, l'une la valeur 0, l'autre la valeur sont

$$r\varepsilon = k\lambda'' \qquad r\varepsilon = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda'',$$

ou

$$\lambda' = \frac{r\varepsilon}{k} \qquad \lambda'' = \frac{r\varepsilon}{k + \frac{1}{2}}.$$

La différence $\lambda' - \lambda''$ est donc

$$\lambda' - \lambda' = r\varepsilon\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + \frac{1}{2}}\right),$$

c'est-à-dire une très petite quantité si k est grand. Pour des rayo colorés à peine différents, les facteurs $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$ passeront donc p toutes les valeurs entre le maximum et le minimum. En d'autr termes, pour chaque couleur, le facteur $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$ aura une vale sensiblement constante et égale à $\frac{1}{2}$. On aura :

$$I_o = \cos^2 \omega + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta,$$

$$I_e = \sin^2 \omega - \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\beta ;$$

c'est-à-dire que les deux images ordinaire et extraordinaire seron blanches.

Les lames épaisses ne donnent donc plus de coloration dans l lumière blanche. C'est une raison analogue qui fait disparaître le

nterférence lorsque les retards deviennent trop considé-

ristallines à faces non parallèles. — Au lieu de prendre faces parallèles, on pourrait prendre une lame taillée en supposant que l'angle des deux faces limites soit tellement rayon puisse être considéré comme normal aux deux faces de sortie.

peut être alors assimilée à une série de lames d'épaisseur ent croissantes, et l'on verra une série de franges colorées nt successivement toutes les teintes de l'échelle chromati-ranges seront parallèles à l'arête du biseau.

2. CAS DE PLUSIEURS LAMES CRISTALLINES SUPERPOSÉES.

les générales donnant les intensités des deux rayons à angle droit qui proviennent d'un rayon de lumière e polarisé rectilignement, après la traversée de plusieurs istallines superposées et d'un analyseur. — Supposons sceau de lumière polarisée traverse normalement non plus e lame, mais une série de ristallines superposées; le émergent trouve ensuite un r formé d'un prisme épais , d'où sortent définitive-eux faisceaux sensiblement s et polarisés dans des plans laires. Nous nous propo-udier les particularités que nt ces deux faisceaux, dont ra appelé le faisceau ordi-t l'autre, le faisceau extra-e.

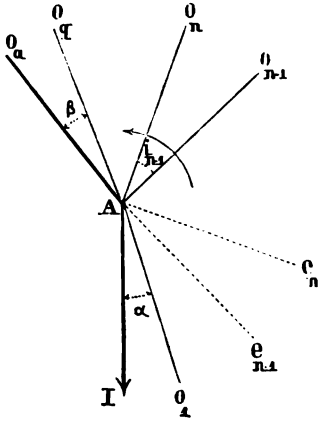


Fig. 48.

osons le faisceau lumineux sor-la $(n-1)^e$ lame cristal-nt les deux sections principales sont dirigées suivant o_{n-1}) et e_{n-1}. On supposera que Ao_{n-1} est la direction de la vibra- rayon pris arbitrairement pour ordinaire, et Ae_{n-1} celle de la on du rayon extraordinaire.

La vibration du rayon ordinaire au sortir de la $(n-1)^e$ lam représentée par une somme de termes de la forme

$$A_o \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_o}{\lambda}\right),$$

celle du rayon extraordinaire par une somme de termes de la fo

$$A_e \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r_e}{\lambda}\right).$$

Appelons ε l'épaisseur de la n^e lame dans laquelle le rayon ord se propage normalement avec une vitesse $u_{n,o}$, le rayon extraord avec une vitesse $u_{n,e}$; appelons o_n et e_n les épaisseurs de deux d'air traversées respectivement par un rayon lumineux dans le temps que l'est la lame par les rayons ordinaire et extraordinair aurons

$$o_n = \varepsilon_n \times \frac{1}{u_{n,o}},$$

$$e_n = \varepsilon_n \cdot \frac{1}{u_{n,e}},$$

Si nous supposons, en outre, que la lumière considérée est gène et caractérisée dans l'air par une longueur d'onde λ, et une d'oscillation T, nous aurons

$$\frac{o_n}{\lambda} = \frac{\tau_{n,o}}{T},$$

$$\frac{e_n}{\lambda} = \frac{\tau_{n,e}}{T},$$

en appelant $\tau_{n,o}$ et $\tau_{n,e}$ les temps respectivement employés par l ordinaire et le rayon extraordinaire à traverser la n^e lame.

Le passage d'une lame à la suivante s'exprimant toujours même façon, on déduit des valeurs précédentes un procédé g pour écrire tous les termes dont la somme représentera la vi de l'un des rayons émergeant du spath analyseur.

On convient d'appeler i_{n-1} l'angle, toujours inférieur à 180° pris entre o_{n-1} et o_n, cet angle étant compté à partir de o_{n-1} et d sens contraire à celui des aiguilles d'une montre. Nous appelons a

tion incidente avec la section ordinaire de la 1′ lame,
la section ordinaire de la q^e et dernière lame avec la
re de l'analyseur; α et β sont encore moindres que 180°
ns le même sens que les i.
ous les termes dont la somme représente la vibration du
re émergeant du spath, on considèrera les $2q$ quantités

$$\frac{o_1}{\lambda}, \frac{o_2}{\lambda}, \ldots \frac{o_q}{\lambda}; \qquad \frac{e_1}{\lambda}, \frac{e_2}{\lambda}, \ldots \frac{e_q}{\lambda};$$

toutes les combinaisons possibles de ces $2q$ quantités q à q,
triction que le p^2 rang d'une des combinaisons ne puisse
ue par o_p ou e_p. Le nombre de ces combinaisons, doublant
fois que le nombre des lames s'augmente de 1, est égal

des termes de chaque combinaison donnera la phase
t à chacun des termes de l'expression cherchée. Nous
symboliquement par $\frac{\omega_i}{\lambda}$ l'une quelconque de ces com-
our avoir le coefficient de chacun des termes, de celui qui
, par exemple, à une phase

$$\frac{o_1 + e_2 + e_3 + \ldots}{\lambda},$$

série des lettres qui représentent la phase, et on écrira :
cosinus toutes les fois qu'on passera d'un o à un o ou d'un

inus toutes les fois qu'on passera d'un o à un e;
sinus toutes les fois qu'on passera d'un e à un o.

iquer cette règle des signes, on supposera écrit devant
mbinaisons un o_p, correspondant au rayon incident qu'on
rbitrairement être un rayon ordinaire.
era aussi chaque combinaison suivie d'un o_a si l'on consi-
n ordinaire de l'analyseur, et d'un e_a si l'on considère le
rdinaire.

Si, par exemple, on a 3 lames superposées, le ter
à la combinaison

$$\frac{o_1+e_2+o_3}{\lambda}$$

en supposant que l'on considère la vibration o_a de l'a

$$-\cos\alpha \sin i_1 \sin i_2 \cos\beta \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{o_1+e_2}{\lambda}\right.$$

La règle est facile à justifier, car pour avoir les a
tives des rayons ordinaire et extraordinaire qui émer
et ont leurs vibrations dirigées suivant Ao_n et Ae_n, il
projeter successivement sur Ao_n et Ae_n les amplitud
dirigées suivant Ao_{n-1} et Ae_{n-1}. On obtiendra donc le
représentent les vibrations de deux rayons émergeant
transformant chacun des termes des expressions qu
vibrations au sortir de la $(n-1)^e$ lame, de la manièr

$$1^o \text{ suivant } Ao_n \ldots \quad A_o \cos i_{n-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_o}{\lambda}\right.$$

$$-A_e \sin i_{n-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_e}{\lambda}\right.$$

$$2^e \text{ suivant } Ae_n \ldots \quad A_o \sin i_{n-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_o}{\lambda}\right.$$

$$+A_e \cos i_{n-1} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{r_e}{\lambda}\right.$$

Il est d'ailleurs évident que si l'on supposait la vi
représentée par 1, et si on négligeait les différences d
sion de la vibration du rayon ordinaire ne serait au
projection de cette vibration sur la direction AO_a, et la s
de l'expression serait la somme des termes du dévelop

$$\cos(\alpha + i_1 + \ldots + i_q + \beta).$$

L'expression de la vibration du rayon ordinaire ém
sera donc composée de 2^q termes de la forme

$$A_i \sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{\omega_i}{\lambda}\right),$$

le les A_i représentent les 2^q termes du développement de

$$\cos(\alpha + i_1 + \ldots + i_q + \beta).$$

rayon extrordinaire, il y aura aussi 2^q termes qui seront ceux pement de

$$\sin(\alpha + i_1 + \ldots + i_q + \beta).$$

des termes de l'expression de la vibration ordinaire étant par

$$A_i \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{\omega_i}{\lambda}\right),$$

ession pourra s'écrire

$$\left(A_1 \cos\frac{\omega_1}{\lambda} + A_2 \cos\frac{\omega_2}{\lambda} + \ldots\right) \sin 2\pi\frac{t}{T}$$
$$-\left(A_1 \sin\frac{\omega_1}{\lambda} + A_2 \sin\frac{\omega_2}{\lambda} + \ldots\right) \cos 2\pi\frac{t}{T},$$

sité du mouvement vibratoire sera :

$$\left(A_1 \cos\frac{\omega_1}{\lambda} + A_2 \cos\frac{\omega_2}{\lambda} + \ldots\right)^2 + \left(A_0 \sin\frac{\omega_0}{\lambda} + A_2 \sin\frac{\omega_2}{\lambda} + \ldots\right)^2$$

$$= \Sigma A_i^2 + 2\Sigma A_1 A_2 \cos\frac{\omega_2 - \omega_2}{\lambda} = (\Sigma A_i)^2 - 4\Sigma A_1 A_2 \sin^2\frac{\omega_1 \quad \omega_2}{2\lambda},$$

se rappelle que

$$\Sigma A_i = \cos(\alpha + i_3 + \ldots i_q + \beta) = \cos\Omega,$$

lant Ω l'angle de la vibration incidente avec la vibration émer-
et en supposant que l'intensité de la vibration incidente est re-
ée par 1, on pourra écrire

$$J_0 = \cos^2\Omega - 4\Sigma A_1 A_2 \sin^2\frac{\omega_1 - \omega_2}{2\lambda}.$$

ond terme du deuxième membre représente symboliquement une

somme de termes formés en combinant deux à deux tous les ter
l'expression

$$A_1 \cos \frac{\omega_1}{\lambda} + A_2 \cos \frac{\omega_2}{\lambda} + \text{etc.}$$

On trouverait de même pour l'intensité I_e du rayon extraordinair

$$I_e = \sin^2 \Omega - 4\Sigma B_1 B_2 \sin^2 \frac{\omega'_1 - \omega'_2}{2\lambda}.$$

On pourrait vérifier que $I_o + I_e$ est égal à 1, ce qui exige

$$\Sigma A_1 A_2 \sin^2 \frac{\omega_1 - \omega_2}{2\lambda} + \Sigma B_1 B_2 \sin^2 \frac{\omega'_1 - \omega'_2}{2\lambda} = 0.$$

C'est ce résultat qu'on exprime en disant que l'intensité du ordinaire est toujours complémentaire de celle du rayon e dinaire.

Une conséquence importante qu'on peut déduire de ces for c'est que, lorsqu'on a un paquet de lames quelconques entre un riseur et un analyseur, l'intensité de la vibration émergente même, soit que la lumière entre par le polariseur et sorte par l' seur, soit qu'elle entre par l'analyseur en sortant par le polaris est facile de voir, en effet, que cette interversion n'introduit changement dans l'expression de I.

Cas de deux lames superposées. — Dans le cas de deux superposées, la formule générale donne

$$\begin{aligned} I_0 = \cos^2 \omega &+ \sin 2\alpha \sin 2i_1 \cos 2\beta \sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1}{\lambda} \\ &+ \cos 2\alpha \sin 2i_1 \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o_2 - e_2}{\lambda} \\ &+ \sin 2\alpha \cos^2 i_1 \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1 + o_2 - e_2}{\lambda} \\ &+ \sin 2\alpha \sin^2 i_1 \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1 - (o_2 - e_2)}{\lambda} \end{aligned}$$

Si les sections principales des deux lames sont parallèles, $i_1 =$ la formule devient

$$I_0 = \cos^2 \omega + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1 + o_2 - e_2}{\lambda}.$$

Elle montre que l'ordre de superposition des lames n'influe pas sur la teinte résultante. Elle est d'ailleurs identique à celle que donnerait une lame unique communiquant au rayon le retard $o_1 - e_1 + o_2 - e_2$; on en conclut que l'ensemble des deux lames se comporte comme une lame unique. Cette lame unique fictive a une épaisseur supérieure à la première si $o_2 - e_2$ est de même signe que $o_1 - e_1$; elle a une épaisseur inférieure dans le cas contraire.

Cas où l'une des deux lames est un mica quart d'onde. — Un autre cas particulier intéressant est celui où l'une des deux lames, la première par exemple, a une épaisseur telle que $\frac{o_1 - e_1}{\lambda} = \frac{1}{4}$, alors

$$\sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1}{\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$\sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1 + o_2 - e_2}{\lambda} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \pi \frac{o_2 - e_2}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin 2\pi \frac{o_2 - e_2}{\lambda}\right)$$

$$\sin^2 \pi \frac{o_1 - e_1 + (o_2 - e_2)}{\lambda} = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \pi \frac{o_2 - e_2}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \sin 2\pi \frac{o_2 - e_2}{\lambda}\right)$$

Si l'on suppose en outre $\alpha = 45°$, ce qui donne $\beta + i_1 = 45°$, on trouve toutes réductions faites :

$$I_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\beta \sin 2\pi \frac{o - e}{\lambda}.$$

L'intensité est indépendante de la position relative du polariseur et de la lame cristalline ; elle varie au contraire avec la position de l'analyseur par rapport à cette lame.

Lames sensibles.— On peut se servir de la superposition de deux lames cristallines pour déceler, dans l'une des lames, les propriétés biréfringentes les plus faibles. On prend alors pour l'autre lame l'épaisseur qui donne la teinte sensible. Suivant que les sections principales des deux lames sont parallèles ou perpendiculaires, le retard de la 1re lame soumise à l'essai s'ajoute ou se retranche au retard donné par la lame sensible. Dans l'un et l'autre cas, la modification ainsi apportée à la teinte sensible par la lame faiblement biréfringente est assez notable pour ne pas échapper à l'œil. L'expérience se fait aisément en fixant la lame sensible au-dessus du nicol polariseur, de manière que sa

section principale soit à 45° de celle du nicol. La lame que l'on soumettre à l'essai est placée sur le support ordinaire du micros

On peut se servir d'une lame sensible pour déterminer exacta dans une lame cristalline les directions des sections principales. Su sons la lame sensible placée de manière que ses sections princi soient à 45° des sections principales, croisées à angle droit, du p seur et de l'analyseur. On place la lame cristalline sur le porte-obje teinte est modifiée, et cette modification ne cessera que lorsqu'en fa tourner la lame on amène une de ses sections principales à être par à l'une des sections principales d'un des nicols. Le moindre déplace du cristal de part et d'autre de cette position particulière suffira produire des modifications perceptibles dans la teinte, et les direc des sections principales se trouveront ainsi mieux accusées que qu'on se contente de les déterminer par le rétablissement de l'obsc entre les deux nicols croisés.

On peut d'ailleurs rendre l'observation encore plus exacte, en di sant la lame sensible de la manière suivante. On la taille sous la fo d'un triangle rectangle isocèle dont l'hypoténuse est perpendicu à la section principale; on la partage alors en deux suivant la teur (fig. 49), et on juxtapose les deux triangles rectangles tenus suivant l'hypoténuse, de manière que les sections principales

Fig. 49.

Fig. 50.

deux moitiés de la lame carrée obtenue soient à angle droit (fig. On colle les lames, dans cette position sur une plaque de verre avec baume de Canada. Lorsque la lame ainsi disposée est placée au-des du polariseur, dans une position telle que la section principale d' des lames soit à 45° de celle du polariseur, les deux moitiés de la bil sont teintes de la même couleur, et le plus petit mouvement de bilame suffit pour teindre les deux moitiés de deux couleurs comp mentaires d'autant plus facilement observables qu'elles se font contra l'une à l'autre. La lame cristalline étant placée sur le porte-objet,

e que sa projection soit à cheval sur les deux portions de la
sible, on voit immédiatement les deux parties l et l' de la lame
ée (fig. 51) se teindre de couleurs différentes
lémentaires qui ne deviennent identiques que
n tournant la lame dans son plan, on en a amené
on principale à être rigoureusement parallèle
endiculaire à celle du polariseur ou de l'ana-
La précision de l'observation est augmentée par
ste que se font perpétuellement les deux parties l et l'.

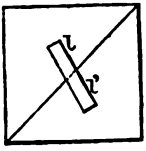


Fig. 51.

tit appareil que nous venons de décrire porte le nom de polari-
e Bravais.

le polariscope de Bravais, ou, plus généralement, en superpo-
e lame cristalline connue à une autre lame dont la double ré-
est inconnue, on peut déterminer quelles sont, des deux sec-
incipales de cette dernière, celle qui correspond au plus grand
lus petit n. C'est ce que l'on appelle déterminer le signe de la

osons, par exemple, que la lame connue soit une lame de quartz
parallèlement à l'axe et d'épaisseur ε_q. Le quartz étant positif,
ction de l'axe est celle qui correspond au plus grand n, n_c. On
la teinte de la lame de quartz; on suppose une lame cristalline,
seur ε, placée de telle sorte que la section principale correspon-
l'indice n_o soit parallèle à l'axe du quartz. L'épaisseur optique de
ble des deux lames est

$$\varepsilon_q (n_c - n_a) + \varepsilon (n_o - n_e).$$

$- n_e$ est positif, la teinte monte; si $n_o - n_e$ est négatif, la teinte
d.

ettons que la lame de quartz donne le second violet correspon-
une épaisseur de lame d'air égale à 1128 millionièmes de mil-
. L'addition de la lame cristalline donne l'orangé 948; on en
ra que n_o dirigé suivant l'axe du quarz est plus petit que n_e, et

$$\varepsilon (n_o - n_e) = 1128 - 948 = 180,$$

lionièmes de millimètre. Comme vérification, il faut qu'en tour-
lame cristalline de 90°, on obtienne la teinte correspondant à
seur $1128 + 180 = 1300$, c'est-à-dire une teinte intermédiaire
e vert et le bleu.

Au lieu d'observer la modification produite par la lame cristalli dans la teinte du quartz, on peut observer celle que la lame de qua introduit dans la teinte de la lame cristalline. Il faut d'ailleurs, p qu'il n'y ait pas d'ambiguïté, que la lame qui modifie la teinte obs vée en premier lieu soit de faible épaisseur. S'il en était autrement teinte pourrait passer d'un ordre à un autre, et l'on pourrait éprou beaucoup d'embarras à savoir si elle a monté ou est descendue pourrait même arriver que la teinte monte réellement, bien que les d retards soient de signe contraire. Si la lame cristalline est de fa épaisseur, on prendra donc une lame de quartz donnant la teinte s sible. Si la lame cristalline est épaisse, on emploiera une lame quartz ou une lame de mica mince, correspondant, par exemple, à retard d'un quart d'onde.

On peut, pour rendre l'opération plus délicate, prendre, au l d'une lame plane de quartz, une lame taillée en biseau, l'arête du seau étant parallèle à l'axe, par exemple. On glisse lentement la la au-dessus ou au-dessous de la lame cristalline, en ayant soin, b entendu, que l'arête du biseau soit parallèle à l'une des sections pr cipales de la lame. En voyant défiler la série des teintes, depuis ce qui est très voisine de celle que la lame présente lorsqu'elle seule, on ne peut avoir aucune incertitude sur le sens dans leq marche la teinte résultante.

Compensateur Babinet. — Le compensateur Babinet, fondé t jours sur le même principe que les appareils précédents, est disp pour servir à des mesures exactes de $n_o - n_e$. Il est formé de de lames de quartz parallèles à l'axe et taillées en biseau très aigu. L'an du biseau est le même pour les deux lames, de sorte qu'en les sup posant, on obtient une lame à faces parallèles partagée en deux p un plan incliné $\beta\beta'$ (fig. 52). Dans l'un des biseaux l'arête est parall à l'axe; dans l'autre elle lui est perpendiculaire.

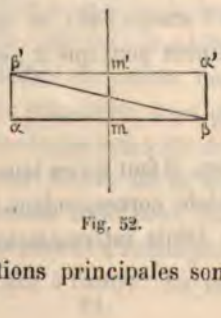


Fig. 52.

Si nous considérons le plan médian mm' la lame, mené à égale distance des arêtes deux biseaux, un rayon traversant normalem la lame dans ce plan, traverse sur une égale l gueur les deux prismes triangulaires, et ce ra se trouve dans les mêmes conditions que traversait deux lames parallèles de la mê substance, ayant même épaisseur et dont les s tions principales sont croisées à angle droit. La polarisation du ra

s modifiée, et si la lame est placée entre deux nicols croisés t la lumière, on aura suivant le plan mm' une raie noire. Mais et d'autre de mm', il est clair que les choses se passeront comme paisseurs de la lame allaient en augmentant graduellement, ura, dans la lumière homogène, une série de franges alternati- blanches et noires; dans la lumière blanche, une série de colorées parallèles à l'arête du biseau.

des prismes $\alpha\beta$ étant fixé invariablement, on peut faire glisser sur celui-ci d'une manière continue au moyen d'une vis micro- e dont la tête graduée permet de mesurer de très petits dépla- s. On commence par placer le compensateur entre deux nicols es et de manière que la section principale en soit parallèle à es nicols. Si l'appareil est au zéro, c'est-à-dire s'il est dans la de la figure, on voit, dans la lumière homogène, une frange oïncider avec le plan médian mm' de l'appareil; le fil d'un ré- ndique la position de cette frange. On déplace ensuite le prisme $\alpha'\beta'$ d'une quantité telle que la frange noire suivante, qui cor- d à un retard égal à λ, vienne se placer sur le fil, et soit d le qu'il aura fallu faire parcourir au prisme pour obtenir ce ré- on en conclut que lorsqu'on déplacera le prisme de l, le retard compensateur communiquera aux rayons sera égal à $l\frac{\lambda}{d}$.

oareil ainsi gradué devient un mesureur de retards. Supposons que, le compensateur étant au zéro, on place au-dessous du asateur une lame cristalline communiquant aux rayons un retard δ. Pour ramener la frange noire au centre, et compenser ainsi le δ, il faudra donner au prisme un déplacement l, et l'on aura

$$l\frac{\lambda}{d} = \delta.$$

§ 5. LUMIÈRE OBLIQUE.

mule générale donnant le retard de deux rayons émergents d'un même rayon incident. — Nous considérons une lame ine à faces parallèles traversée par un faisceau oblique de e, que nous supposerons d'abord homogène.

de plane incidente qui se propageait dans l'air suivant la direction . 53) du faisceau incident, donne naissance dans la lame à deux

ondes planes vibrant à angle droit, l'une dirigée suivant Ar', l'
vant Ar''; Ar', Ar'', AI et la normale AN sont dans le même plan
plan d'incidence. A la sortie de la lame, les deux ondes plane
les deux directions $r'R'$ et $r''R''$ parallèles entre elles et à la
incidente AI; si la lame est peu épaisse, $r'R'$ et $r''R''$ se co
sensiblement. Cherchons quel est le retard relatif des deux o
minant, l'une suivant $r'R'$, l'autre suivant $r''R''$.

Prolongeons, jusqu'à la rencontre avec la face d'émergence
normale AN. Menons $P\rho'$ et $P\rho''$ perpendiculaires respective
Ar' et Ar''. D'après le mode de construction qui permet de t
rayon réfracté, connaissant le rayon incident, il est visible que l'
normale à $R'r'$, si elle était considérée comme incidente, se p
dans le cristal en deux autres, l'une dirigée suivant $P\rho'$, et l'
vant $P\rho''$. $P\rho'$ et $P\rho''$ indiqueraient d'ailleurs la position simul
deux ondes à un certain instant. On en conclura que l'un d
met à aller de ρ' en r' le même temps que le second à par
ligne brisée $\rho''r''m$. Le retard relatif contracté par les deu
est donc marqué par la différence des temps qu'ils ont mis à p
l'un, la distance $A\rho'$, et l'autre, la distance $A\rho''$.

Si l'on appelle encore o l'épaisseur d'une lame d'air travers
rayon de longueur d'onde λ dans le même temps que le
(que nous appellerons l'ordinaire) met à faire le chemin
l'épaisseur d'une lame d'air traversée par un rayon dans
temps que le rayon extraordinaire Ar'' met à parcourir A
aurons

$$o = \frac{A\rho'}{u'} = \varepsilon \frac{\cos R'}{u'}, \qquad e = \frac{A\rho''}{u'} = \varepsilon \frac{\cos R''}{u''};$$

u' et u'' étant les vitesses des deux rayons, R' et R'' les an
vitesses normales de chacun de ces rayons avec la normale à
et ε l'épaisseur de la lame.

On aura donc

$$o - e = \varepsilon \left(\frac{\cos R'}{u'} - \frac{\cos R''}{u''}\right).$$

On a d'ailleurs

$$\sin R' = u' \sin I \qquad \sin R'' = u'' \sin I$$

l'angle d'incidence, et par conséquent :

$$o - e = \varepsilon \sin I (\operatorname{cotg} R' - \operatorname{cotg} R'') = \varepsilon \sin I \frac{\sin (R' - R'')}{\sin R' \sin R''}.$$

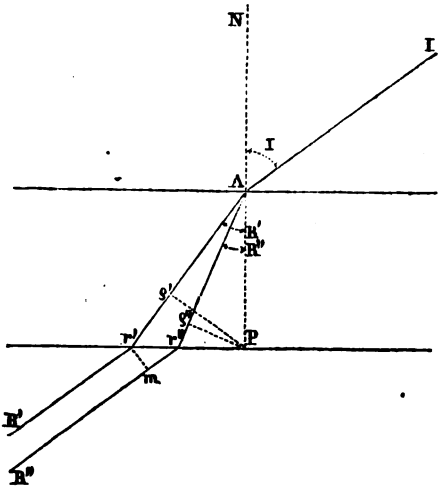


Fig. 53.

nous employons le système d'approximation fondé sur la faible ingenee des cristaux, nous pourrons assimiler $\sin (R' - R'')$ à l'arc, e formule de la page 126, dans laquelle nous ferons $l = 1$, nous era

$$R' - R'' = (\delta' - \delta'') \frac{\sin I}{\cos R} = (a - c) \sin \theta' \sin \theta'' . \frac{\sin I}{\cos R},$$

nt l'angle que ferait avec la normale le rayon réfracté si le milieu llin était isotrope et propageait la lumière avec la vitesse b. illeurs on aura sensiblement

$$\frac{\sin^2 I}{\sin R' \sin R''} = \frac{1}{b^2},$$

ient, en définitive,

$$o - e = \frac{\varepsilon}{b^2 \cos R} (a - c) \sin \theta' \sin \theta'',$$

core

$$o - e = \frac{\varepsilon}{\cos R} (n_c - n_a) \sin \theta' \sin \theta''.$$

Formules générales qui donnent les intensités des rayons émergeant de l'analyseur lorsque la lame cristalline est oblique à la direction des rayons. — Supposons une lame cristalline pla obliquement entre le polariseur et l'analyseur. Soit OI (fig. 54) la di tion du rayon incident, ON la normale à la surface de la lame, O OA′ les directions des axes optiques du cristal.

Supposons donné l'angle AA′ des axes optiques, et les valeurs an laires qui déterminent la position de ON par rapport à OA et à OA′.

On déduit aisément de ces données :

1° L'angle que fait avec OI la direction OR de la vitesse du ra réfracté moyen. (Nous entendons par cette expression le rayon réfra qui se produirait si la lame était monoréfringente, et si la vitesse la lumière y était égale à b.)

2° Les angles θ', θ'' que fait OR avec les axes OA et OA′.

Si l'on mène un grand cercle $\alpha r \alpha'$ perpendiculaire à OR ; si l'on p jette sur ce grand cercle, aux points α et α' les pôles A et A′ de de axes optiques ; si enfin l'on prend le milieu r de l'arc $\alpha\alpha'$, Or e d'après un théorème connu (page 116), la direction de la vibration d' des deux rayons réfractés dont les ondes planes se transmettaient norm lement à OR. Il sera facile de déduire des données la valeur de l'an que fait ORr avec le plan d'incidence.

Le rayon incident étant supposé polarisé rectilignement, et sa vib tion étant dirigée suivant Oi, cette vibration incidente devra se déco poser en deux autres, l'une sensiblement dirigée suivant Or, et l'au suivant une droite perpendiculaire à Or. Si l'on suppose que le ray incident et le rayon réfracté ne font p un angle trop considérable, l'an de Oi avec Or ne sera pas très différ de l'angle de Oi avec la projection de Or sur un plan perpendiculaire à

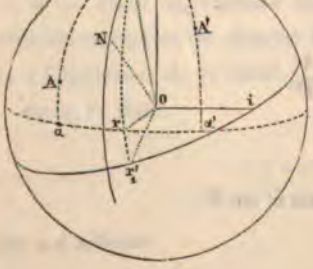


Fig. 54.

Pour suivre la marche du phén mène correspond à des incidences p considérables, il suffira donc de pre dre les formules relatives au cas l'incidence normale et d'y remplacer angles α et β par ceux que fait le pl OIr avec le plan de polarisation polariseur et la section principale de l'analyseur.

dra ainsi

$$I_0 = \cos^2\omega + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}.$$

tituerait à $o-e$ la valeur trouvée plus haut en fonction de θ''.

eut se proposer de trouver les teintes diverses qui corres- aux diverses inclinaisons de lames diversement taillées. Ces ne dépendent que de $o-e$, dont nous allons discuter la qui a pour expression

$$o-e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R} \sin\theta' \sin\theta''.$$

s allons considérer successivement le cas d'un cristal à un axe, i d'un cristal à deux axes.

CRISTAUX A UN AXE.

ormule dans laquelle o se rapportera au rayon ordinaire dont le n'est plus arbitraire est

$$o-e = \pm \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R} \sin^2\theta.$$

ut prendre le signe — lorsque le cristal est positif, et le signe squ'il est négatif; mais on peut ici faire abstraction de ce signe, orsqu'il n'y a qu'une seule lame, le retard n'entre dans les for- qui donnent la teinte que par sa valeur absolue.

AME TAILLÉE PERPENDICULAIREMENT A L'AXE.

ormule est

$$o-e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R},$$

férence de marche augmente toujours avec R, c'est-à-dire

lame est placée entre deux nicols croisés et si $I = 0$, elle donne rité. Si on l'incline, les teintes successives de la lame parcourent grés des teintes directes de l'échelle de Newton.

II. Lame parallèle a l'axe.

1° *Plan d'incidence contenant l'axe.*

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_e - n_a)}{\cos R} \cos^2 R = \varepsilon(n_e - n_a) \cos R.$$

La différence de marche *décroît* en valeur absolue lorsque R *augmente;* on voit donc descendre la teinte à mesure qu'on incline la lame.

2° *Plan d'incidence perpendiculaire à l'axe.*

Fig. 55.

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_e - n_a)}{\cos R}.$$

L'augmentation d'inclinaison de la la fait monter la teinte, au lieu de la fa descendre.

3° *Plan d'incidence quelconque.*

La position du plan d'incidence est finie par l'angle ω qu'il fait avec le p qui contient l'axe OA et la normale ON. a alors, dans le triangle rectilatère A (fig. 55),

$$\cos \theta = - \sin R \cos \omega,$$

d'où l'on déduit :

$$o - e = \varepsilon(n_e - n_a) \frac{1 - \sin^2 R \cos^2 \omega}{\cos R}.$$

L'accroissement d'inclinaison fait tantôt monter, tantôt descendre teinte. Si l'on suppose R, ou ce qui est la même chose, I très petit, pourra remplacer cos R par $1 - \frac{1}{2} \sin^2 R$, et l'expression approchée $o - e$ est

$$o - e = \varepsilon(n_e - n_a)(2 - \sin^2 R \cos 2\omega).$$

L'augmentation d'inclinaison de la lame fait donc baisser la tei lorsque $\omega < 45°$, c'est-à-dire lorsque le plan d'incidence se rapproc de celui qui comprend l'axe. La teinte monte dans le cas contrai Lorsque $\omega = 45°$, de légers changements dans l'inclinaison ne font p varier la teinte d'une manière sensible.

:S TAILLÉES D'UNE FAÇON QUELCONQUE.

ıant toujours ω l'angle du plan AN avec le plan d'incidence,
ıt par ν l'angle AN que fait la normale avec l'axe, on a :

$$- e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}\left\{1 - (\cos\nu\cos R - \sin\nu\sin R\cos\omega)^2\right\},$$

ont la discussion présenterait peu d'intérêt.

CRISTAUX A DEUX AXES.

PERPENDICULAIRE A L'AXE MINIMUM OU MAXIMUM.

d'incidence quelconque.

étant l'angle d'un axe optique avec l'axe d'élasticité maxi-
. 56),

$= \cos V\cos R + \sin V\sin R\cos\omega,$
$= \cos V\cos R - \sin V\sin R\cos\omega.$

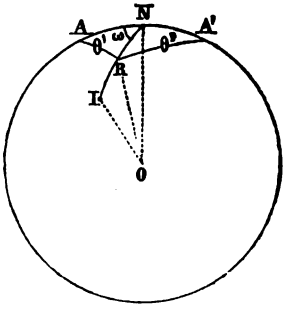


Fig. 56.

rmules s'appliqueront au cas
perpendiculaire à la lame est
ximum lorsque, le cristal étant
ıy fera $V < 45°$, et inversement.
déduirait, par un calcul un
ıpliqué, l'expression de $o - e$;
ıs contenterons d'appliquer aux
culiers pour lesquels $\omega = 0$ et $\omega = 90°$.

n d'incidence coïncidant avec le plan des axes ou $\omega = 0$

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}\sin(V - R)\sin(V + R),$$

on peut encore écrire

$$\frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}(\cos 2R - \cos 2V) = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{2}\left[2\cos R - \frac{1 + \cos 2V}{\cos R}\right]$$

ı part de $R = 0$, l'expression décroît en valeur absolue et la
isse, jusqu'à ce que l'on ait $\cos 2R = \cos 2V$ ou $R = V$. Pour
eur qui correspond à une direction des rayons coïncidant avec
n axe optique, la teinte est le noir. Lorsque $R > V$, la teinte

3° *Plan d'incidence perpendiculaire au plan des axes, ou* $\omega = 90$

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}(1 \quad \cos^2 V \cos^2 R).$$

Cette expression croît toujours en valeur absolue, et la teinte n toujours, par conséquent, lorsque R croît, c'est-à-dire lorsqu'on i la lame de plus en plus.

II. Lame perpendiculaire a l'axe de moyenne élasticité.

Nous supposons que le plan d'incidence est un plan principal ; (fig. 57) :

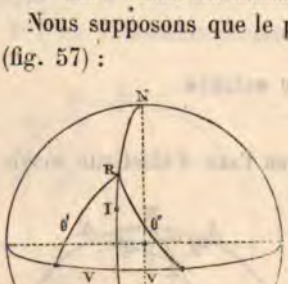


Fig. 57.

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}(1 - \cos^2 V \sin^2$$

formule dans laquelle V est < ou > suivant que le plan d'incidence co le plus petit ou le plus grand de d'élasticité.

Si l'on s'en tient aux petites valeu R, l'expression de $o - e$ peut être mi posant $\frac{1}{\cos R} = 1 + \frac{1}{2}\sin^2 R$, sou forme

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{2}(2 - \sin^2 R \cos 2V).$$

On voit que si $V < 45°$, la teinte descend lorsque R augme c'est ce qui a lieu lorsque le plan d'incidence passe par la bissec aiguë des axes optiques. La teinte monte, au contraire, à me que R augmente, lorsque le plan d'incidence passe par la bissec obtuse.

POLARISATION CHROMATIQUE.

CHAPITRE VI

LUMIERE CONVERGENTE

e chapitre précédent, on a étudié les phénomènes chromatiques tre une lame cristalline, placée entre un polariseur et un ana- orsqu'elle est traversée par un faisceau lumineux que l'on poser émané de l'infini et dont tous les rayons sont parallèles r. Nous allons, dans ce qui suit, supposer le faisceau lumi- anant d'un point voisin de la lame, de sorte que tous les rayons ts qui le composent traversent la lame sous des inclinaisons es. Chaque rayon, sortant de la lame, après avoir traversé le r et l'analyseur, prend une couleur spéciale, et l'ensemble des nergents forme dans l'espace une série de cônes colorés. Avant re les phénomènes très curieux qui se produisent dans ces ns, nous dirons quelques mots des appareils qui servent à les .

eils d'observation. — Microscope à lumière convergente. s complet de ces appareils est celui que l'on désigne sous le microscope à lumière convergente.

ière polarisée est fournie soit par l'interposition d'un nicol sur n des rayons provenant des nuées, soit par la réflexion de ces ur une pile de glaces. Elle est reçue par un jeu de lentilles à t foyer Cd (fig. 58), que l'on appelle condenseur ou *éclaireur*. le centre optique de la lentille et α l'angle formé par les égèrement divergents qui tombent sur l'appareil, ceux-ci vien-

nent former leur image dans l'intérieur du petit cerc
un centre lumineux. A une petite distance au-dessus
lame cristalline L, et au-dessus de L un autre jeu d
ment à court f
pelle le *collect*
rassemble les
en divergeant
le plan focal *p'*
ondispose u n
pour les mesu

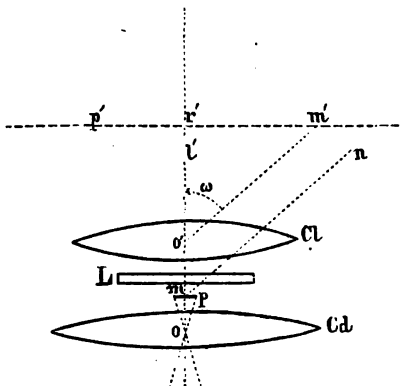


Fig. 58.

Soit un rayo
l'intérieur du
versant la lam
sa sortie de
un analyseur,
façon spéciale
parallèles à *m*
la même façon
verger en un
que l'on const

Le point *m'* se teint de la couleur acquise par les
à la direction *mn* ; il se dessine donc sur le plan du rét
courbes colorées, dont nous nous proposons l'étude,
dit pour l'observation en les regardant avec une loupe

Au lieu de placer l'analyseur immédiatement au-d
il est plus commode de le placer immédiatement au-
sous de la loupe qui sert d'oculaire Cet analyseur pe
ou un spath; une tourmaline a l'inconvénient d'ajoute
pre à celle des courbes que l'on veut observer.

Il importe beaucoup que l'on puisse observer des ir
des rayons faisant un très grand angle avec l'axe
d'autres termes, il faut que le champ de l'appareil soit
possible. Ce champ est déterminé par le double de l'a
que les rayons émergeant de l'éclaireur font avec l'ax
si l'on ne considère que des rayons parallèles à l'axe, e
la distance focale de l'éclaireur, ρ son demi-diamètre

est $arc\ tg \frac{\rho}{f}$. Si, en outre, α est l'angle que les rayon

axe ; le demi-champ est en définitive

$$\alpha + \text{arc tg} \cdot \frac{\rho}{f}.$$

d'une seule lentille, on emploie toujours un jeu de lentilles;

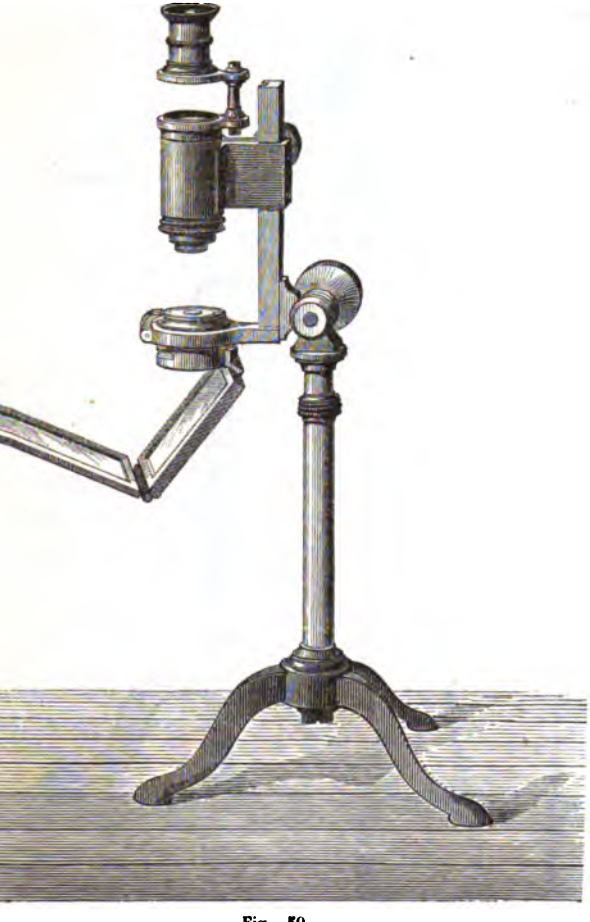


Fig. 59.

est alors la somme du champ de chaque lentille, et on a

$$A = \alpha + \text{arc tg}\,\frac{\rho}{f} + \text{arc tg}\,\frac{\rho}{f'} + \text{arc tg}\,\frac{\rho''}{f''}, \text{ etc.}$$

s appareils ordinaires, le champ est d'environ 120 à 130°.
e cristalline doit être rapprochée autant que possible du plan
nent converger les rayons. Il arrive le plus souvent que ce

plan *p* coïncide avec la surface supérieure, que l'o
l'éclaireur, et la lame est posée sur cette surface mên

Le collecteur est composé d'un jeu de lentilles iden
l'éclaireur, et dont le champ doit être le même.

La figure 59 montre la disposition générale donnée

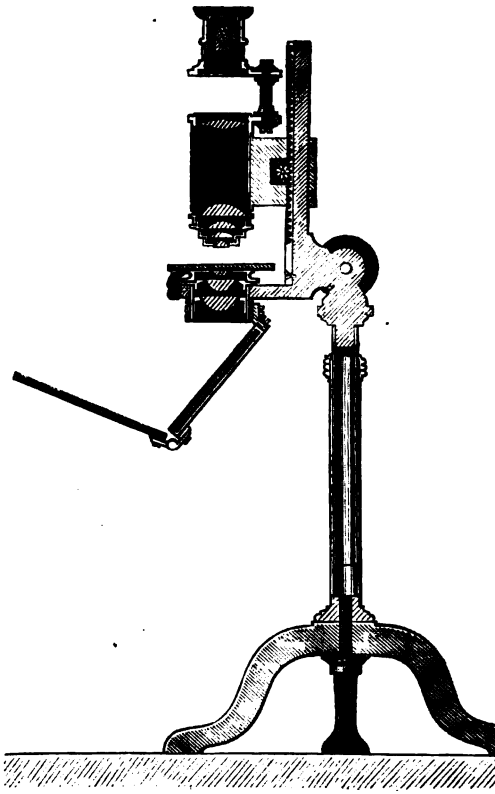


Fig. 60.

M. Émile Bertrand. Le polariseur figuré est une pile d
aisément la remplacer par un nicol sur lequel un
lumière des nuées. L'éclaireur est fixé dans une montu
dans son support lié au bâti de l'appareil, en entraîna
vement de rotation la lame cristalline qu'il supporte
l'oculaire et l'analyseur sont enfermés dans un tube qui
crémaillère, peut s'élever ou s'abaisser le long d'une ti
ouvert est ménagé entre l'oculaire et l'analyseur p

interposer sur le passage des rayons, avant la traversée de l'analyseur, des lames cristallines convenablement choisies et dont l'utilité sera expliquée plus tard. L'appareil tout entier est mobile autour d'un axe horizontal porté par un trépied, et son axe peut prendre ainsi la position verticale représentée par la figure, la position horizontale et toutes les positions intermédiaires.

La figure 60, sur laquelle on a représenté la lame cristalline portée par l'éclaireur, est une coupe de l'appareil qui montre clairement l'agencement de différentes pièces.

Pince à tourmalines. — Un appareil beaucoup plus simple est celui que l'on désigne sous le nom de pince à tourmalines. Il est composé de deux plaques de tourmaline T, T', taillées parallèlement à l'axe et entre lesquelles on place la lame cristalline L. On place l'œil très près d'une des plaques de tourmaline. L'œil reçoit des rayons traversant l'appareil sous des inclinaisons très variées; tous les rayons parallèles viennent former, après avoir traversé le cristallin, une image colorée sur la rétine.

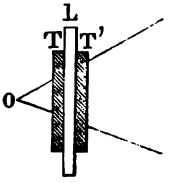


Fig. 61.

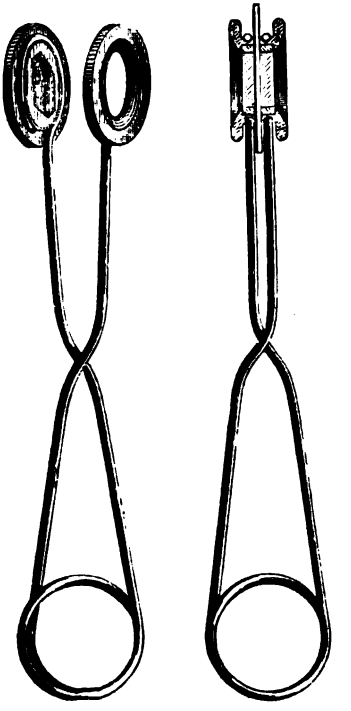


Fig. 62.

Les deux lames de tourmaline sont ici le polariseur et l'analyseur; le champ est celui de l'œil lui-même. Le cristallin fait l'office du collecteur, et la rétine remplace le plan du réticule.

Cet appareil à l'inconvénient d'avoir un champ trop faible; on peut l'augmenter en plaçant une lentille entre l'œil et la lame.

Les deux plaques de tourmaline sont fixées dans de petits cercles dans lesquels ils peuvent tourner, et qui sont portés par les extrémités des bras d'une pince (fig. 62). La lame cristalline est ainsi pressée par les deux tourmalines et reste fixe pendant l'observation.

LUMIÈRE MONOCHROMATIQUE

I. — COURBES INCOLORES.

Nous allons étudier les phénomènes que l'on peut o
çant une lame cristalline L sur le porte-objet du micro
convergente; cette étude s'appliquera sans peine à ceu
tout autre appareil analogue, tel que la pince à tourma

Nous supposerons d'abord la lame éclairée par de la
chromatique, telle que celle que l'on peut obtenir a
à alcool salé ou par tout autre moyen. Un pinceau lumi
égale à 1, formé par toutes les directions de propag
à une droite quelconque *mn* (fig. 55), part de *mp*, tra
le collecteur pour venir converger au point *m'*. Le
regardé à travers un analyseur, le point *m'* donn
l'ordinaire et l'extraordinaire, que l'on peut regarder
La formule qui donnerait l'intensité lumineuse de chacu
serait fort complexe et fort difficile à obtenir, car il faud
des modifications que font éprouver à la direction des
fractions successives à travers l'éclaireur et le collecteu
cette formule complète est tout à fait inutile, et l'o
d'avoir une idée sur la loi de variation de cette
varie le point *m'*, c'est-à-dire l'orientation de l'axe d
neux considéré. Pour y parvenir, nous commencerons
très particulier où tous les axes des faisceaux lumine
font qu'un petit angle avec la normale à la lame; n
ensuite dans quel sens il faut modifier les résultats
adapter au cas général.

Définition des courbes incolores. — Lorsqu'on adm
tions de propagation lumineuse font un petit angle ave
changements apportés par la réfraction à la direction
peuvent être regardés comme négligeables. En outre,
tions font un petit angle avec le plan de la lame et peu
posées parallèles. Ces restrictions admises, nous sup

incidentes sont rectilignes et parallèles. Un faisceau quel-
ont la direction de propagation est parallèle à *mn*, ayant une
supposée égale à 1 à l'incidence, donne à la sortie de l'ana-
e image ordinaire dont l'intensité est

$$I_0 = \cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}.$$

rmule donne aussi l'intensité lumineuse de l'une des images
n' (où viennent converger les directions parallèles à *mn*), vu à
analyseur.

tte formule, α est l'angle aigu formé par la vibration incidente
e des sections principales de la lame qui correspondent à la di-
e propagation *mn*; β est l'angle aigu, compté dans le même
α, de cette section principale avec l'une des sections princi-
l'analyseur, et c'est la vibration transmise dans cette section
le que l'on appelle *ordinaire*, pour la commodité du langage.
gles α et β sont indépendants, si l'on néglige la dispersion des
la longueur d'onde λ; il en résulte que lorsque $\sin 2\alpha \sin 2\beta = 0$,
té I_0 est la même, quelle que soit la lumière monochromatique
ée. Le lieu des points *m'* (fig. 55) satisfaisant à cette condition
onc, dans le plan du réticule, une courbe qui jouit de propriétés
ères. Gardant la même intensité pour toutes les couleurs, elle
ore pas dans la lumière blanche, et elle a reçu, pour cette raison,
le *courbe incolore*.
ue $\alpha+\beta = 90^0$, c'est-à-dire lorsque le polariseur et l'analyseur
sés à angle droit, $I_0 = 0$, et la courbe incolore se dessine en
est une courbe d'intensité minima.
ue $\alpha+\beta = 180^0$, c'est-à-dire lorsque le polariseur et l'analyseur
allèles, $I_0 = 1$, et la courbe incolore est une courbe d'intensité
.
courbe passe nécessairement par les traces des axes optiques.
une vibration d'orientation quelconque peut toujours être sup-
propager suivant un de ces axes; α est donc quelconque pour
ection, et la condition $\sin 2\alpha \sin 2\beta = 0$ est toujours remplie.

e générale des courbes incolores dans les cristaux biaxes.

rme $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ s'annule pour $\sin 2\alpha = 0$ et $\sin 2\beta = 0$; il y

a donc, en général, deux courbes incolores distinctes, respectivement aux plans de vibration du polariseur et d

Nous allons chercher, dans les conditions d'approxin nous sommes placés, la forme d'une de ces courbes, ce née, par exemple, par $\sin 2\alpha = 0$. Cette équation est satis et $\alpha = 90^0$. Supposons $\alpha = 0$, c'est-à-dire la vibration de lèle à celle du polariseur.

Soient, sur le plan du réticule du microscope, I (fig. l'axe de l'appareil, normal à la lame ; A et A′ les traces de

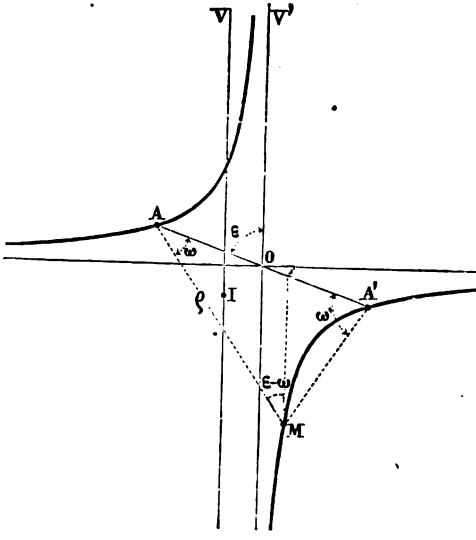


Fig. 63.

que nous supposerons rapprochées et peu distantes de toujours à considérer que des rayons peu inclinés su Soit IV la direction de vibration du polariseur. Soit M courbe cherchée; si l'on mène AM et A′M, la bissect AMA′ est sensiblement la direction de vibration du ra en M, et cette direction doit être parallèle à IV.

Appelons ρ le rayon vecteur AM, ω l'angle de ce ray l'angle de la vibration du polariseur avec la même dir trouve aisément dans le triangle AA′M,

$$\frac{\rho}{\sin AA'M} = \frac{AA'}{\sin 2 . Amv},$$

nt $m = AA'$,

$$\frac{\rho}{\sin(2\varepsilon - \omega)} = \frac{m}{\sin 2(\varepsilon - \omega)}$$

tion, transformée en coordonnées rectangulaires, avec AA' es x, devient

$$(y^2 - x^2)\sin 2\varepsilon - 2xy\cos 2\varepsilon = m(x\sin 2\varepsilon - y\cos 2\varepsilon).$$

ients de y^2 et x^2 étant égaux et de signe contraire, la courbe perbole équilatère ; le centre de cette hyperbole est le point O, AA', car tout doit être symétrique autour de ce point qui est e la bissectrice aiguë. L'une des asymptotes est parallèle à IV, trouve $\rho = \infty$ pour $\omega = \varepsilon$; l'autre asymptote est la droite culaire.

ave $\rho = 0$, pour $\omega = 2\varepsilon$; l'hyperbole est donc tangente en A à e inclinée sur AA' d'un angle égal à 2ε. Lorsqu'on fait tourner l'un angle égal à α, ε varie de α, et l'angle que fait la tangente bole en A avec AA' varie de 2α, c'est-à-dire tourne d'un angle le celui dont tourne la lame.

ue $\varepsilon = 0$ ou $\varepsilon = 90°$, c'est-à-dire lorsque la lame est tournée de on que la droite AA' est perpendiculaire ou parallèle à la vi- du polariseur, les deux branches de l'hyperbole se confondent ux droites perpendiculaires qui se croisent en O, et dont l'une oite AA' elle-même. Au lieu d'une hyperbole, on a une croix

ue $\varepsilon = 45°$, la droite AA' bissèque l'angle droit formé par les rations du polariseur et de l'analyseur, les tangentes aux deux s d'hyperbole en A et A' sont perpendiculaires sur AA', c'est-à- AA' est l'axe transverse de l'hyperbole.

urbe incolore qui correspond à la valeur $2\alpha = 180°$ ou $\alpha = 90°$ videmment une hyperbole équilatère passant en A et A' et ayant asymptotes que la précédente, avec laquelle elle est identique. lariseur ne donne donc qu'une seule courbe incolore H_p (fig. 64), vibration A_p du polariseur est une des asymptotes. Il doit en même pour l'analyseur, et la courbe incolore H_a qui lui corres- st une autre hyperbole équilatère, passant encore en A et A', ont la vibration A_a de l'analyseur est l'une des asymptotes.

Les intensités lumineuses des hyperboles H_a et H_p r
maxima ; ce sont des valeurs moyennes. Les courbes su
les intensités lumineuses, *pour une même valeur de* si
maxima et minima, sont données par les maxima et les n

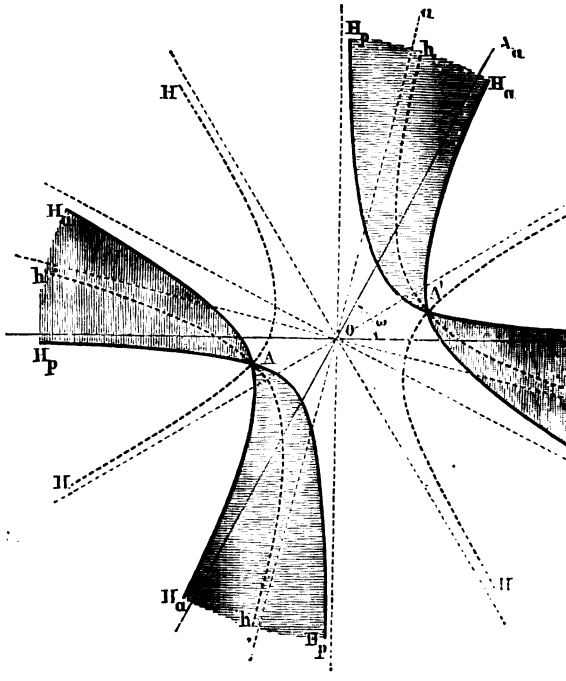


Fig. 64.

sin 2β. Le maximum est donné par $\alpha = \beta$; la courbe m
une hyperbole équilatère H passant toujours en A et A′ et a
des asymptotes la bissectrice de l'angle $\omega = \alpha + \beta$ que
elles les deux asymptotes A_p et A_a des hyperboles H_p
bole H traverse la partie de l'image dont la teinte est di

Le minimum d'intensité est donné par le maximum
— sin 2α sin 2β, ou en faisant β négatif et par conséqu
au maximum de sin 2α sin $2(\alpha - \omega)$. On est ainsi con
$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\omega}{2}$. La courbe suivant laquelle l'intensité lum
nima est ainsi une hyperbole équilatère h, dont l'une de

asymptote de H un angle égal à 45°. Cette hyperbole traverse u plan dont la teinte est opposée à celle du centre.

$\alpha + \beta = 90°$ ou 180°, c'est-à-dire lorsque la section princi- du polariseur est perpendiculaire ou parallèle à celle de , les courbes incolores du polariseur et de l'analyseur se t en une seule hyperbole, noire lorsque $\alpha + \beta = 90°$; d'in- xima au contraire lorsque $\alpha + \beta = 180°$.

éressant de voir, dans le cas où $\omega = 90°$, comment l'intensité croît de part et d'autre de l'hyperbole noire. Il suffit, pour hercher la courbe suivant laquelle l'intensité lumineuse a r donnée o, abstraction faite des variations périodiques dues $\frac{-e}{\lambda}$. En attribuant à ce $\sin^2$ une valeur moyenne M, l'équa- $= M \sin^2 2\alpha = N$. On tire de là pour α deux valeurs égales e contraire, $\pm \alpha_1$. La courbe cherchée se compose donc de erboles équilatères passant en A et A′, et dont les asymptotes es font, avec celles de l'hyperbole noire, de part et d'autre s égaux à α_1.

t l'intensité lumineuse la plus grande parmi celles que l'ob- considère comme donnant du noir, la partie noire de l'image rise entre les deux hyperboles qu'on vient de définir. La montre l'image noire qui se dessine entre deux nicols croi- que la direction AA′ de la lame fait un angle de 45° avec la de polariseur. La figure 66 montre l'image noire qui se entre les deux nicols croisés, lorsque la direction AA′ est ou perpendiculaire à cette vibration. On voit que, dans toutes es, les points A et A′, qui sont les traces des axes optiques, se t avec beaucoup de netteté; c'est une particularité dont on d parti dans les mesures.

ntre de toutes les hyperboles vient se placer au centre de orsque la lame est taillée perpendiculairement à la bissectrice. as contraire, on voit toutes ces courbes se déplacer en quelque s le plan du réticule. Dans ce déplacement, une des branches rbole peut disparaître et l'autre rester visible; toutes les deux même disparaître à la fois.

ame est taillée perpendiculairement à un axe optique, on voit r une branche d'hyperbole passant au centre de l'image, et convexité est toujours tournée du côté de la bissectrice. Cette

branche d'hyperbole devient une droite, passant par

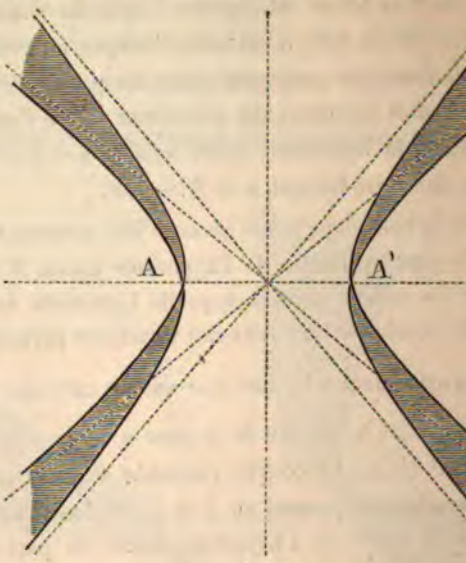


Fig. 65.

optiques, lorsque ce plan est parallèle à l'une des vib

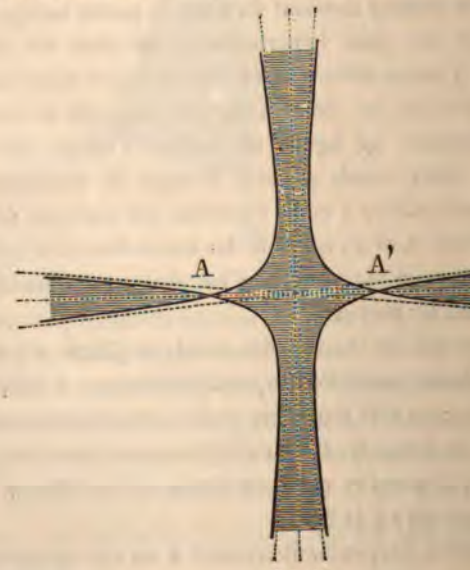


Fig. 66.

seur ou de l'analyseur croisés à angle droit.

que la lame est taillée perpendiculairement à l'axe moyen, au-
courbe incolore n'existe plus. Dans la région centrale de ce plan,
sections des axes optiques sont parallèles à ces axes eux-mêmes;
voir la direction de la section principale en un point M de cette
du plan, il faut donc. après avoir mené par M deux droites paral-
ces axes, mener leur bissectrice qui a la même orientation pour
es points M. Les angles α et β ayant les mêmes valeurs, l'intensité
e use est la même, ou du moins les variations n'en sont dues qu'aux
ons périodiques de $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$. Tous les points de la lame voi-
u centre s'éteignent donc en même temps lorsque la bissectrice des
optiques vient à être parallèle à l'une des vibrations du polariseur
l'analyseur.

istaux uniaxes. — Lorsque le cristal est uniaxe, les deux axes
ues se confondent et par conséquent aussi les points A et A′ des
es précédentes. Toute la théorie qu'on vient d'exposer subsiste
cette particularité que chaque hyperbole équilatère se transforme
eux droites rectangulaires, c'est-à-dire en une croix dont la trace
axe est le centre.

tre deux nicols croisés on voit une croix noire dont les bras sont
lèles aux vibrations de ces nicols. Entre les nicols parallèles la
noire est remplacée par une croix blanche. Entre deux nicols
nés d'une façon quelconque, on voit deux croix grises, toujours
ores, dont les bras sont parallèles et perpendiculaires aux vibra-
du polariseur et de l'analyseur.

cune courbe incolore n'existe lorsque la lame est taillée parallè-
nt à l'axe.

squ'ici nous n'avons étudié que le cas où les rayons qui traversent
me sont peu obliques sur la normale. Il est évident que les phéno-
es ne changent pas d'une façon essentielle dans le cas général. Il
e seulement que les courbes noires ne sont plus des hyperboles,
des courbes dont la forme rappelle celle des hyperboles. On leur
erve encore ce nom. D'ailleurs, il est toujours rigoureusement
de dire que ces courbes passent par les images des traces des
optiques; c'est la seule propriété dont on se serve dans les me-
s précises.

II. — COURBES D'ÉGAL RETARD.

Définition de la surface d'égal retard. — Il nous res à étudier les phénomènes produits par les variations p $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$.

Nous supposons la lame cristalline, d'épaisseur ε, tra rayon OM (fig. 67) faisan male à la lame un angl que l'on a sensiblement

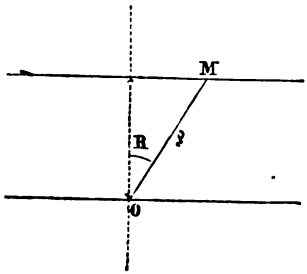


Fig. 67.

$$\frac{o-e}{\lambda} = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\lambda \cos R} \sin$$

équation dans laquelle il de rappeler que $o-e$ est des temps employés par le polarisés à angle droit qui se meuvent suivant OM à traver la longueur d'onde de la lumière monochromatique consi les inverses des grandeurs des axes d'élasticité a et c de θ'' les angles que fait OM avec les axes optiques.

En appelant ρ la longueur OM, on a

$$\rho = \frac{\varepsilon}{\cos R}$$

et

$$\frac{o-e}{\lambda} = \rho \frac{n_c - n_a}{\lambda} \sin \theta' \sin \theta''.$$

Sous cette forme, on voit que $o-e$ ne dépend pas de l' plan qui limite la lame, mais uniquement de celle de OI aux axes d'élasticité optique, ainsi que de la longueur ρ. supposons le milieu cristallin indéfini, l'équation

$$\frac{o-e}{\lambda} = k,$$

ou

$$\frac{\rho(n_c - n_a)}{\lambda} \sin \theta' \sin \theta'' = k$$

est l'équation polaire, rapportée aux deux axes optique

d'une certaine surface définie par la propriété suivante : « Si
n rayon vecteur OM de la surface, les deux vibrations rec-
qui partent simultanément de O et se propagent suivant OM,
point M avec une différence de marche qui est la même,
it le rayon vecteur OM qui ait été choisi. » Cette surface est
al retard ou *isochromatique*[1].
n peut en être mise sous la forme

$$\rho \sin \theta' \sin \theta'' = m,$$

$$m = k \frac{\lambda}{n_c - n_a}.$$

ns maintenant isolée dans le milieu cristallin indéfini une
ée par deux plans parallèles dont l'un passera par le point
) qui sera considéré comme l'origine de toutes les ondes
ineuses. L'intersection du plan supérieur de la lame avec la
gal retard est une courbe *mn* telle que les deux ondes planes
angle droit, qui sortent de la lame par chacun des points
urbe, en sortent avec un même retard relatif.
ne est placée entre deux nicols croisés, et si l'on donne à k
entière quelconque, la courbe est une courbe noire. En don-
ute la série des valeurs entières, on obtiendra une série de
égal retard correspondantes qui dessineront sur le plan su-
la lame une série de courbes noires.
obtenir toute cette série de courbes en construisant une
ce d'égal retard, celle qui correspond, par exemple, à $k = 1$.
la surface correspondant à $k = 2$, est semblable à celle qui
à $k = 1$, et le rapport de similitude de toutes les longueurs
bre 2. En coupant cette surface par le plan placé à une dis-
centre on obtient donc une courbe semblable à celle qui
nue en coupant la première surface par un plan distant du

$\frac{\varepsilon}{2}$, avec le même rapport de similitude égal à 2. De là, la
ante qui permet d'obtenir, avec la surface d'égal retard corres-
$k = 1$, toutes les courbes successives : « Pour obtenir la courbe
dant à $k = p$, on coupe la surface correspondant à $k = 1$ par

[1] *Ann. de chimie et de physique*, 3e s., t. LXIII, 1861.

un plan distant du centre de $\frac{\varepsilon}{p}$, et on agrandit cett
rapport de p à 1. »

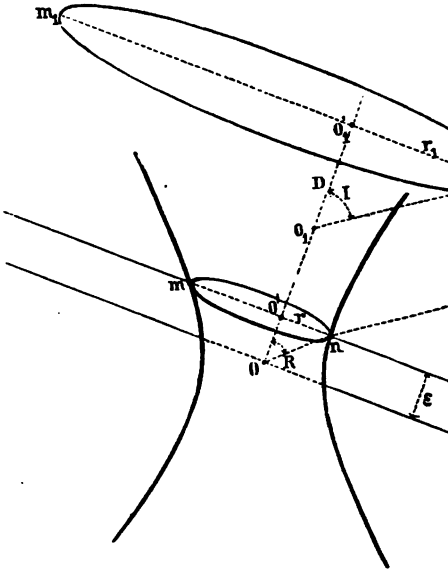


Fig. 68.

Si la lame est placée sur le porte-objet du microsc
vergente qui a été décrit plus haut, les courbes de
supérieur de la lame par les intersections des divers
retard viennent former une image au foyer du colle

Soit OO′ une normale au plan de la lame, et suppo
connue par son équation polaire rapportée au point
La longueur OO′ est l'épaisseur ε de la lame. La dir
tion On, après avoir traversé la lame en faisant un
normale, en ressort en faisant avec celle-ci un angle

$$\sin I' = n_b \sin R.$$

n_b étant l'indice moyen de la lame cristalline.

Nous supposerons que la lentille du collecteur es
que la face plane est tournée du côté de la lame.
verre, la direction de propagation se réfracte et vien
male un angle I donné par la relation

$$\sin I = \frac{1}{n} \sin I',$$

n étant l'indice du verre.

est le centre de la surface sphérique de la lentille, l'image du qui traverse la lame suivant On se produit sur la direction O_1n_1, n angle I avec la normale et en un point n_1 tel que $O_1n_1 = F$, focale de la surface.

ge de la courbe mn est ainsi déterminée par l'intersection hère ayant O_1 pour centre et F pour rayon, avec un cône dont et est O_1, et tel qu'à une génératrice On du cône Omn, faisant le R avec la normale, correspond une génératrice On, située plan qui passe par On et la normale et inclinée sur la normale gle I donné par la relation

$$\sin I = \frac{n_b}{n} \sin R.$$

angle R reste suffisamment petit, on pourra considérer l'inter- de la sphère et du cône comme comprise dans un plan parallèle et dont la distance $O_1O'_1 = D$ à O_1 sera peu différente de F. On ors à peu près, en appelant r_1 la distance $O_1O'_1$,

$$r_1 = D\,tg\,I, \qquad r = \varepsilon\,tg\,R;$$

me on peut assimiler $tg\,I$ et $tg\,R$ respectivement à $\sin I$ et $\sin R$, dra

$$r_1 = \frac{n_b D}{n\varepsilon}\, r.$$

on reste dans cet ordre d'approximation, on obtiendra donc la m_1n_1, en traçant une courbe semblable à mn par rapport au), avec $\frac{D}{\varepsilon}\frac{n_b}{n}$ pour rapport de similitude.

s allons examiner successivement la forme que prennent ces es, dans les cristaux uniaxes et dans les cristaux biaxes.

CRISTAUX UNIAXES.

face d'égal retard. — Dans les cristaux uniaxes, l'équation de la e d'égal retard est

$$\rho \sin^2 \theta = m = k \frac{\lambda}{n_c - n_a}.$$

est, bien entendu, de révolution autour de l'axe du cristal, et

l'équation précédente peut être aussi considérée co
courbe méridienne. Cette courbe est facile à construir

On décrit un cercle ayant m pour rayon (fig. 69

Fig. 69.

un rayon vecteur qui coupe le cercle en n; par le poi
gente au cercle en n rencontre la perpendiculaire à l'
on mène une droite parallèle à l'axe qui vient rencont
teur en M; M est un point de la courbe. On a en effet

$$On' = \frac{m}{\sin\theta}, \qquad OM = \frac{On'}{\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta}{m}.$$

Il est aisé de voir que cette courbe se compose de de
cune d'elles est tangente au cercle, en un point qui est
tourne d'abord sa convexité vers l'axe, puis, après un
situé sur le rayon vecteur qui fait avec la perpendic
angle égal à 31° 46', elle tourne sa concavité vers l'
forme parabolique.

En appelant ω l'angle complémentaire de θ, l'équat
devient

$$\rho\cos^2\omega = m, \text{ ou } \rho\sqrt{1 - 2\sin^2\omega} = m,$$

valeurs suffisamment petites de ω qui permettent d'extraire la
ar approximation. En rapportant à des axes coordonnés rec-
es qui seront l'axe principal comme axe des z et deux droites
laires tracées dans le plan du cercle comme axe des x et des y,
narquant que

$$\sin^2\omega = \frac{z^2}{\rho^2} \quad \text{et} \quad \rho^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = m^2,$$

quation de la surface. Celle-ci est donc, dans le voisinage du
e gorge, un hyperboloïde de révolution à une nappe dont la
méridiénne est une hyperbole équilatère.

s perpendiculaires à l'axe. — Supposons une lame découpée
cristal uniaxe perpendiculairement à l'axe; l'intersection de
ce d'égal retard par le plan supérieur de la lame est un cercle
rayon est r. On a $\sin\theta = \frac{r}{\rho}$ et $\rho = \sqrt{r^2 + \varepsilon^2}$, ces valeurs de θ et
rtées dans l'équation de la surface, donnent une relation dont
déduire la valeur de r, et qui est

$$r^2 = m\sqrt{r^2 + \varepsilon^2}.$$

on se borne à considérer les cercles visibles qui sont donnés
rayons dont l'inclinaison sur l'axe est suffisamment petite, on
gliger r^2 devant ε^2. Il vient alors

$$r^2 = m\varepsilon.$$

ayon r, du cercle tracé dans le plan de réticule est grandi dans
port $D\frac{n_b}{n}$, il aura donc pour valeur

$$r_1 = \frac{Dn_b}{n\varepsilon}\sqrt{m\varepsilon} = D\frac{n_b}{n}\sqrt{\frac{k\lambda}{\varepsilon(n_c - n_a)}},$$

plaçant m par sa valeur.

rayon du cercle est donc proportionnel à $\sqrt{\lambda}$, c'est-à-dire plus
pour la lumière rouge qne pour la lumière violette; il est en

raison inverse de $\sqrt{\varepsilon}$, c'est-à-dire d'autant plus petit que la lame est plus grande; il est en raison inverse de $\sqrt{n_c -}$ d'autant plus petit, toutes choses égales, que la lame est gente. Les lames donnent des cercles de même diam $\varepsilon(n_c - n_a)$ a la même valeur; on peut donc appeler $\varepsilon(n_c -$ *optique* de la lame.

Le rayon du cercle est enfin proportionnel à $\sqrt{k}$. de k égale à zéro ou à un nombre entier correspond $\sin^2 \pi \frac{o-e}{\lambda}$ ou $\sin^2 \pi k$ égale à zéro. A toute valeur d moitié d'un nombre impair, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc., correspond $\sin^2 \pi k$ égale à 1. Lorsque les nicols sont croisés, la sé entières de k donne une série de cercles pour lesquel conséquent de cercles noirs; la série des valeurs d $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, etc., donne une série de cercles disposés entre et pour lesquels $I_o = 1$, c'est-à-dire pour lesquels l'inter est la même que celle de la lumière incidente, et qui o couleur de la lumière monochromatique employée. Il es miner le cas des nicols parallèles, car chaque point a complémentaire de celle qu'il a dans le cas précédent; les cercles noirs deviennent les cercles d'intensité maxi sement.

Si, au lieu de représenter le premier retard par 1, o par 2, la série des valeurs de k qui donne les anneaux sentée par celle des nombres pairs,

0, 2, 4, 6, 8, etc.

et la série des valeurs de k qui donnent les cercles d'i mum, l'est par celle des nombres impairs,

1, 3, 5, 7, etc.

Les rayons des cercles noirs successifs sont donc con carrées des nombres pairs; ceux des cercles lumineux, co carrées des nombres impairs. La valeur zéro fait partie

de côté cette valeur, on voit que le cercle qui a le plus est un cercle lumineux entre deux nicols croisés et un cercle deux nicols parallèles.

cune de ces séries de cercles, l'écartement de deux cercles tend vers l'expression $\frac{Dn_b}{2n}\sqrt{\frac{\lambda}{\varepsilon(n_c - n_a)}}\frac{1}{\sqrt{k}}$. Lorsque k est and, cette expression varie très lentement, et les cercles sont quidistants.

e 68 représente les anneaux noirs directs qu'on observe entre s croisés, avec la croix noire qui les traverse.

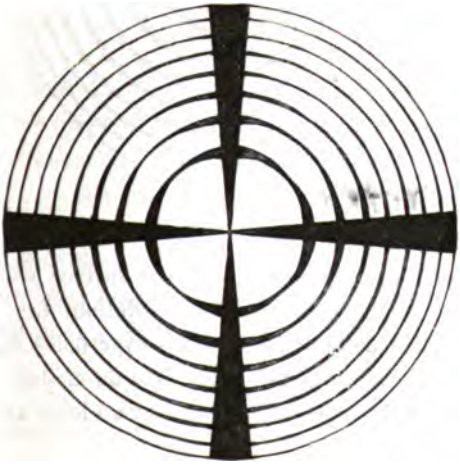


Fig. 70.

ure 71 représente les anneaux noirs complémentaires que l'on entre deux nicols parallèles avec la croix lumineuse qui les tra-

ue les nicols ne sont ni parallèles, ni perpendiculaires, il y a oix dont les bras sont parallèles et perpendiculaires aux vibra- polariseur et de l'analyseur. Dans les quatre secteurs formés bras tous deux parallèles ou tous deux perpendiculaires à ces ns, les franges sont des portions d'anneaux *directs;* dans les autres secteurs, les franges sont des portions d'anneaux *complé-es.*

s parallèles à l'axe. — La partie visible du phénomène est s donnée par des rayons peu inclinés sur la normale, c'est-à-

dire sur une perpendiculaire à l'axe du cristal; il est inutile de considérer une autre portion de la surface d

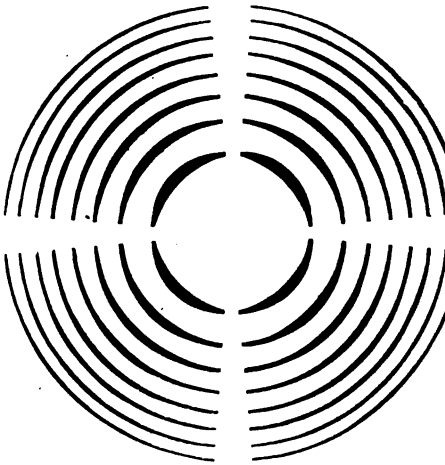


Fig. 71.

celle qui avoisine le cercle de gorge. Cette surface pe regardée comme un hyperboloïde de révolution. Les par le plan supérieur de la lame sont des hyperboles les asymptotes sont inclinées de 45° sur l'axe du cristal

Les équations de ces hyperboles, rapportées à leurs a

$$y^2 - z^2 = m^2 - \varepsilon^2.$$

L'axe transverse réel de l'hyperbole est dirigé perpen l'axe lorsque $m^2 > \varepsilon^2$; parallèlement à l'axe, au cont $m^2 < \varepsilon^2$. Si l'on prend k' satisfaisant à la double conditi

$$\frac{k'\lambda}{n_c - n_a} > \varepsilon, \qquad \frac{(k'-1)\lambda}{n_c - n_a} < \varepsilon,$$

l'hyperbole noire la plus rapprochée de l'axe, entre deux correspond au retard k' pour les courbes dont l'ave rée culaire à l'axe du cristal, et au retard $k'-1$ pour celles est parallèle à l'axe du cristal. La première série d'hyp pond à la série de retards k', $k'+1$, $k'+2$, etc.; la deu

celle des retards $k'-1, k'-2, k'-3$, etc. Les asymptotes, sauf
rès particuliers, ne sont comprises ni parmi les courbes noires,
les courbes lumineuses.

ndeur du demi-axe transverse de chaque hyperbole, tracée sur
u réticule, est

$$\frac{Dn_b}{n\varepsilon}\sqrt{m^2-\varepsilon^2}=\frac{Dn_b}{n}\sqrt{\frac{k^2\lambda^2}{(n_c-n_a)\varepsilon^2}-1}.$$

la première courbe visible correspond à

$$k>\frac{\varepsilon(n-n_a)}{\lambda},$$

plus souvent un assez grand nombre, car $\varepsilon(n_c-n_a)$ est généra-
grand par rapport à λ. Cette remarque est importante : car on
vec la lumière blanche les phénomènes d'interférence dispa-
pour de grands retards ; il en résulte que les franges ne sont
en général, dans les lames parallèles à l'axe, qu'avec de la lu-
onochromatique.

ixer les idées, supposons que la lame soit une lame de quartz
d'épaisseur, éclairée par la lumière jaune du sodium. On a

$$n_c-n_a=0{,}0092$$

$$\lambda=0^{mm}000530,$$

déduit

$$\frac{\varepsilon(n_c-n_a)}{\lambda}=\frac{0.0046}{0.00053}=8{,}7.$$

nières hyperboles visibles, de part et d'autre des asymptotes,
ndent donc à des retards égaux à 9 et 8 longueurs d'onde ;
rds, avec la lumière blanche, ne donnent guère que du blanc,
avait, au contraire,

$$\varepsilon=0^{mm}.05,$$

ières hyperboles correspondraient à des retards égaux à 1 et 0.
rboles seraient visibles, et l'une d'elles, étant noire, pourrait
fondue avec l'hyperbole incolore d'un cristal à deux axes. Il est

vrai que, à mesure que ε devient plus petit, les axes hyperboles deviennent plus grands, et que les hyperbol disparaître du champ.

Superposition de deux lames perpendiculaires à avons vu, en parlant des phénomènes produits par la lèle, que les choses se passent, avec deux lames perp l'axe et superposées, comme dans le cas d'une lame uniq seur optique serait égale à la somme algébrique des épai des lames. La même conclusion s'appliquera encore au de la lumière convergente, si l'on ne considère que d différents de la normale.

Lorsque, en superposant une seconde lame à une prem algébrique des épaisseurs optiques est de même signe de la première, cette superposition équivaut donc à un d'épaisseur de la première lame, lorsque la seconde est optique ; à une diminution dans le cas contraire. Dans l les anneaux sont rétrécis ; dans le deuxième cas, ils s superposant à une lame de signe inconnu une autre lame comme une lame de quartz par exemple, on a donc un mental de déterminer le signe de la première.

Il reste toutefois dans certains cas quelque incertitude de savoir si l'épaisseur optique de la lame connue reste faible en valeur absolue que celle de la lame inconnue ne peut se présenter que lorsqu'on observe un élargis neaux ; mais elle peut être levée en observant alors les lame de quartz en premier lieu, et en superposant ensu connue ; si l'élargissement des anneaux est encore obte que les deux cristaux sont de même signe.

Superposition de deux lames parallèles à l'axe, d ture et de même épaisseur, mais dont les sections pri croisées à angle droit.— Considérons, dans la première seur ε, le cône des rayons qui contractent, en le traversan et dessinent sur sa surface supérieure une hyperbole é nous supposerons l'axe transverse, de longueur R, perp l'axe optique.

Il y aura, dans la deuxième lame, une hyperbole équil et superposée à la première, mais dont l'axe transverse, to gueur R, sera parallèle à l'axe optique. Le cône de rayon

du centre de cette deuxième lame, tracerait cette hyperbole sur sa surface supérieure, contracterait dans cette lame un retard égal à k_2. Ce cône est semblable au premier, et les rayons du premier cône, en traversant la deuxième lame, ajoutent au retard k_1, le retard $-k_2$, le signe — tenant compte de ce que les sections principales des lames sont croisées à angle droit. Les rayons ont donc tous contracté un même retard définitif, égal à $k_1 - k_2$, après avoir traversé les deux lames, et l'hyperbole équilatère d'axe transverse égal à 2R qu'ils tracent sur la surface supérieure, est la courbe d'égal retard correspondant au retard $K = k_1 - k_2$.

Les courbes d'égal retard sont donc encore comme dans le cas d'une seule lame des hyperboles équilatères dont les axes sont dirigés suivant les axes optiques de chacune des lames. Il y a cependant entre les deux cas une différence très importante. Nous avons, en effet, dans la première lame, dont l'axe transverse est perpendiculaire à l'axe optique

$$R^2 = m^2 - \varepsilon^2 = k_1^2 q^2 - \varepsilon^2$$

en posant, pour abréger,

$$q = \frac{\lambda}{n_c - n_a}.$$

On en déduit

$$k_1^2 = \frac{\varepsilon^2 + R^2}{q^2}.$$

Dans la deuxième lame dont l'axe transverse est parallèle à l'axe optique, on a

$$R^2 = \varepsilon^2 - m^2 = \varepsilon^2 - k_2^2 q^2,$$

d'où l'on tire

$$k_2^2 = \frac{\varepsilon^2 - R^2}{q^2}.$$

On a donc

$$K = k_1 - k_2 = \frac{1}{q}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + R^2} - \sqrt{\varepsilon^2 - R^2}\right).$$

Si $R = 0$, ce qui réduit les hyperboles à leurs asymptotes, on a donc

$$K = 0,$$

c'est-à-dire que les asymptotes correspondent à un retard nul et seront toujours figurées en noir entre deux nicols croisés.

Dans la lumière homogène, les premières hyperboles
et d'autre des asymptotes, correspondront à des reta
successivement égaux à 1, 2, 3, etc. Les hyperboles et

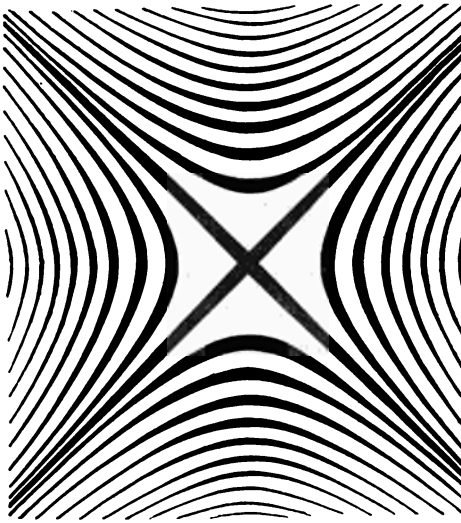


Fig. 72.

seront donc toujours visibles, même dans la lumière
aura les deux asymptotes noires séparant des hyperbol

Si l'on emploie le même procédé d'approximation qu
perpendiculaires à l'axe, on regardera R comme petit
ce qui permettra de prendre la valeur approchée des
l'expression ci-dessus, et donnera

$$K = \frac{1}{q} \cdot \frac{R^2}{\varepsilon}.$$

L'axe transverse r de l'hyperbole tracée sur le plan
deuxième lame, par le cône des rayons qui éprouvent
égal à 2R, on aura

$$r^2 = 4Kq\varepsilon \quad \text{ou} \quad r = 2\sqrt{m\varepsilon},$$

si l'on continue à appeler m le produit de $\frac{\lambda}{n_c - n_a}$ par
rique K.

cas d'une seule lame d'épaisseur ε, perpendiculaire à l'axe
rayon r du cercle correspondant au retard K est $r=\sqrt{m\varepsilon}$.
ansverses de nos hyperboles équilatères suivent donc les
de variation que les rayons des cercles dans les lames nor-
xe.

e de retard, et lorsque l'épaisseur de chacune des lames pa-
égale à celle de la lame normale, l'axe transverse de l'hy-
t double du rayon de cercle.

e 70 représente les courbes noires, vues entre deux nicols
ec deux lames uniaxes, parallèles à l'axe, croisées à angle
clairées par de la lumière monochromatique.

**deux lames identiques taillées dans une direction quel-
t superposées de manière que les sections principales
oisées à angle droit.** — Supposons taillée dans le cristal
inclinée d'une façon quelconque sur l'axe optique, le plan
de cette lame coupe la surface d'égal retard suivant une
métrique par rapport à la projection de l'axe optique sur le

érons d'abord la surface d'égal retard qui correspond à un
mérique égal à k et passe par le centre du plan. Ce centre est
et de la courbe, et la tangente en ce point est perpendiculaire
jection de l'axe optique. Si nous nous bornons à une très
gion autour de ce centre, nous pourrons réduire la courbe à
gente.

ne des coordonnées étant au centre du plan, nous prenons
des y la projection de l'axe optique, et nous choisissons pour
sitive de cet axe la direction qui s'éloigne de l'axe, pour par-
ive la direction qui pénètre dans l'intérieur de la surface et va
er l'axe.

face qui correspond au retard numérique $k+\delta$ enveloppe la
le retard k, et, si l'on reste dans les mêmes limites d'approxima-
pe le plan suivant la droite parallèle à l'axe des x, dont l'équa-
$y=p\delta$; p étant un certain coefficient constant. La surface qui
nd au retard $k-\delta$ couperait de même le plan suivant la
$=-p\delta$.

rayon qui, partant du centre du plan inférieur de la lame, ren-

contre le plan supérieur en un point d'ordonnée y, a de
tard égal à $\frac{y}{p}$.

Pour la deuxième lame identique, mais croisée à angl
clusion sera la même, sauf à remplacer y par x.

Soit maintenant un rayon partant du centre du plan
première lame, et perçant le plan supérieur de la deuxiè
dont les coordonnées sont x, y; il percera le plan supé
mière lame en un point de coordonnées $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$, et aura
tard égal à $\frac{y}{2p}$. En traversant la deuxième lame, il se
rayon qni, partant du centre inférieur de cette lame, p
face supérieure au point $\frac{x}{2}$, $\frac{y}{2}$; il aura donc contracté
seconde portion du parcours, un retard égal à $\frac{x}{2p}$. Le r
du rayon est la *différence* de ces deux retards partiels, p
tions sont croisées; on a donc

$$k = \frac{y - x}{2}.$$

Les courbes d'égal retard tracées sur la surface de la
sont donc des droites

$$y - x = 2pk$$

parallèles à la bissectrice de l'angle droit formé par
tives des projections de l'axe optique sur chacune des
perposées.

La bissectrice, qui passe par le centre, correspond à
dans la lumière blanche, une frange noire entourée sym
part et d'autre, par des franges colorées correspond
numériques 1, 2, 3, etc.

Il ne reste plus qu'à trouver le coefficient p; à cet e
dérons les deux surfaces k et $k + \delta$; dans la section
male, au plan de la lame, le rayon vecteur ρ de la surfa
au centre du plan supérieur de la première lame est ég
appelle θ l'angle de ce rayon vecteur avec l'axe optique

$$\varepsilon \sin^2\theta = k \frac{\lambda}{n_c - n_a}.$$

st, pour la surface $k+\delta$, le rayon vecteur situé dans le plan , on a

$$\rho' \sin^2 \theta' = (k+\delta) \frac{\lambda}{n_c - n_a}.$$

'ordre d'approximation où l'on est placé, $\theta' - \theta$ est très-petit, sensiblement égal à ε ; on aura donc

$$\varepsilon(\sin^2 \theta' - \sin^2 \theta) = \delta \frac{\lambda}{n_c - n_a},$$

ı tire

$$\varepsilon \sin(\theta' + \theta) \sin(\theta' - \theta) = \delta \frac{\lambda}{n_c - n_a},$$

ɔlement

$$\varepsilon(\theta' - \theta) = \frac{\delta\lambda}{(n_c - n_a)\sin 2\theta}.$$

$(\theta' - \theta)$ est la longueur comprise, sur la projection de l'axe op- ntre l'origine et la droite correspondant au retard $k+\delta$. On a

$$p = \frac{\varepsilon(\theta' - \theta)}{\delta} = \frac{\lambda}{(n_c - n_a)\sin 2\theta}.$$

areil dont nous venons de donner la théorie porte, lorsqu'il est té d'un analyseur dont la vibration est à 45° de l'une des sec- s deux lames, le nom de *polariscope de Savart*. Placé près de e manière à recevoir la lumière divergente de l'espace, il montre ges colorées lorsque cette lumière est plus ou moins complète- larisée. Lorsqu'on a tourné le polariscope de manière que les aient le maximum de netteté, la vibration de la lumière inci- st perpendiculaire à la vibration de l'analyseur.

CRISTAUX A DEUX AXES.

ace d'égal retard. — L'équation polaire de la surface d'égal re-

$$\rho = \frac{m}{\sin\theta' \sin\theta''} = \frac{k\lambda}{n_c - n_a} \cdot \frac{1}{\sin\theta' \sin\theta''}.$$

sont, comme on le sait, les angles que fait le rayon vecteur avec

les deux axes optiques où $k\lambda$ est égal à $o - e$; n_a et n_c é
inverses de a et de c.

Nous allons discuter la forme de cette surface.

1° *Intersection de la surface par un plan perpendiculaire des* y.

On suppose d'abord le plan passant par l'origine et co
le plan des xz. L'équation polaire de l'intersection est ide
de la surface. On peut construire cette courbe par un proc
très simple. On décrit le cercle de rayon m (fig. 73) ; on

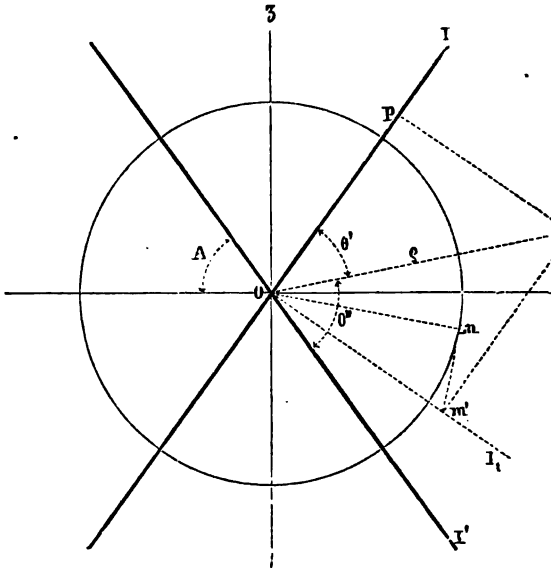


Fig. 73.

optiques OI, OI', qui font entre eux un angle égal à 2A, et l
ticité Ox, Oz. Soit OM un rayon vecteur quelconque, qu
axes OI et OI' des angles égaux à θ', θ''; on mène le rayon
que de OM par rapport à Ox, et OI_1 perpendiculaire à OI. P
où Om rencontre le cercle, on mène une perpendiculaire su
sa rencontre en m' avec OI_1; on a $Om' = \frac{m}{\sin \theta''}$. Par m'

laire à Om' jusqu'à sa rencontre avec le rayon vecteur en M,

$$OM = \frac{Om'}{\sin\theta'} = \frac{m}{\sin\theta''\sin\theta'},$$

n point de la courbe cherchée.

$\theta' = 0$, on a $\rho = \infty$.

nce $Mp = p$ du point M à l'axe optique OI est égale à $\rho\sin\theta'$, on de la courbe donne

$$p = \rho\sin\theta' = \frac{m}{\sin\theta''}.$$

$' = 0$, on a $\theta'' = 2A$. $\frac{m}{\sin 2A}$ est donc la limite vers laquelle tend θ' tend vers zéro et ρ vers l'infini. En d'autres termes, la courbe mptotes parallèles aux axes optiques et séparées de ces axes par nce normale égale à $\frac{m}{\sin 2A}$. Il est aisé de voir d'ailleurs qu'il ranches de la courbe dans les angles aigus et dans les angles ces asymptotes. La même construction s'applique au deux , mais si 2A est la valeur de l'angle des axes qui convient à l'une ches, 180° — 2A est celle qui convient à l'autre.

ance du centre à laquelle les asymptotes se croisent sur l'axe té est égale à $\frac{m}{\sin 2A \sin A}$ ou $\frac{m}{2\sin^2 A\cos A}$; la distance du laquelle se trouve le sommet de la courbe est $\frac{m}{\sin^2 A}$. Lorsque > 1 ou $\cos A > \frac{1}{2}$, ou encore $A < 60°$, le sommet de la courbe éloigné du centre que le point de croisement des asymptotes, la courbe est renfermée dans l'angle formé par les asymptotes; ire a lieu lorsque $A > 60°$, et la courbe a nécessairement alors ts d'inflexion.

ue, pour l'une des branches de la courbe, A est compris entre °, il est compris pour l'autre entre 45° et 30°; les deux bran- ur lesquelles on a $A > 60°$, sont inférieures aux angles des

asymptotes. La figure 74 montre l'intersection, par
de la surface d'égal retard dans un cristal pour leque

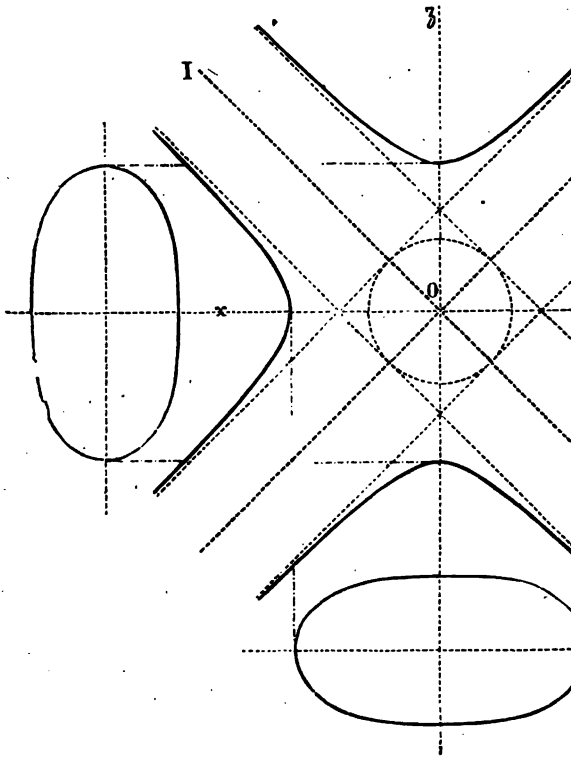


Fig. 74.

Lorsque, pour l'une des branches de la courbe, A e
0° et 30°, il est compris entre 60° et 90° pour l'autre;
prise dans l'angle aigu est intérieure, celle qui est com
obtus est extérieure aux angles des asymptotes. La
sente l'intersection par le plan des zx de la surface d'
un cristal pour lequel A = 20°.

Étudions la forme de la surface dans le voisinage
sur l'axe des y. Nous supposerons, pour fixer les idées
est la bissectrice aiguë; c'est le cas de la figure 75.

Si l'on coupe la surface par le plan zy, le retard o —

on situé dans ce plan et incliné d'un angle R sur l'axe y, est.

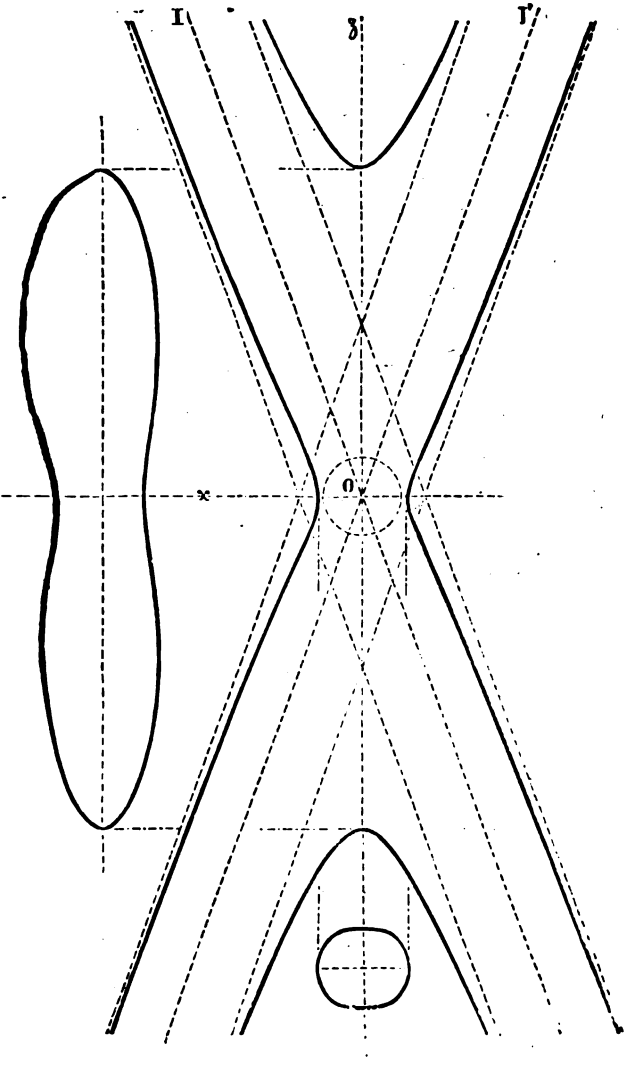


Fig. 75.

rès une formule trouvée page 187,

$$o - e = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R}(1 - \cos^2 A \sin^2 R).$$

et comme $\frac{\varepsilon}{\cos R}$ est égal à ρ, l'équation polaire de la c
dans le plan zy est

$$\rho(1 - \cos^2 A \sin^2 R) = m.$$

Portons au carré les deux nombres, et négligeons le
devant celui en $\sin^2 R$, on obtient

$$\rho^2(1 - 2\cos^2 A \sin^2 R) = m^2,$$

qui représente la courbe dans le voisinage du sommet y
à des axes parallèles à ceux des y et des z, cette éq
forme

$$y^2 - z^2 \cos 2A = m^2.$$

Puisque $\cos 2A$ est positif, cette équation est celle d
dont l'axe transverse, qui a pour longueur m, coïncide
et dont l'axe imaginaire, qui a pour longueur $\frac{}{\sqrt{c}}$
avec l'axe des z.

L'intersection de la surface par le plan xy aura de
voisinage du sommet y, l'équation

$$y^2 + x^2 \cos 2A = m^2,$$

qui représente une ellipse dont l'axe coïncidant avec cel
longueur $\frac{m}{\sqrt{\cos 2A}}$.

L'hyperboloïde à une nappe,

$$x^2 \cos 2A + y^2 - z^2 \cos 2A = m^2,$$

qui admet les deux sections principales précédentes, es
teur de la surface d'égal retard, au sommet y, et peut
cette surface dans le voisinage de ce sommet.

L'hyperboloïde se réduit à un plan, parallèle à xy,
$\cos 2A = 0$, c'est-à-dire $A = 45°$; c'est ce que montre bi

L'intersection de l'hyperboloïde par un plan parallè
pour équation $y = \varepsilon$, est une hyperbole équilatère dont

$$x^2 - z^2 = \frac{m^2 - \varepsilon^2}{\cos 2A}.$$

Cette équation peut donc représenter les courbes d'intersection de la surface par des plans parallèles à xz, et peu distants du sommet y, c'est-à-dire menés à une distance ε du centre, peu différente de m; à la condition, bien entendu, que l'on restreindra ces courbes à la partie voisine du sommet y.

Sauf l'introduction du facteur $\frac{1}{\cos 2A}$, cette équation est la même que celle qui représente l'intersection de la surface d'égal retard des cristaux uniaxes par un plan parallèle à l'axe, et peu éloigné du cercle de gorge. La bissectrice aiguë des cristaux biaxes joue, dans ce cas, le même rôle que celui de l'axe optique dans les cristaux uniaxes.

2° *Section par un plan perpendiculaire à l'une des bissectrices de l'angle des axes optiques.* — L'intersection par le plan passant par le centre s'obtient aisément en remarquant que l'on a (fig. 76)

$$\cos\theta' = -\cos\theta'' = \cos\omega \sin A,$$

ω étant l'angle du rayon vecteur avec l'axe des x, ce qui donne pour équation polaire de la courbe

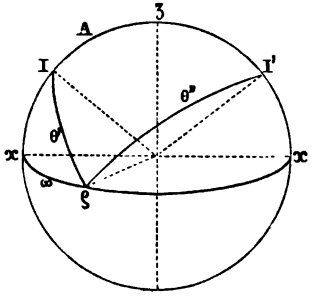


Fig. 76.

$$\rho = \frac{m}{1 - \cos^2\omega \sin^2 A}.$$

Cette courbe donne toujours $\rho = m$ pour $\omega = 90^\circ$, c'est-à-dire pour le point situé sur l'axe des y. Si l'on cherche toutes les valeurs de ω, pour lesquelles l'ordonnée parallèle aux y, c'est-à dire $\rho \sin\omega$, est égale à m, ces valeurs sont données par l'équation

$$m = \frac{m \sin\omega}{1 - \cos^2\omega \sin^2 A},$$

ou, en posant pour simplifier $\omega' = \frac{\pi}{2} - \omega$,

$$\cos\omega' = 1 - \sin^2\omega' \sin^2 A,$$

ou

$$2\sin^2\frac{\omega'}{r} = \sin^2\omega'\sin^2 A = 4\sin^2\frac{\omega'}{r}\cos^2\frac{\omega'}{r}\sin^2 A.$$

Divisant par $\sin^2\frac{\omega'}{2}$, ce qui supprime la solution $\omega' = 0$, il

$$\cos^2\frac{\omega'}{2} = \frac{1}{2\sin^2 A}.$$

Cette équation donne une solution possible lorsque 2 s lorsque $A > 45°$. La courbe aura donc, au point situé sur l concavité tournée vers l'intérieur lorsque $A > 45°$, c'est-à le plan est perpendiculaire à la bissectrice obtuse; l'i

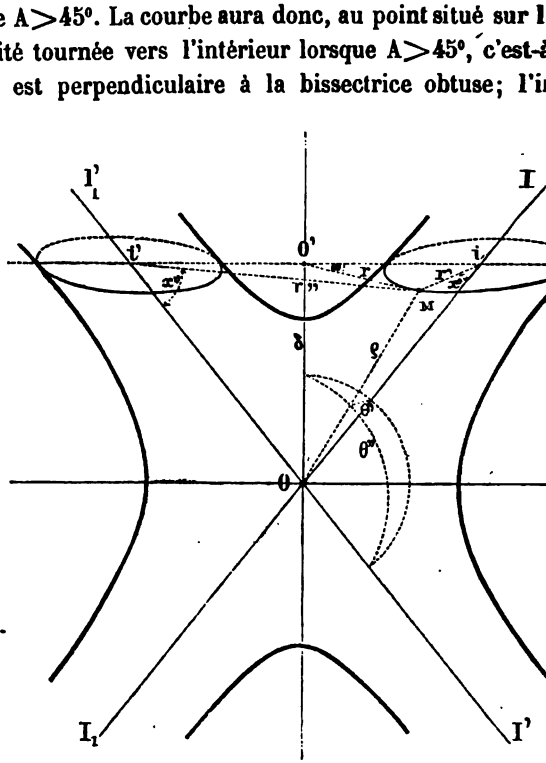


Fig. 77.

lorsque $A < 45°$, c'est-à-dire lorsque le plan est perpend bissectrice aiguë. Lorsque $A = 45°$, les deux sections per aux bissectrices sont égales, et aucune d'elles ne présente tournée en dehors.

Si l'on coupe par un plan *séparé du centre par une dista*

cas où les rayons vecteurs font un petit angle avec la bissec-
ndiculaire, ce qui entraîne la petitesse de ε. On appelle r' et
nces respectives d'un point quelconque M de la courbe cher-
aces i et i' des axes optiques sur le plan de coupe (fig. 77);
encore x' et x'' les angles que font les rayons r' et r'' avec
iques. On a

$$\frac{r'}{\sin\theta'}=\frac{\rho}{\sin x'},\qquad \frac{r''}{\sin\theta''}=\frac{\rho}{\sin x''},$$

ire, pour l'équation de la surface,

$$r'r''\frac{\rho}{\sin x'\sin x''}=m.$$

istance ε est petite, x' et x'' sont peu différents d'un angle
peut être considéré comme égal à ε. L'équation de la courbe
ors

$$r'r''=m\varepsilon.$$

rbe cherchée est ainsi, dans les conditions d'approximation
est placé, une lemniscate dont i et i' sont les pôles.

ersection par un plan perpendiculaire à un axe optique.—Soit O'

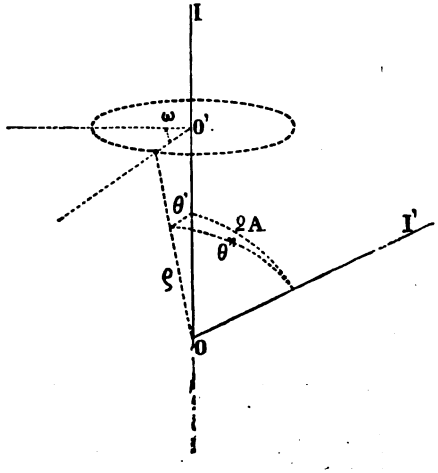


Fig. 78.

) le point où l'axe optique rencontre le plan de coupe, ρ un rayon
quelconque, dont la projection sur ce plan a une longueur r et

fait avec la trace du plan des axes un angle égal à ω : la distance 00′ qui sépare du centre le plan de coupe.

$$r = \rho \sin \theta' = \frac{m}{\sin \theta}.$$

En nous bornant au cas où θ' est petit, c'est-à-dire on a sensiblement $\theta'' = 2A$, et la courbe est un cercl est $\frac{m}{\sin 2A}$. Cela montre que les cylindres circulaires, d totes et l'intersection par le plan des axes optiques sont d sont des cylindres asymptotiques à la surface.

La discussion qui précède donne une idée très précise

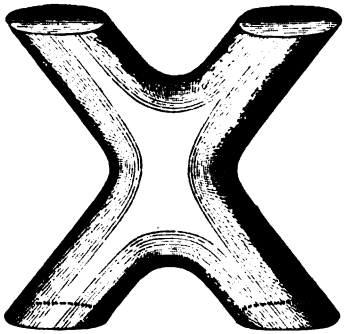


Fig. 79.

la surface d'égal retard. Cette surface est formée, comm figure 79, par deux espèces de tuyaux dont les axes son axes optiques et qui viennent se raccorder vers le centre

Lames taillées perpendiculairement à une bisse dire à l'un des axes d'élasticité a ou c. — Ce qui sur la surface d'égal retard dans les cristaux à deux aisée l'explication des courbes obscures ou lumineuses taillées dans ces cristaux présentent en lumière con

Nous supposerons d'abord la lame taillée perpendicula des bissectrices de l'angle formé par les axes optique minerons d'abord le cas où les nicols sont croisés à angl

sité de la lumière en un point quelconque est alors donnée
rmule

$$I = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \frac{o - e}{\lambda},$$

l'angle que fait avec la vibration du polariseur celle des
c sections principales du point considéré qui correspond à la
de propagation.

r-anges forment une série de lemniscates noires correspondant
leurs entières de $\frac{o - e}{\lambda} = k$. Les pôles ou traces des axes opti-
ont noirs, car ils correspondent à $k = 0$ ou à un retard nul ; la
la plus rapprochée de cette trace correspond à $k = 1$ ou à un
égal à λ; celle qui suit à $k = 2$, etc. Pour le centre de la figure,
ard est celui qui se produirait, en lumière parallèle, pour un
au de propagation normale ; il est donc égal à $r = \varepsilon (n_b - n_a)$ si
ssectrice est positive ; à $r = \varepsilon (n_c - n_b)$, si la bissectrice est néga-.
Le nombre entier de fois λ qui est compris dans r, donne le
re des franges obscures comprises entre le centre et le pôle de
des axes. Ces franges sont, dans ce cas, des courbes ovoïdes for-
de deux parties symétriquement placées autour des pôles de cha-
les axes optiques.

rsque $\frac{r}{\lambda}$ est entier, une frange noire correspondant à ce retard r
au centre de l'image, et forme une espèce de 8 dont le point de
ement est au centre. C'est le cas que représente la figure 80.
s franges qui correspondent à des retards plus élevés ne sont plus
qués en deux parties distinctes et entourent à la fois les deux
s.

s franges ne varient pas lorsqu'on fait tourner la lame entre les
s croisés. Mais les courbes incolores qui sont noires changent de
e et de position. Lorsque la ligne des pôles des axes bissèque l'un
angles droits formés par les vibrations du polariseur et de l'analy-
, ces courbes sont des hyperboles équilatères ayant pour asym-
s ces vibrations; pour axe transverse, la ligne de pôles; et pour
mets ces pôles eux-mêmes (fig. 80). C'est dans cette position que

l'image est la plus régulière et la plus nette et qu'on
tuellement.

Lorsqu'à partir de cette position, on fait tourner la l
boles se déforment ; elles gardent toujours pour asymp
tions du polariseur et de l'analyseur ; elles passent t
pôles des axes optiques, où elles semblent s'amincir e

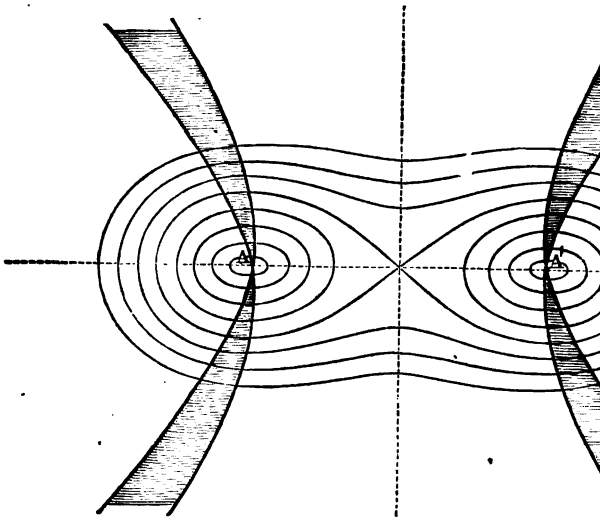


Fig. 80.

comme il a été expliqué plus haut, mais ces pôles ne
sommets de la courbe.

Lorsque la ligne des pôles est parallèle à l'une des vib
lariseur ou de l'analyseur, les hyperboles se sont tr
une croix noire dont les bras, parallèles à ces vibra
quelque sorte amincis aux pôles (fig. 64, p. 198).

Lorsque les nicols sont parallèles entre eux, les hyper
gardent la même forme que dans le cas des nicols
droit, mais au lieu d'avoir une intensité nulle, elles o
maxima ; en lumière blanche, elles sont blanches.

L'intensité étant alors donnée par la formule

$$I = \sin^2 2\alpha \cos^2 \pi \frac{o - e}{\lambda},$$

ges noires correspondent aux valeurs de $\frac{o-e}{\lambda}$ égales à **en** général $\frac{2n+1}{2}$.

anges noires, que nous appellerons *complémentaires*, occupent **e place** que celles qui, avec les nicols croisés à angle droit, ont **ensité** maxima.

que les nicols sont croisés d'une façon quelconque, il y a, **on** l'a vu, deux hyperboles incolores, mais non pas noires, qui **toutes** les deux par les pôles des axes optiques, et ont respec-**nt** pour asymptotes : l'une, la vibration du polariseur et la **perpendiculaire** ; l'autre, la vibration de l'analyseur et la droite **diculaire**.

que la ligne des pôles tombe dans un des angles formés par les **ions** du polariseur et de l'analyseur, ou par les perpendicu-**à** ces vibrations, la teinte du point central de l'image est directe 196). Dans ce cas, en dehors de l'espace compris entre les deux **hes** d'hyperbole qui passent par un même pôle, c'est-à-dire dans **rtie** non hachée de la figure 62, les franges noires sont des **ns** de lemniscates directes. Entre les branches d'hyperboles, c'est-**e** dans la partie hachée de la figure 62, les franges noires sont **ortions** de lemniscates complémentaires.

nverse a naturellement lieu lorsque la teinte du centre de l'image **omplémentaire**, c'est-à-dire lorsque l'axe des pôles tombe dans un **ngles** qui ont pour un côté une des vibrations du polariseur ou de **lyseur**, et, pour autre côté, une droite perpendiculaire à l'une de **ibrations**.

peut chercher quelle est, dans le plan des axes optiques, la loi **écartement** des franges. Si l'on se reporte à la figure 75 et si l'on **e** le ρ correspondant au point d'une frange noire situé dans le des axes optiques et compris entre le centre et le pôle de l'un de **axes**, on aura

$$= \rho(n_c - n_a)\sin\theta'\sin(2A-\theta') = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon(n_c-n_a)}{\cos(A-\theta')}[\cos 2(A-\theta') - \cos 2A].$$

ette équation donne l'angle $(A-\theta')$ que fait, avec la normale à la **e**, le faisceau qui, dans le plan des axes optiques, contracte un re-**l** égal à $k\lambda$. On en tire

$$\cos^2(A-\theta') - \frac{k\lambda}{\varepsilon(n_c-n_a)}\cos(A-\theta') - \cos^2 A = 0$$

et

$$\cos(A-\theta') = \frac{k\lambda}{2\varepsilon(n_c-n_a)} + \sqrt{\frac{k^2\lambda^2}{4\varepsilon(n_c-n_a)^2} + \cos^2 A},$$

d'où l'on déduit

$$\sin^2(A-\theta') = \sin^2 A - \frac{k^2\lambda^2}{2\varepsilon^2(n_c-n_a)^2} - \frac{k\lambda}{\varepsilon(n_c-n_a)}\sqrt{\frac{k^2\lambda^2}{4\varepsilon^2(n_c-n_a)^2} +$$

L'expression $\frac{k\lambda}{2\varepsilon(n_c-n_a)}$ est toujours petite, car k n'est jama
très grand, et λ est très petit. Supposons en effet, pour fixer les

$$\lambda = 0^{mm},0005, \qquad \varepsilon = 0^{mm},5, \qquad n_c - n_a = 0,01, \qquad k = 1;$$

on aura

$$\frac{k\lambda}{2\varepsilon(n_c-n_a)} = 0,05.$$

On peut donc négliger le cube de cette expression et écrire

$$\sin^2 A - \sin^2(A-\theta') = \frac{k\lambda}{\varepsilon(n_c-n_a)}\cos A + \frac{k^2\lambda^2}{2\varepsilon^2(n_c-n_a)^2}.$$

Comme nous l'avons vu plus haut, page 205, si A_m est l'angl
fait, avec la normale à la lame, et après sa sortie de la lentille
tive, le faisceau qui dans la lame cristalline est parallèle à
optique, on a

$$\sin A_m = \frac{n_b}{n}\sin A,$$

n_b étant l'indice moyen de la lame cristalline, et n l'indice du v

Si $A_m - \theta'_m$ est l'angle que fait, avec la normale à la lame, à l
de la lentille objective, le faisceau qui dans la lame fait avec ce
male l'angle $A - \theta'$, on aura de même

$$\sin(A_m - \theta'_m) = \frac{n_b}{n}\sin(A-\theta').$$

En remplaçant $\sin A$ et $\sin(A-\theta')$ par leurs expressions en
et $\sin(A_m - \theta'_m)$, il vient ainsi :

$$\sin^2 A_m - \sin^2(A_m - \theta'_m) = \frac{k\lambda}{\varepsilon}\frac{n_b^2}{n^2(n_c-n_a)}\cos A + \frac{k^2\lambda^2 n_b^2}{2\varepsilon^2 n^2(n_c-n}$$

le microscope, l'image d'un faisceau parallèle se fait, suivant es directions, à la même distance du centre de la lentille e ; $\sin A_m$ et $\sin(A_m - \theta'_m)$ sont donc respectivement propor- s aux distances qui, dans le plan des axes optiques, séparent, tre de l'image, le pôle de l'axe et la frange qui correspond au $k\lambda$.

le second membre de l'équation qui précède, on peut négliger nd terme par rapport au premier, et l'on voit ainsi que, si l'on le centre de l'image pour origine des distances, l'excès du carré distance polaire du pôle de l'axe optique sur le carré de celle frange est sensiblement proportionnel à $k\lambda$ et en raison inverse paisseur ε de la lame.

ne taillée perpendiculairement à un axe optique. — Les es noires, au moins celles qui entourent immédiatement le pôle xe, sont alors sensiblement des cercles.

'on se reporte à la figure 76 et si l'on prend le ρ correspond à un θ', dans le plan des optiques, on a

$$k\lambda = \varepsilon(n_c - n_a)\sin\theta' \sin(2A - \theta').$$

se borne au cas où θ' est très petit, on peut faire sensible- $= \varepsilon$ et $\sin(2A - \theta') = \sin\theta' \sin 2A$. On peut alors écrire

$$\sin\theta' = \frac{k\lambda}{\varepsilon(n_c - n_a)\sin 2A},$$

'on déduirait aisément que, dans l'image vue au microscope, les s des franges sont sensiblement proportionnels à $k\lambda$. Les rayons rcles noirs successifs varient comme la suite des nombres en- 1, 2, 3, etc.; ces courbes sont donc également espacées, au lieu en se rapprochant de plus en plus comme les cercles des cristaux es.

sait d'ailleurs que les franges circulaires ne sont pas ici traver- ar une croix noire comme dans le cas des lames uniaxes, mais ar une branche d'hyperbole passant au centre. Cette courbe, dont vexité est toujours tournée du côté du pôle de l'autre axe optique, nsforme en une ligne droite située dans le plan des axes opti-

ques lorsque ce plan est parallèle à l'une des vibrat
seur ou de l'analyseur croisés à angle droit.

Lames taillées perpendiculairement à l'axe mo cas il n'y a pas de courbes incolores. Les franges, idei qu'on voit dans les lames taillées parallèlement à l'axe d'u ne sont en général visibles que dans la lumière mo Ce sont des hyperboles équilatères, au nombre desque vent pas en général les asymptotes, inclinées de 45° principales de la lame.

Deux lames de la même épaisseur, taillées dans la perpendiculairement à l'axe moyen, et croisées à angl les mêmes franges que celles que l'on observe dans les tions avec deux lames taillées parallèlement à l'axe d'u On se rappelle que ces franges, visibles dans la lumiè des hyperboles équilatères au nombre desquelles sont

LUMIÈRE BLANCHE

Franges dans la lumière blanche. — Lorsque, a des lames cristallines avec de la lumière convergent tique, on emploie de la lumière blanche, il est aisé de nomènes que l'on observera. Chaque couleur donne un lière de courbes noires et de courbes lumineuses empiètent les unes sur les autres, et donnent naissanc ou franges colorées. On a vu que, pour une lame perpendiculairement à l'axe, le diamètre des annea tionnel, pour chaque couleur, à $\sqrt{k\lambda}$. Or cette loi est même que celle qui règle les diamètres successifs de de Newton, développés entre une lentille sphérique et La distribution des couleurs dans les anneaux succes même que celle que l'on observe dans les anneaux de dire que si l'on part du centre, les couleurs se succèd indiqué par l'échelle chromatique de la page 165. Cela vrai, que les variations que subissent, lorsque λ varie, des axes d'élasticité sont assez faibles pour être négligé quelques substances, comme certains échantillons d'a lesquelles cette condition ne soit pas suffisamment rem

planche I représente les franges circulaires et la croix incolore **la**me taillée perpendiculairement à l'axe d'un cristal uniaxe, et **vée** en lumière blanche.

st utile de remarquer que, d'après une loi démontrée à pro- **les** couleurs des lames minces cristallisées, la lumière blan- **e** donne des couleurs d'interférence que lorsque les retards k **faibles**. Lorsque k est un grand nombre, la lumière émergente **blanche**. Les franges d'interférence ne sont donc visibles que **ue** k est petit. C'est ainsi que, dans les lames trop épaisses, les **ds** les plus faibles sont encore trop grands pour qu'ils puissent **er** des franges, et celles-ci disparaissent. Elles n'apparaissent que la lumière monochromatique. C'est par une conséquence du **e** principe que les franges qui correspondent aux retards les plus **es** sont les plus nettes; on sait que ce sont toujours, dans les lames **coupent** des axes optiques, celles qui sont le plus rapprochées de **axes.**

ans les lames parallèles au plan des axes optiques, k est toujours grand nombre, sauf pour les lames très minces. On ne voit donc en général dans la lumière blanche; les franges ne sont visibles dans la lumière monochromatique. Lorsque deux lames parallèles plan des axes optiques sont croisées à angle droit, on sait que les nges apparaissent dans la lumière blanche, parce que les courbes ibles correspondent à de petites valeurs de k. (V. p. 210.)

Dispersion des axes dans les cristaux orthorhombiques. — La spersion des axes d'élasticité optique, que nous avons négligée jus- 'ici, produit dans certains cas, lorsque les lames sont éclairées par la lumière blanche, des phénomènes très intéressants.

Il n'y a rien à dire, sous ce rapport, des cristaux uniaxes. La position s axes d'élasticité y est la même pour toutes les couleurs, et la dis- rsion cristalline ne peut influer que sur la loi de la distribution des uleurs dans les franges colorées.

Pour les cristaux biaxes, la dispersion des axes peut se traduire une façon plus appréciable. Il est nécessaire de distinguer trois cas, ivant que les cristaux sont orthorhombiques, clinorhombiques ou orthiques.

Nous examinerons d'abord le cas des cristaux orthorhombiques. ns ce cas, les axes d'élasticité optique coïncident, *pour toutes les uleurs*, avec les axes binaires du cristal. Mais si les axes d'élasticité b, c diffèrent peu entre eux, c'est-à-dire si la double réfraction est

faible, il peut arriver que les variations produites d
de ces axes par la dispersion, en changent l'ordre d
posons par exemple que pour les rayons rouges, l'axe
une perpendiculaire à la face h^1 soit l'axe moyen d'élast
l'axe minimum c_r coïncide avec une perpendiculaire

Pour les rayons violets de l'extrémité opposée du
arriver que l'axe moyen b_v soit au contraire perpen
l'axe minimum c_v perpendiculaire à h^1 (fig. 81).

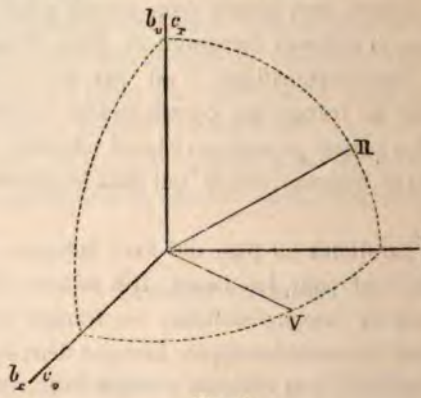


Fig. 81.

Pour les rayons rouges, le plan des axes optiques s
lèle à h^1, et l'un des axes rouges, quelque part en R
les rayons violets, le plan des axes serait parallèle à p
quelque part en V. Le plan des axes rouges serait ains
à celui des axes violets.

Les couleurs intermédiaires montreraient des tra
rouge et le violet. Dans le cas, que nous avons arbi
l'axe perpendiculaire à g^1 restant le plus grand pour to
mais l'axe perpendiculaire à h^1 étant, pour le rouge
le violet plus grand que l'axe perpendiculaire à p, il
leur pour laquelle les axes perpendiculaires à p et
entre eux. *Pour cette couleur particulière*, le crista
positif, la perpendiculaire à g^1 étant l'axe optique.

On comprend les modifications profondes qu'a
franges d'aussi importantes variations. Les phénom
peuvent plus être étudiés qu'en se servant de lumiè
tiques de diverses couleurs.

urbations aussi graves sont heureusement rares. En général on laisse aux axes d'élasticité le même ordre relatif de grandrive presque toujours au contraire que l'angle des axes optisous l'influence de la dispersion, mais en général cette vae-même est faible.

ons que l'angle des axes optiques rouges soit plus petit que s axes optiques violets, ce qu'on exprime en posant $\rho < v$. . 82) l'un des pôles des axes optiques rouges, et v le pôle le

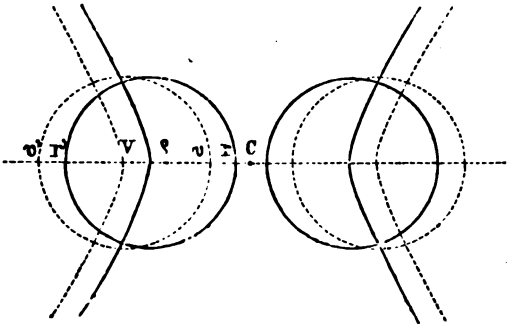


Fig. 82.

sin des axes violets. Le 1er anneau noir dans la lumière rouge le 1er anneau noir dans la lumière violette sera vv'. Dans la blanche, l'anneau rr' ne sera éclairé que par les rayons violets ntera cette couleur; l'anneau vv' au contraire, éclairé seulelr les rayons rouges, sera rouge. Dans la lumière blanche, le anneau coloré sera donc, au sommet le plus rapproché du rouge à l'intérieur et violet à l'extérieur; au sommet le plus du centre, rouge à l'intérieur et violet à l'extérieur. Les coue l'intérieur de l'anneau sont seules vives et pures, car celles de eur se mélangent avec les couleurs des anneaux suivants. C'est r les couleurs de l'intérieur qu'on jugera du sens de la dispers appliquant cette régle simple : « La couleur pour laquelle ment des axes est le plus petit, est celle qui colore la partie intédu sommet du 1er anneau le plus rapproché du centre des lems.»

eut aussi déduire le sens de la dispersion de l'observation des oles. L'hyperbole noire qui se produit dans la couleur rouge n ρ; celle qui se produit dans la couleur violette passe en V. La

portion de l'image voisine de ρ ne sera donc éclairé
blanche que par les rayons violets, et celle qui es
par les rayons rouges. On verra donc, dans la lumiè
cavité de l'hyperbole teinte en rouge, la convexité t
là cette autre règle équivalant à la 1re : « La coule
hyperboles, vers leurs sommets, du côté concave, est
l'écartement des axes est le plus faible. »

Mais quelle que soit la variation qui se produise
des couleurs des franges, elle sera toujours astreinte
c'est que les couleurs de ces franges seront distribué
par rapport aux traces des plans de symétrie du cris
toutes les couleurs, des plans principaux de l'ellip
C'est ainsi que dans les lames taillées perpendicu
des bissectrices de l'angle des axes optiques, on ve
leurs disposées symétriquement par rapport à la lig
rapport à une droite perpendiculaire menée par le
tance des pôles. Lorsque cette condition n'est pas
être assuré qu'il n'y a pas, au moins pour les phé
trois plans de symétrie dans le cristal; et celui-c
considéré comme orthorhombique si l'on réserve
stances qui, *pour toutes les propriétés physiques*, mo
caractéristique du système terbinaire.

Les figures de la planche II montrent les franges pr
nicols croisés, dans une lame orthorhombique éclairé
blanche, lorsque la ligne des pôles des lemniscates e
des vibrations du polariseur ou de l'analyseur, ou
clinée de 45° sur cette direction.

Dispersion des axes dans les cristaux clinorho
les cristaux clinorhombiques, la symétrie du cristal
les phénomènes optiques que par une seule condit
de symétrie coïncide avec un axe d'élasticité optiq
quent que le plan de symétrie parallèle à la face g^1
autres axes.

Si la biréfringence est faible et la dispersion cris
arriver que l'axe de symétrie coïncide avec l'axe
rouges, avec l'axe b ou l'axe c pour les rayons violets ; i
que les axes d'élasticité situés dans le plan de symé
tions entièrement différentes pour les rayons extré
cas se présentent, ils introduisent dans la forme de

turbations que l'étude optique du cristal n'est plus possible
s lumières monochromatiques.
s bornerons à examiner les cas, heureusement plus fré-
a dispersion n'introduit pas de trop grandes variations dans
des axes d'élasticité qui correspondent aux rayons extrêmes

peuvent se présenter.
premier cas, l'axe de symétrie binaire du cristal est, pour
couleurs, la bissectrice aiguë ; la dispersion cristalline est
roisée ou *tournante*.
d cas est celui dans lequel l'axe de symétrie est la bissec-
e ; la dispersion est dite *horizontale*.
ème cas est celui où l'axe de symétrie est l'axe moyen ; la
est dite *inclinée*.

— *Dispersion croisée. — L'axe de symétrie est la bissectrice*

ons la lame taillée perpendiculairement à l'axe de symétrie,
e à la bissectrice aiguë. Soient P_r et P'_r (fig. 83) les pôles des
ges, le point C qui est le pôle
sectrice est le milieu de P_r P'_r
l'axe de symétrie est la bissec-
ë pour toutes les couleurs. Les
axes violets pourront avoir des
différentes P_v et P'_v, à condition
oit toujours le milieu de la

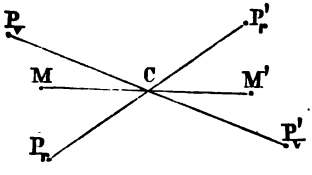


Fig. 83.

P'_v. Les lemniscates et les hyperboles pourront être plus ou
éformées, mais dans tous les cas la répartition des couleurs
e que si l'on prend un point M quelconque, la couleur du
symétrique de M par rapport à C sera la même que celle de M.
gle est évidente, puisque toutes les lemniscates et toutes les
es correspondant aux diverses couleurs ont C pour centre
.

gures de la planche III montrent des exemples de dispersion

. — *Dispersion horizontale. — L'axe de symétrie est la bissec-*
use.
ne taillée perpendiculairement à la bissectrice obtuse, c'est-à-

dire à l'axe de symétrie, donnerait encore une dispersion croisé
si, comme cela est ordinairement nécessaire pour l'observation,
est taillée perpendiculairement à la bissectrice aiguë qui est
plan de symétrie, les phénomènes changent.

La trace Cy du plan de symétrie du cristal est l'axe transve
mun des lemniscates correspondant à toutes les couleurs.

Si P_r et P'_r sont les pôles rouges, P_v et P'_v les pôles violets
perpendiculaire sur le milieu de $P_r P'_r$ et sur le milieu de $P_v P$

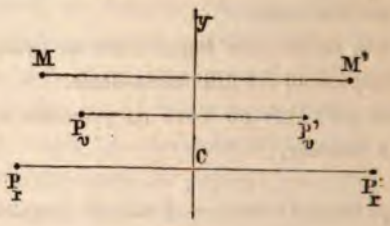


Fig. 84.

les phénomènes optiques du plan sont donc symétriques par r
Cy, et si M' est symétrique de M par rapport à Cy, les couleurs
de M' sont identiques entre elles. En d'autres termes, les lemnis
les hyperboles sont symétriques par rapport à leur axe tra
commun.

Il est clair que dans les cristaux satisfaisant au 1er cas, de
ailléesperpendiculairement à la bissectrice obtuse montreraient
persion horizontale.

Les figures de la planche IV montrent des exemples de dis
horizontale.

3e *Cas. — Dispersion inclinée. — L'axe de symétrie est l'axe d'élasticité.*

Supposons la lame taillée perpendiculairement à l'une quel

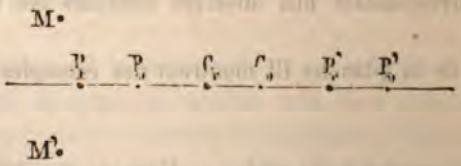


Fig. 85.

des bissectrices. La ligne des pôles des lemniscates coïncide a

an de symétrie du cristal ; elle est donc commune à toutes
. Si P_r, P'_r sont les pôles rouges et C_r la trace de la bissec-
P_v, P'_v sont les pôles violets et C_v la trace de la bissectrice
it est symétrique par rapport à la ligne des pôles, et si M'
port à cette ligne, le symétrique de M, M et M' seront colorés
façon.

res de la planche V montrent des exemples de dispersion

CHAPITRE VII

DES DIVERSES ESPÈCES DE VIBRATIONS LUMINEUSE

Dans les chapitres qui précèdent et qui contiennent l'explica
la plus grande partie des phénomènes optiques utilisés pour
des substances cristallisées, nous n'avons eu besoin que de con
les vibrations lumineuses rectilignes. Dans certains cas, il est co
de considérer d'autres modes vibratoires, et nous allons rappe
les notions les plus indispensables sur les diverses espèces de
tions lumineuses et sur la manière de les composer entre elles.

Vibrations rectilignes. — Composition des vibrations recti
— Une vibration simple rectiligne, s'effectuant suivant OX, pe
représentée par une équation de la forme

$$x = p \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right),$$

dans la quelle p est l'*amplitude*, t est le temps variable, T la durée
vibration complète, et φ un certain angle que l'on appelle l'*ano*
On peut encore représenter la même vibration par l'équation

$$x = p \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right)$$

en posant

$$\varphi = \frac{2\pi r}{\lambda} \quad \text{ou} \quad r = \frac{\lambda}{2\pi}\varphi;$$

λ est la longueur d'onde, r est la *différence de marche;* si l'on su

de propagation égale à 1, on a $T = \lambda$, et r représente aussi le
alué en temps.

ppellerons en outre *direction de la vibration*, celle sur la-
convient de porter les x positifs.

sité lumineuse de la vibration est représentée par la demi-
e moyenne, pendant la durée d'une vibration complète. Comme
e est à chaque instant représentée par $\frac{2\pi}{T} p \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$,
vive est égale, m étant la masse vibrante, à

$$\frac{4\pi^2}{T^2} p^2 \cos^2\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right) = \frac{4\pi^2}{T^2} m p^2 \left[1 + \cos\left(4\pi \frac{t}{T} - 2\varphi\right)\right].$$

leur moyenne du cosinus étant nulle, la force vive moyenne
à $\frac{4\pi^2}{T^2} m.\, p^2$. Le coefficient $\frac{4\pi^2}{T^2} m$ étant le même lorsqu'on com-
es vibrations de même période, on convient de considérer l'in-
d'une vibration lumineuse comme représentée par p^2, c'est-à-
ar le carré de l'amplitude.

nombre quelconque de vibrations simples de même période, diri-
uivant la même droite, équivaut à une certaine vibration simple
la même direction, et dont il est aisé d'obtenir l'équation. Ap-
s p, p', etc., les amplitudes; φ, φ', etc., les anomalies des vibra-
composantes; P et Φ l'amplitude et l'anomalie de la vibration ré-
nte. On doit avoir, quel que soit t:

$$P \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \Phi\right) = p \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) + p' \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi'\right)$$

en développant :

$$P \cos\Phi \sin 2\pi \frac{t}{T} - P \sin\Phi \cos 2\pi \frac{t}{T} =$$

$$= \sin 2\pi \frac{t}{T} (p \cos\varphi + p' \cos\varphi' + \ldots) - \cos 2\pi \frac{t}{T} (p \sin\varphi p' \sin +).$$

'our que cette équation soit vérifiée, quel que soit t, il faut identifier
coefficients de $\sin 2\pi \frac{t}{T}$ dans l'un et l'autre membre, et faire de
ème pour les coefficients de $\cos 2\pi \frac{t}{T}$. On obtient ainsi les deux équa-

tions

$$P \cos \Phi = p \cos \varphi + p' \cos \varphi' + ..$$
$$P \sin \Phi = p \sin \varphi + p' \sin \varphi' + ...$$

On peut traduire géométriquement cette solution. Si l'on r
partir d'un point pris pour origine une ligne polygonale dont le
successifs, de longueurs p, p', etc., font respectivement avec u
rection arbitraire des angles φ, φ', etc.; la droite qui ferme le po
a pour longueur P et la direction de cette droite, qui part d
gine, fait un angle égal à Φ avec la direction arbitraire.

Vibrations elliptiques. — Une vibration rectiligne peut t
être décomposée en deux autres vibrations rectilignes, dirigées
deux droites OX, OY, rectangulaires entre elles, et dans le pla
quelles elle est située. Nous convenons ici, et dans tout ce qui
de prendre pour la partie positive de l'axe OY, la direction q
rencontre en tournant de 90°, à partir de la direction positive O
le sens contraire à celui des aiguilles d'une montre.

La composante de la vibration suivant OX est la vibration qu'
plit suivant OX la projection de la molécule vibrante. Il en est d
pour la composante de la vibration suivant OY.

Si la direction de la vibration dont l'amplitude est m, et l'a
est φ, fait avec OX un angle égal à α compté à partir de la direc
la vibration dans le sens droit, et par conséquent avec OY un
égal à $\frac{\pi}{2} - \alpha$, les deux vibrations composantes ont pour équatio

$$x = m \cos \alpha \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$$
$$y = m \sin \alpha \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \psi\right).$$

Un nombre quelconque de vibrations rectilignes situées dans l
plan peuvent toujours ainsi être ramenées à deux vibrations rec
dirigées suivant deux droites rectangulaires entre elles.

Soient

$$x = p \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right)$$
$$y = q \sin \left(2\pi \frac{t}{T} - \psi\right)$$

tions de ces deux vibrations. Nous pouvons changer l'origine ps et compter ceux-ci à partir du moment où le point vibrant OX passe par l'origine en se dirigeant vers les x positifs. Il suffit la de prendre

$$2\pi \frac{t}{T} = 2\pi \frac{t'}{T} + \varphi,$$

le temps compté à partir de la nouvelle origine. Les équations entes deviennent alors

$$x = p \sin 2\pi \frac{t'}{T}$$

$$y = q \sin \left(2\pi \frac{t'}{T} + \varphi - \psi \right)$$

éliminant le temps t' entre ces deux équations, nous obtiendrons uation entre x et y qui représentera la trajectoire de la molécule par les deux vibrations rectilignes simultanées.

deux équations donnent aisément :

$$\sin 2\pi \frac{t'}{T} = \frac{x}{p},$$

$$\cos 2\pi \frac{t'}{T} = \frac{py - qx \cos(\varphi - \psi)}{pq \sin(\varphi - \psi)}.$$

élevant au carré et ajoutant membre à membre, il vient

$$q^2 x^2 + p^2 y^2 - 2\, pq\, xy \cos(\varphi - \psi) = p^2 q^2 \sin^2(\varphi - \psi).$$

en général l'équation d'une ellipse rapportée à deux diamètres ngulaires.

vibration plane la plus générale qui puisse agiter un point est une vibration elliptique.

rsque $\sin^2(\varphi - \psi) = 0$, c'est-à-dire lorsque $\varphi - \psi = n\pi$, l'équation ellipse se réduit à

$$(qx - py)^2 = 0$$

que n est pair, et à

$$(qx + py)^2 = 0$$

que n est impair. Dans l'un et l'autre cas, la vibration résultante ectiligne.

Deux vibrations rectilignes, rectangulaires entre elles, et dont l malie relative est nulle ou égale à un nombre entier de fois π, éq lent donc à une vibration rectiligne.

La tangente de l'angle que fait la vibration rectiligne résultant la direction positive des x, est égale au rapport de l'amplitude vibration composante suivant OY à l'amplitude de la vibration c sante suivant OX. Si l'on suppose n nul ou pair, la vibration résu est dirigée dans l'angle des axes positifs lorsque les deux ampl sont positives, et dans l'angle adjacent lorsque les deux ampl sont de signe contraire.

Lorsque $\varphi - \psi = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2}$, le terme en xy disparaît, et l'é est rapportée à ses axes. L'équation de l'ellipse prend alors la fo

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1,$$

et les vibrations dirigées suivant OX et OY, que l'on peut appel *vibrations axiales*, ont pour équations

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

$$y = B \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Les amplitudes A et B sont les longueurs des axes de l'ellipse.

L'intensité lumineuse d'une vibration elliptique est la somme intensités lumineuses de chacune des vibrations axiales, elle sera représentée par la somme des carrés des axes.

Distinction entre le sens droit ou gauche d'une vibration tique. — Si l'on regarde le plan de l'ellipse vibratoire sur une d deux faces, on verra la molécule vibrante parcourir cette ellipse un certain sens. Nous appellerons sens *droit* ou *dextrorsum* le des aiguilles d'une montre : *gauche* ou *sinistrorsum* le sens oppos

Si le sens dans lequel la molécule parcourt son ellipse vibratoi droit lorsqu'on regarde une des faces du plan qui la contient, i gauche lorsqu'on regarde l'autre face. Si l'on ne pouvait pas distin entre elles les deux faces du plan de vibration, il n'y aurait don lieu de distinguer l'un de l'autre les deux sens du mouvement molécule. Mais la vibration lumineuse se transmet dans l'espace su

nale à son plan. On peut donc distinguer de la face opposée la l'ellipse que regarde un observateur vers lequel se dirige la ion lumineuse ou, en d'autres termes, qui est tournée vers rayon lumineux. C'est pour cet observateur que le sens du ent de la molécule sur sa trajectoire est droit ou gauche.

quations des vibrations axiales de l'ellipse sont

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = B \cos 2\pi \frac{t}{T},$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} A \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

et B sont de même signe, y et $\frac{dx}{dt}$ sont toujours de même signe ; proquement, si A et B sont de signe contraire, y et $\frac{dx}{dt}$ sont de contraire.

posons que le point vibrant soit en B (fig. 86), à l'extrémité e de l'axe des y, il se dirige extrémité positive A de l'axe et l'ellipse est *dextrogyre*, si $\frac{dx}{dt}$ sitif, c'est-à-dire si *A et B sont me signe*. Le point vibrant se vers l'extrémité négative de les x et l'ellipse est *lévogyre* si négatif, c'est-à-dire si *A et B e signe contraire*.

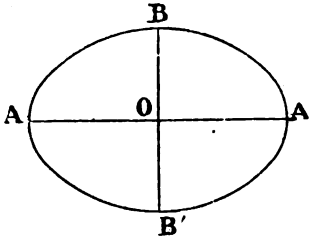


Fig. 86.

e faut pas oublier que cette règle suppose la convention que l'axe equel la projection de la vibration est représentée par un cosinus, irection positive placée de telle sorte qu'on la rencontre après tourné de 90°, *dans le sens sinistrorsum*, à partir de la direction e de l'axe pour lequel la projection de la vibration est représentée n sinus.

simplifiera le langage en convenant d'appeler grandeurs des axes llipse ces grandeurs affectées des signes qu'elles ont dans les ons des composantes.

posons A positif; si l'ellipse est *dextrogyre*, la vitesse est posi- orsque le mobile est en B; si l'ellipse est *sinistrogyre*, la vitesse

est positive lorsque le mobile est en B′. Nous conviendrons de dire dans le premier cas, l'axe des y de l'ellipse a pour direction OB, e dans le second cas cette direction est OB′.

Vibrations circulaires. — Lorsque les axes de l'ellipse vibr deviennent égaux, l'ellipse devient un cercle et les composantes vibration circulaire suivant OX et OY sont

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = r \cos 2\pi \frac{t}{T};$$

r est le rayon de la vibration.

Un point animé d'une vibration circulaire de rayon r décrit un de rayon r, pendant la durée T de la période, dans le sens droit vibration est droite, dans le sens gauche si la vibration est gauche

Une vibration circulaire qui, rapportée aux axes OA et OB (fig. une anomalie nulle et a pour équation

$$x = r \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = r \cos 2\pi \frac{t}{T}$$

est une vibration droite dans laquelle pour $t = 0$ le point vibrant est

Si l'anomalie de cette vibration droite, rapportée aux mêmes est égale à $-\varphi$, la vibration suivant OA ayant alors pour équ $x = r \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right)$, le point vibrant est à l'instant $t = 0$, au poi c'est-à-dire à l'extrémité du rayon OB′ qui fait, avec OB, un a compté dans le sens droit. Si l'on pre deux directions rectangulaires OA′ e telles que le sens A′B′ soit *sinistrors* vibration rapportée aux axes OA′ et OB une anomalie nulle. Nous convien d'appeler *axes d'une vibration circulai* deux droites rectangulaires pour lesqu avec l'origine des temps considérée, malie est nulle.

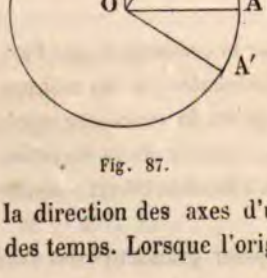


Fig. 87.

Avec cette convention, on peut dir la direction des axes d'une vibration circulaire change avec l'o des temps. Lorsque l'origine des temps est modifiée de manière q

$$\frac{2\pi t}{T} + \varphi = \frac{2\pi t'}{T},$$

c'est-à-dire

$$t' = t + \frac{T}{2\pi}\varphi,$$

les axes de la vibration circulaire droite tournent d'un angle égal à φ dans le sens *sinistrorsum*.

Composition de plusieurs vibrations circulaires simultanées de même sens. — Lorsqu'un point est animé de plusieurs vibrations circulaires simultanées, de même période, de même sens, mais de rayons et d'anomalies différents, les composantes de la vibration résultante suivant OX et OY sont :

$$x = r \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right) + r' \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi'\right) + \cdot$$
$$y = r \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi\right) + r' \cos\left(2\pi \frac{t}{T} - \varphi'\right) + \cdot\cdot$$

La vibration résultante est une vibration circulaire de même période et de même sens, dont le rayon est R et l'anomalie Φ. Si l'on pose, en effet :

$$x = R \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \Phi\right), \qquad y = R \sin\left(2\pi \frac{t}{T} - \Phi\right);$$

l'identification des deux expressions respectives de x et y ne donne que deux équations distinctes, toujours résolubles :

$$R \cos \Phi = r \cos \varphi + r' \cos \varphi' + \cdot\cdot$$
$$R \sin \Phi = r \sin \varphi + r' \sin \varphi' + \cdot\cdot$$

Ces équations montrent que, pour obtenir R et Φ, il faut, à partir d'une origine quelconque, mener une ligne polygonale dont les côtés, de longueurs r, r', etc., font avec une direction arbitraire des angles respectivement égaux à φ, φ', etc. La direction qui, partant de l'origine, ferme le polygone, a pour longueur R et fait avec la direction arbitraire un angle égal à Φ.

Détermination des directions et des grandeurs des axes d'une vibration elliptique. — Reprenons les équations de la vibration elliptique, rapportée à deux diamètres rectangulaires quelconques,

$$x = p \sin 2\pi \frac{t}{T}$$
$$y = q \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi - \psi\right)$$

et cherchons à déterminer la direction et les grandeurs A et B des axes de l'ellipse vibratoire, ainsi que l'anomalie Φ des vibrations axiales.

Appelons OX′, OY′ (fig. 88) les directions positives des axes de l'e

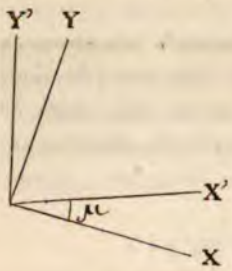


Fig. 88.

μ l'angle de OX′ avec OX, compté à pa OX′ dans le sens droit.

Les formules de transformation des données donnent :

$$x' = x\cos\mu + y\sin\mu$$
$$y' = -x\sin\mu + y\cos\mu.$$

Les équations de la vibration, rapp aux nouveaux axes, sont donc :

$$x' = p\cos\mu\sin 2\pi\frac{t}{T} + q\sin\mu\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi - \psi\right),$$
$$y' = -p\sin\mu\sin 2\pi\frac{t}{T} + q\cos\mu\sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi - \psi\right).$$

Les équations de la vibration elliptique, rapportée à ses axes d'ailleurs :

$$x' = A\sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \Phi\right),$$
$$y' = B\cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \Phi\right).$$

En identifiant, quel que soit t, ces deux systèmes d'équation trouve :

$$A\cos\Phi = p\cos\mu + q\sin\mu\cos(\varphi - \psi)$$
$$-A\sin\Phi = q\sin\mu\sin(\varphi - \psi)$$
$$B\sin\Phi = -p\sin\mu + q\cos\mu\cos(\varphi - \psi)$$
$$B\cos\Phi = q\cos\mu\sin(\varphi - \psi).$$

En multipliant membre à membre la 1re et la 3e, on obtient :

$$AB\sin\Phi\cos\Phi = pq\cos 2\mu\cos(\varphi - \psi) - \frac{1}{2}p^2\sin 2\mu + \frac{1}{2}q^2\sin 2\mu\cos^2(\varphi$$

En multipliant membre à membre la 2e et la 4e, on obtient :

$$-AB\sin\Phi\cos\Phi = \frac{1}{2}q^2\sin 2\mu\sin^2(\varphi - \psi)$$

d'où l'on conclut :

$$2pq\cos 2\mu\cos(\varphi - \psi) - (p^2 - q^2)\sin 2\mu = 0$$

$$\operatorname{tg} 2\mu = \frac{2pq}{p^2 - q^2} \cos(\varphi - \psi).$$

ut mettre cette expression sous une autre forme, en remarquant 'on représente l'intensité $p^2 + q^2$ de la vibration par 1, on peut

$$p = \cos u \qquad q = \sin u;$$

alors

$$\operatorname{tg} 2\mu = \operatorname{tg} 2u \cos(\varphi - \psi).$$

trouver les valeurs de A et B, nous pouvons additionner membre pre la 1re et la 4e équation d'abord, ce qui donne :

$$(A + B) \cos \Phi = p \cos \mu + q \sin(\mu + \varphi - \psi)$$

ancher ensuite la 2e de la 3e, ce qui donne :

$$(A + B) \sin \Phi = -p \sin \mu + q \cos(\mu + \varphi - \psi)$$

en déduit sans peine :

$$(A + B)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \sin(\varphi - \psi)$$

n se servant encore de l'angle auxiliaire u,

$$(A + B)^2 = 1 + \sin 2u \sin(\varphi - \psi).$$

obtiendrait de même $(A - B)^2$; mais on peut le déduire immé- ment de $(A + B)^2$, en remarquant que l'intensité vibratoire restant ême, on doit avoir $A^2 + B^2 = p^2 + q^2$, ou $(A + B)^2 + (A - B)^2$ $(p^2 + q^2)$.

n en conclut :

$$(A - B)^2 = p^2 + q^2 - 2pq \sin(\varphi - \psi).$$

$$(A - B)^2 = 1 - \sin 2u \sin(\varphi - \psi).$$

écomposition d'une vibration elliptique en deux vibrations ulaires inverses. — Considérons une vibration elliptique dont les ations axiales sont :

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = B \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

ous pouvons considérer la vibration suivant l'axe des x comme nposée des deux vibrations

$$x' = \frac{A + B}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad x'' = \frac{A - B}{2} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

et la vibration suivant l'axe des y comme résultant des deux vibrat
composantes

$$y' = \frac{A+B}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y'' = -\frac{A-B}{2} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Or x' et y' sont les deux composantes d'une vibration circulaire
trogyre de rayon $\frac{A+B}{2}$, et x'', y'' les deux composantes d'une vibr
circulaire *sinistrogyre* de rayon $\frac{A-B}{2}$. D'où ce théorème : une vibr
elliptique peut être considérée comme composée de deux vibration
culaires de sens inverse, qui, rapportées aux axes de l'ellipse,
même anomalie que celle-ci. Le rayon de la vibration circulaire
est égal à la demi-somme algébrique des axes de l'ellipse; celui
vibration circulaire gauche est égal à la demi-différence algébriqu
mêmes axes.

Nous avons vu, dans le paragraphe précédent, que si OX et OY
les directions de deux vibrations rectangulaires, dont les amplitude
$\sin u$ et $\cos u$, dont l'anomalie relative de OY par rapport à OX est ψ
et qui équivalent à une vibration elliptique dont les axes sont
OY', on a

$$\operatorname{tg} 2\mu = \operatorname{tg} 2u \cos(\varphi - \psi)$$

μ étant l'angle, compté dans le sens droit à partir de OX', qu
OX' avec OX.

Si l'on pose $\frac{A+B}{2} = r$, $\frac{A-B}{2} = r_1$, r et r_1 étant les rayons des
vibrations circulaires inverses dont la vibration elliptique est la r
tante, nous aurons

$$\cos 2\mu = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2u \cos^2(\varphi - \psi)}} = \frac{\cos 2u}{\sqrt{1 - \sin^2 2u \sin^2(\varphi - \psi)}} = \frac{\cos 2}{4rr}$$

On trouverait de même

$$\sin 2\mu = \frac{\sin 2u}{4rr_1} \cos(\varphi - \psi).$$

Décomposition d'une vibration rectiligne en deux vibrat circulaires inverses. — Une vibration rectiligne peut être consid comme une vibration elliptique dont l'un des axes, B par exemple égal à zéro. On déduit immédiatement de ce qui précède qu'une vi

gne, dont l'amplitude est A, peut être décomposée en deux circulaires de sens contraire, ayant $\frac{A}{2}$ pour rayon commun.

ces vibrations circulaires, entendus comme nous en sommes plus haut, sont : la direction de la vibration rectiligne pour , et les deux directions d'une perpendiculaire à cette vibra- es axes des y.

antes rectilignes de deux vibrations circulaires in- Considérons deux vibrations circulaires de sens inverse, te, de rayon r, dont les axes OY (fig. 89) ; l'autre gauche, de et dont les axes sont OX'_1 et faisant avec OX, un angle χ, partir de OX, c'est-à-dire de l'axe la vibration droite, dans le sens m, et cherchons quelle est la te de ces deux vibrations sui- direction OA, faisant avec OX un al à β compté à partir de OX sens droit. On voit facilement e composante est égale à

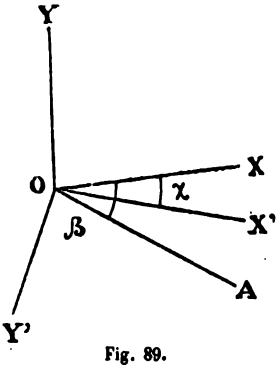


Fig. 89.

$$+ r' \cos(\beta - \chi) \Big] \sin 2\pi \frac{t}{T} + \Big[- r \sin\beta + r' \sin(\beta - \chi) \Big] \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

nsité I de cette composante est

$$I = r^2 + r'^2 + 2rr' \cos(2\beta - \chi).$$

tion elliptique produite par une lame cristalline surmon- polariseur rectiligne. — Soit une lame cristalline dont les principales sont Oo et Oe (fig. 90), surmontant un polariseur vibration, dirigée suivant OL, fait un angle α avec Oo et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ce qui suppose l'angle α compté à partir de OL dans le sens sum. Après la traversée de la lame, la vibration rectiligne du eur devient elliptique, et les deux composantes de la vibration prenant Oo comme axe des x, Oe comme axe des y,

$$x = \cos\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{o}{\lambda}\right)$$

$$y = \sin\alpha \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{e}{\lambda}\right).$$

Pour appliquer ici les équations générales établies plus haut, dra changer u en α, et $\psi - \varphi$ en $2\pi \frac{o-e}{\lambda}$. Nous aurons ainsi l'angle μ que fait avec Oo l'axe A de la vibration elliptique,

$$\operatorname{tg} 2\mu = \operatorname{tg} 2\alpha \cos 2\pi \frac{o-e}{\lambda}.$$

L'angle μ est compté à partir de Oo dans le sens sinistrorsum

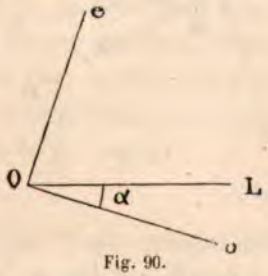


Fig. 90.

Quant aux axes A et B de l'ellip sont donnés par les équations

$$(A+B)^2 = 1 + \sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}$$

$$(A-B)^2 = 1 - \sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}$$

Cette vibration elliptique se décom en deux vibrations circulaires inverses, l'une droite dont le ray $\frac{A+B}{2}$, l'autre gauche, dont le rayon est $\frac{A-B}{2}$.

La vibration elliptique est dextrorsum si A et B sont de même c'est-à-dire, si $(A+B)^2$ est plus grand que $(A-B)^2$, ou, en d' termes, si le rayon de la vibration circulaire dextrorsum est grand que celui de la vibration circulaire sinistrorsum, et in ment.

Pour que la vibration elliptique soit dextrorsum, il faut et il que $\sin 2\alpha$ et $\sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}$ soient de même signe. Supposons q vibration Oo soit la plus lente à se propager dans la lame, c'est-à-di $o-e$ soit positif, et admettons en outre $\frac{o-e}{\lambda} < \frac{1}{2}$, ou $\sin 2\pi$ positif et $\alpha < 90°$. L'ellipse est dextrorsum si α est positif, sini

le cas contraire. On peut énoncer cette règle en disant que, retard de la lame est égal à un nombre entier de longde augmenté d'une quantité plus petite qu'une demi-longde, le sens du mouvement vibratoire elliptique est celui du e l'on parcourt en allant de la vibration du polariseur à celle vibrations, transmises par la lame, qui est *la plus lente* à se On sous-entend que l'on considère, parmi les directions des tions, celles qui font entre elles un angle aigu.

urs de $(A+B)^2$ et $(A-B)^2$ on déduit aisément celles de A^2 sont :

$$2A^2 = 1 + \sqrt{1 - \sin^2 2u \sin^2(\varphi - \psi)}$$
$$2B^2 = 1 - \sqrt{1 - \sin^2 2u \sin^2(\varphi - \psi)}.$$

leur de tg 2μ on déduit les valeurs de sin 2μ et cos 2μ, qui

$$\sin 2\mu = \frac{\sin 2u \cos(\varphi - \psi)}{\sqrt{1 - \sin^2 2u \sin^2(\varphi - \psi)}}$$

$$\cos 2\mu = \frac{\cos 2u}{\sqrt{1 - \sin^2 2u \sin^2(\varphi - \psi)}}$$

ction de A^2 et de B^2, ces expressions prennent les formes :

$$\sin 2\mu = \frac{\sin 2u}{A^2 - B^2} \cos(\varphi - \psi)$$

$$\cos 2\mu = \frac{\cos 2u}{A^2 - B^2}.$$

équations que donnent A, B, ψ, on déduit aisément :

$$\operatorname{tg} \Phi = -\frac{\sin u \sin \mu \sin(\varphi - \psi)}{\cos u \cos \mu + \sin u \sin \mu \cos(\varphi - \psi)}$$

ut multiplier haut et bas par sin μ, remplacer $\sin^2 \mu$ et sin 2μ s valeurs en fonction de A^2 et B^2, et on obtient

$$\operatorname{tg} \Phi = -\operatorname{tg}(\varphi - \psi) \frac{A^2 - \cos^2 u}{A^2}.$$

Cas où la lame cristalline est très mince. — line est extrêmement mince, de telle sorte qu'on cube de $2\pi\frac{o-e}{\lambda}$, les expressions de A, B, ψ et μ s

On a

$$A^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2\sin^2 2\alpha}=1-\frac{\pi^2}{\lambda^2}$$

$$B^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{4\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2\sin^2 2\alpha}=\frac{\pi^2}{\lambda^2}(o-$$

d'où l'on tire

$$A=1-\frac{1}{2}\frac{\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2\sin^2 2\alpha$$

$$B=\frac{\pi}{\lambda}(o-e)\sin 2\alpha$$

Quant à μ, on a

$$\operatorname{tg} 2\mu=\operatorname{tg} 2\alpha\left[1-\frac{2\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2\right]$$

d'où l'on tire

$$\operatorname{tg} 2\alpha-\operatorname{tg} 2\mu=\frac{2(\alpha-\mu)}{\cos^2 2\alpha}=\frac{2\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2$$

Si l'on pose $\alpha-\mu=\omega$, ω est l'angle dont le gra tion elliptique a tourné en traversant la lame, et l'

$$\omega=\frac{\pi^2}{\lambda^2}(o-e)^2\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{2\pi}{\lambda}(o-e)$$

Si l'on compte l'origine du temps un instant o la vibration tombe sur la lame, la phase Φ acqu elliptique est donnée par l'équation

$$\operatorname{tg}\Phi=-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{\lambda}(o-e)\frac{A^2-\cos^2\alpha}{A^2}$$

ou

$$\Phi=-2\pi\frac{(o-e)}{\lambda}\sin^2\alpha.$$

Si l'on compte l'origine du temps à partir de l'i

lente vient rencontrer la lame, la nouvelle anomalie sera

et si l'on appelle la phase correspondant à l'anomalie

on aura

$$\varphi = o - (o - e)\sin^2\alpha = o\cos^2\alpha + e\sin^2\alpha.$$

ction d'une vibration circulaire au moyen d'une lame onde. — Si l'on a

$$\frac{o - e}{\lambda} = \frac{1}{4},$$

$$A - B = 0 \quad \text{lorsque} \quad \alpha = +45^\circ,$$

$$A + B = 0 \quad \text{lorsque} \quad \alpha = -45^\circ.$$

ame cristalline, que l'on dit alors *quart d'onde*, donne ainsi ce, dans ces conditions, à une vibration circulaire, droite dans ier cas, gauche dans le second.

eut donc avec une lame quart d'onde produire une vibration re.

rend ordinairement des lames de gypse ou de mica biaxe qui se rès aisément en lames très minces ; les lames de mica sont pré- parce qu'elles sont moins fragiles. L'épaisseur d'une lame de ui produit un retard égal à $\frac{\lambda}{4}$, lorsque λ correspond au jaune , est d'environ $0^{mm},032$. Mais on ne mesure pas ordinaire- cette épaisseur ; on préfère choisir parmi de nombreuses lames age celles qui donnent entre les nicols croisés et dans la lumière e la couleur correspondant à $\frac{\lambda}{4} = 0^{mm},137$, c'est-à-dire un gris On s'assure en outre que deux de ces lamelles, superposées paral- nt, donnent la couleur correspondant à $\frac{\lambda}{2}$, ou un jaune paille. ut enfin s'assurer rigoureusement, au moyen du compensateur page 180, si le retard d'une lame correspond bien à $\frac{\lambda}{4}$.

mica blanc biaxe est négatif, et les lames de clivage sont perpen- ires à la bissectrice aiguë. La ligne des pôles des lemniscates,

qu'on appelle souvent l'axe du mica, correspond d
l'axe c et, par conséquent, à la vibration la plus le
l'on considère la direction de la vibration du polari
du mica qui fait avec elle une angle de 45°, le
circulaire est celui du chemin qu'on fait en allant d
lariseur à l'axe du mica.

Transformation d'une vibration elliptique ou tiligne au moyen d'une lame quart d'onde. — les d'un rayon elliptique ayant pour équations

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = B \cos 2\pi \frac{t}{T} = B \sin \left(\right.$$

diffèrent l'une de l'autre par une anomalie égale à

vaut, par un retard égal à $\frac{\lambda}{4}$.

Si donc on fait en sorte que l'une des vibrations de $\pm\frac{\lambda}{4}$, les deux vibrations deviendront concordan retard l'une par rapport à l'autre que de $\frac{\lambda}{2}$. Dans ces deux vibrations perpendiculaires pourront être r composantes d'une v La vibration elliptiq transformée en une v

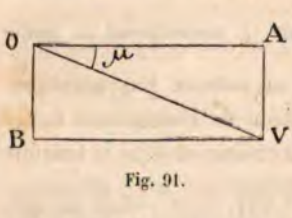


Fig. 91.

Il suffit, pour pro placer sur le passag elliptique, une lame l'une des sections avec l'un des axes de l'ellipse. Admettons q d'onde soit une lame de mica et que l'axe de l lèle à l'axe A de l'ellipse supposée dextrorsum (fig suivant le petit axe subira un accroissement égal à $\frac{\pi}{2}$ des vibrations axiales deviendront

$$x = A \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = -B \sin 2\pi$$

ivaudront à la vibration rectiligne OV, qui fait avec OA un
lonné par la relation

$$\operatorname{tg}\mu = -\frac{B}{A}.$$

e μ est compté à partir de OV ; dans le sens direct lorsque tg μ
if ; dans le sens gauche lorsque tg μ est négatif.

seurs et analyseurs circulaires. — La combinaison d'une
rt d'onde superposée à un polariseur rectiligne, de manière que
ons principales de la lame soient à 45° de la vibration du po-
est ce qu'on appelle un *polariseur circulaire*. Un semblable
ne laisse en effet émerger de la lame que des vibrations cir-
.

lariseur circulaire pourra être droit ou gauche suivant que les
ns circulaires auxquelles il donne naissance sont droites ou
. Si A est l'amplitude de la vibration rectiligne incidente, le
e la vibration circulaire émergente est $\frac{A}{\sqrt{2}}$.

n retourne un polariseur circulaire de manière que la lumière
r la lame et sorte par le polariseur (qui devient un analyseur),
analyseur circulaire, qui ne se laisse traverser que par des vi-
circulaires d'un sens déterminé. Cela résulte évidemment de
sibilité du rayon lumineux dont l'intensité est la même à l'é-
ce et à l'incidence. Il faut remarquer que la vibration circulaire
de l'appareil lorsqu'il fait fonction de polariseur, tourne à la
n d'*aval* du rayon une certaine face ; et lorsque l'appareil fait
d'analyseur, c'est la face opposée de la vibration qui est tour-
l'aval du rayon. Comme le sens de la vibration change suivant
s deux faces de la vibration qui est tournée vers l'aval du rayon,
ulte que le même appareil qui, comme polariseur, produit des
circulaires droits, ne laisse passer, comme analyseur, que des
circulaires gauches. En d'autres termes, en retournant un pola-
circulaire *droit*, on obtient un analyseur circulaire *gauche*, et
quement.

uperposant deux appareils identiques, l'un servant de polariseur,
d'analyseur circulaires, on produit l'obscurité[1].

st ainsi que si l'on a deux écrous identiques, et si on les superpose, en re-
l'un d'eux sens dessus-dessous, une vis, qui tourne dans le premier, est arrêtée
econd.

Si R est le rayon de la vibration circulaire transmise par
lyseur circulaire, l'amplitude de la vibration rectiligne é
est $R\sqrt{2}$.

Pour la production de ce phénomène, comme pour celle d
phénomènes dans lesquels interviennent les polariseurs ou l
seurs circulaires, on peut donner à ces appareils des azimu
conques sans que les phénomènes soient modifiés, puisque l
tions circulaires ont toujours les mêmes équations, quels que
deux diamètres rectangulaires auxquels on les rapporte, po
l'on change convenablement l'origine des temps.

**Lame cristallisée, placée entre un polariseur rectilig
analyseur circulaire, ou entre un polariseur circulair
analyseur rectiligne, et examinée dans la lumière para**

Plaçons une lame cristalline entre un polariseur rectiligne et
lyseur circulaire. Le polariseur et la lame laissent passer une
elliptique équivalant, comme on l'a vu plus haut, à deux vibra
culaires, l'une droite, dont le rayon est $\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin 2\alpha \sin}$
et l'autre gauche, dont le rayon est $\frac{1}{2}\sqrt{1-\sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{o-}{\lambda}}$
l'angle compris entre la vibration du polariseur et la sectio
pale de la lame correspondant à la vibration de vitesse $\frac{1}{o}$.
étant compté dans le sens droit à partir de la vibration du p
L'analyseur circulaire arrête l'une de ces vibrations et lais
l'autre. Si l'analyseur est droit, l'intensité de la vibration
émergente est $\frac{1}{2}\left(1+\sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}\right)$; s'il est gauche, c
sité est $\frac{1}{2}\left(1-\sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}\right)$.

Si l'on suppose $\alpha=45°$, ces intensités deviennent $\frac{1}{2}\left(1+\sin 2\pi\right.$
$\frac{1}{2}\left(1-\sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}\right)$ ou $\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\pi \frac{o-e}{\lambda}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\pi \frac{o-}{\lambda}\right.$
la lumière blanche, la teinte est donc celle que l'on obtiendrai
lame cristalline dont le retard serait celui de la lame empl

$\frac{\lambda}{4}$, et qui serait placée, entre deux nicols croisés pour le pre-
, entre deux nicols parallèles pour le second.
ne α n'est pas égal à 45°, les teintes sont les mêmes, mais plus
s lavées de blanc.
ame est placée entre un polariseur circulaire et un analyseur
e. les phénomènes sont évidemment de la même nature. Appe-
effet β l'angle compris entre la vibration de l'analyseur et la
principale Oo, angle compté à partir de la vibration de l'analy-
ns le sens *sinistrorsum*. L'analyseur rectiligne combiné avec la
istalline ne laisse passer que deux vibrations circulaires, l'une
dont le rayon est $\frac{1}{2}\sqrt{1 + \sin 2\beta \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}}$, et l'autre *droite*
rayon est $\frac{1}{2}\sqrt{1 - \sin 2\beta \sin 2\pi \frac{o-e}{\lambda}}$. Suivant que le polari-
rculaire est droit ou gauche, c'est l'une ou l'autre de ces vibra-
qui est transmise.

ne cristalline uniaxe examinée en lumière convergente un polariseur rectiligne et un analyseur circulaire. — Dans
roscope à lumière convergente, sur le porte-objet duquel nous
sons placée une lame taillée perpendiculairement à l'axe d'un
l uniaxe, substituons à l'analyseur rectiligne un analyseur cir-
e. Nous pouvons admettre, si nous ne considérons pas des rayons
nclinés sur l'axe de l'appareil, que la lame de mica reste sensi-
ent quart d'onde pour tous les rayons, et que les vibrations trans-
suivant toutes les inclinaisons sont circulaires. Au moins cette
hèse approchera suffisamment de la vérité pour permettre de
rendre compte de l'aspect général du phénomène.
t OP (fig. 92) la vibration du polariseur et OA celle de la vibration
icol de l'analyseur que nous supposons à 90° de la précédente;
lyseur circulaire sera droit si l'axe du mica quart d'onde Op bis-
e l'angle POA, Op étant à droite de OA.
nsidérons le rayon qui, partant du point situé sur la face infé-
e de cette lame à l'aplomb de O vient rencontrer la face
rieure au point M. La vibration ordinaire est dirigée perpendi-
irement à OM, et la vibration extraordinaire située dans le
OM pourra sensiblement, si l'inclinaison du rayon est supposée
considérable, être regardée comme coïncidant avec OM, dont la di-

rection fait avec OP un angle α, compté à partir de
droit. Si δ est le retard de la vibration extraordinaire
vibration ordinaire, δ est positif si la lame est positiv
est négative. Nous supposerons δ positif pour fixer les

La combinaison du polariseur et de la lame laisse
brations circulaires, l'une droite dont l'intensité I est

$$I = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sin 2\alpha \sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$$

qui est seule transmise intégralement par l'analyseur
de la vibration émergeant en M est donc égale à I.

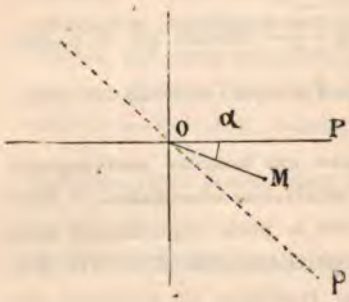


Fig. 92.

Fi

Parmi les quatre quadrants formés par les droites O
1 et 3 (fig. 93) ceux qui contiennent l'axe du mica qua
les deux autres. Dans les quadrants impairs sin 2α
négatif dans les quadrants pairs.

Pour $\sin 2\alpha = 0$, ou $\alpha = n\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire suivant l
OP et OA, I est constant et égal à $\frac{1}{2}$ pour toutes les cou
donc une sorte de croix grise dont ces droites seront

Suivant toutes les autres directions, I varie pour
$\sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$, c'est-à-dire avec la distance du point M au cen

Dans les quadrants impairs où $\sin 2\alpha$ est positif, le mi

ne α, est donné par $\sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = -1$ ou $\frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2n+3)\frac{\pi}{2}$. Comme
de cercle décrits du point O comme centre sont des courbes
etard, les courbes d'intensité minima, dont les quadrants im-
nt des arcs de cercle correspondant aux retards successifs :

$$\delta = \frac{3\lambda}{4}, \quad \left(2 + \frac{3}{4}\right)\lambda, \text{etc.}$$

les quadrants pairs, où $\sin 2\alpha$ est négatif, les minima de I sont
par $\sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 1$ ou $2\pi \frac{\delta}{} = (2n+1)\lambda$. Les courbes d'intensité
a sont donc des arcs de cercle correspondant aux retards suc-
:

$$\delta = \frac{\lambda}{4}, \quad \left(2 + \frac{1}{4}\right)\lambda, \text{etc.}$$

t le premier est plus près du centre que le premier des arcs mi-
dans les quadrants impairs.

r un même δ, c'est-à-dire pour tous les points d'un même cercle
O pour centre, l'intensité minima est donnée par $\sin 2\alpha = -1$
ue $\sin 2\pi \frac{\delta}{\lambda}$ est positif, comme cela a lieu pour les arcs de cercle
na dans les quadrants pairs; et par $\sin 2\alpha = +1$ lorsque
$\pi \frac{\delta}{\lambda}$ est négatif, comme cela a lieu pour les arcs de cercle minima
les quadrants impairs. Les parties les plus sombres de ces arcs
rcle sont donc situées sur les deux bissectrices des angles formés
es lignes OP et OA.

s arcs de cercle minima les plus rapprochés du centre et qui se
ent dans les secteurs pairs sont par cette raison les plus sombres
s plus apparents. Ils forment comme deux taches, noires avec la lu-
e monochromatique, colorées avec de la lumière blanche. Les
es les plus apparentes de ces taches sont, dans le cas que nous
s spécifié, d'une lame cristalline positive, située sur une droite
endiculaire à l'axe du mica quart d'onde, ou, comme moyen mné-
ique, faisant avec cet axe le signe +.

la lame cristalline est négative, δ change de signe, et il est aisé

de voir que la ligne des taches est parallèle à l'axe du
celui-ci le signe —.

On trouve là un moyen très simple et très employé
signe d'une lame uniaxe perpendiculaire à l'axe. On
nicol analyseur et la lame cristalline, une lame quart d
est à 45° de la vibration du nicol et qui transforme l'a
lyseur circulaire, puis on examine la direction de la l
les taches qui apparaissent. Si cette ligne fait avec l'
signe +, la lame est positive; si elle fait le signe
négative.

**Lame cristalline placée entre un polariseur et
circulaires.** — Supposons maintenant une lame c
entre un polariseur et un analyseur circulaires. Nous
fixer les idées, que le polariseur circulaire est droit,
culaire qui en émerge a pour équations :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \frac{t}{T}, \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Nous pouvons supposer que les axes x et y coïncid
tions principales de la lame, et les composantes de l
tique qui émerge de cette lame sont :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\pi \frac{t}{T},$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\left[2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{\delta}{\lambda}\right)\right.$$

Les formules précédentes montrent que les rayons
tions circulaires qui équivalent à cette vibration ellip
la vibration droite :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 + \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \pi \frac{\delta}{\lambda},$$

et pour la vibration gauche :

$$\frac{1}{2}\sqrt{1 - \cos 2\pi \frac{\delta}{\lambda}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \pi \frac{\delta}{\lambda}.$$

Si l'analyseur circulaire est droit, c'est la vibrati
seule transmise, et l'intensité de la vibration rectilig

$\cos^2 \pi \frac{\lambda}{\delta}$. En lumière blanche, la teinte sera celle que donnerait la

ntre deux nicols parallèles.

analyseur circulaire est gauche, l'intensité de la vibration recti-

émergente est égale à $\sin^2 \pi \frac{\delta}{\lambda}$; et, dans la lumière blanche, la

est celle que l'on obtiendrait avec la lame cristalline placée entre

icols croisés à angle droit.

phénomènes ne seront pas modifiés, quels que soient les azimuts

s que l'on donne au polariseur, à l'analyseur ou à la lame.

a lame cristalline était examinée en lumière convergente, on ver-

es mêmes courbes d'égal retard que celles qu'on observe entre

nicols croisés ou parallèles; mais les courbes obscures, croix

s ou hyperboles, seraient supprimées. Lorsque l'analyseur et le

iseur sont de même sens, le centre des cercles est blanc; lors-

s sont de sens contraire, le centre est noir.

CHAPITRE VIII

PHÉNOMÈNES PRODUITS PAR LA SUPE
DE LAMES MINCES CRISTALLIN

I. — MODIFICATIONS SUBIES PAR UNE VIBRATION ELLI
UNE LAME CRISTALLINE TRÈS MINCE.

Dans un très grand nombre de recherches cristal
fort important de pouvoir calculer les phénomènes
tion qui prennent naissance lorsqu'on superpose des
extrêmement minces. Ces phénomènes sont, comme
réalisés très fréquemment dans la nature; ils peuve
lement par la superposition de lamelles minces de
consacrerons ce chapitre à les étudier.

Les équations fondamentales, desquelles nous d
théorie que nous avons en vue, seront obtenues en
difications que la traversée d'une lame cristalline e
fait subir à une vibration elliptique.

Soient OX (fig. 94), OY, les directions des axes de
dente, dont les grandeurs sont respectivement p et q
directions des sections principales de la lame, dont
tite est ε. Nous appellerons δ le retard, qu'après la tr
de même matière et d'une épaisseur égale à l'unité,
suivant Oo éprouverait par rapport à la vibration
Nous appellerons, comme d'ordinaire, o et e les temps
dirigées respectivement suivant Oo et Oe, mettent à

Après la traversée de la lame, les projections de l

ons principales Oo et Oe, sont :

$$x' = p\cos\gamma \sin 2\pi \frac{t'}{T} - q\sin\gamma\cos 2\pi\frac{t'}{T},$$

$$y' = p\sin\gamma\sin 2\pi\frac{t'+\varepsilon\delta}{T} + q\cos\gamma\cos 2\pi\frac{t'+\varepsilon\delta}{T},$$

a préalablement changé l'origine des temps, et pris cette ori-
retard de o sur l'origine première.
qu'on néglige les quantités du 2e ordre de grandeur en ε, y' peut
e :

$$y' = p\sin\gamma\sin 2\pi\frac{t'}{T} + \left(\frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda}\cdot p\sin\gamma + q\cos\gamma\right)\cos 2\pi\frac{t'}{T}.$$

jetons les vibrations x' et y' sur les axes X_1 et Y_1 de la nouvelle

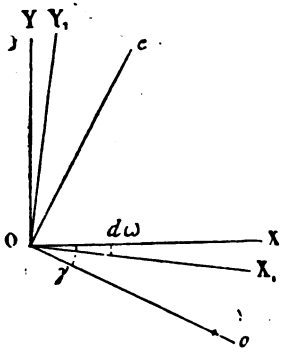


Fig. 94.

se, dont l'axe X_1 fait avec X un angle très petit $d\omega$, nous aurons :

$$x_1 = x'\cos(\gamma - d\omega) + y'\sin(\gamma - d\omega),$$

$$y_1 = y'\cos(\gamma - d\omega) - x'\sin(\gamma - d\omega),$$

reviennent, en supprimant toujours les termes du 2e ordre, à
es-ci :

$$x_1 = \sin 2\pi\frac{t'}{T}\left(p - \frac{\pi\varepsilon\delta}{\delta}q\sin 2\gamma\right) + \cos 2\pi\frac{t'}{T}\left(\frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda}p\sin^2\gamma - qd\omega\right).$$

$$y_1 = \sin 2\pi\frac{t'}{T}\left(-\frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda}q\cos^2\gamma + pd\omega\right) + \cos 2\pi\frac{t'}{T}\left(q + \frac{\pi\varepsilon\delta}{\lambda}p\sin 2\gamma\right).$$

Il est aisé de voir qu'on peut encore mettre ces é
forme

$$x_1 = \left(p - \frac{\pi\varepsilon\delta}{\lambda} q \sin 2\gamma\right) \sin\left(2\pi\frac{t'}{T} + \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda} \sin^2\gamma -$$

$$y_1 = \left(q + \frac{\pi\varepsilon\delta}{\lambda} p \sin 2\gamma\right) \cos\left(2\pi\frac{t'}{T} + \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda} \cos^2\gamma -$$

car on n'introduit ainsi que des termes du 2e ordre de

Pour que ces deux équations représentent une ellip
faut et il suffit que l'anomalie soit la même, et qu'on

$$d\varphi' = \frac{q}{p} d\omega - \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda} \sin^2\gamma = \frac{p}{q} d\omega - \frac{2\pi\varepsilon\delta}{\lambda} \cos$$

On tire de là

$$d\omega \frac{p^2 - q^2}{pq} = \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \cos 2\gamma.$$

Si nous posons, suivant un mode de transformation
déjà plusieurs fois employé,

$$p = \cos u, \qquad q = \sin u.$$

nous aurons,

$$d\omega = \frac{1}{2} \operatorname{tg} 2u . \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \cos 2\gamma,$$

$$d\varphi' = \frac{\sin^2 u}{2 \cos 2u} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \cos 2\gamma - \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \sin^2\gamma$$

Mais, si nous supposons que l'origine des temps
celle de la vibration incidente, il faudra augmenter d
égale à $\frac{2\pi}{\lambda} o$, et l'on aura, en remarquant que $\varepsilon\delta =$

$$d\varphi = \frac{\sin^2 u}{2 \cos 2u} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \cos 2\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} (o \cos^2\gamma + e$$

Quant aux variations de grandeur des axes de l'elli

$$d \cos u = -\frac{\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \sin 2\gamma \sin u,$$

$$d \sin u = +\frac{\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \sin 2\gamma \cos u,$$

d'où l'on tire

$$du = \frac{\pi}{\lambda} \varepsilon\delta \sin 2\gamma.$$

tités $d\omega$, du, $d\varphi$, ne sont exactes qu'au premier ordre de
ɔrès. Lorsque u est très petit, et est lui-même du premier
grandeur, $d\omega$ est du 2e ordre, et il devient nécessaire d'en
xpression au 2e ordre près.

ons donc nous proposer de trouver du, $d\omega$, $d\varphi$, au second
grandeur près, lorsqu'on suppose que u est du premier

soudre ce problème d'une manière simple, nous remarque-
l'une quelconque de ces quantités, $d\omega$ par exemple, étant
e comme fonction de u, peut être mise sous la forme

$$d\omega = A + Bu + Cu^2 + \ldots.$$

ressions que nous avons obtenues représentent cette fonction
re de grandeur près, lorsque u est fini; on a donc A,B,C avec
roximation. Si nous voulons avoir $d\omega$ au 2e ordre près, u étant
dre, on peut négliger les termes contenant une puissance de u
e à la 2e; il est inutile de connaître B ou C avec une approxi-
upérieure au 1er ordre, car les termes du 2e ordre dans B,
s par u, donnent des termes du 3e ordre. Il ne nous reste donc
à connaître A au 2e ordre près. Pour trouver l'expression de A,
ıvons faire $u = 0$, ce qui revient à supposer que la vibration est
e. Le problème est donc ramené à chercher, au 2e ordre de
r près, l'expression des paramètres de l'ellipse vibratoire émer-
une lame cristalline très mince sur laquelle tombe une vibra-
iligne.

oblème a été résolu dans le chapitre précédent, et nous avons
dans ce cas :

$$d\varphi = o\cos^2\gamma + e\sin^2\gamma,$$

$$du = \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon\delta\sin 2\gamma,$$

$$d\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{du}{2}\varepsilon\delta\cos 2\gamma,$$

xpressions trouvées plus haut pour du, $d\omega$, $d\varphi$, dans l'hypothèse
ıi, lorsqu'on y suppose u petit, et qu'on y néglige les termes du

3e ordre, ce qui permet de supprimer le terme d'assimiler $tg2u$ à $2u$, deviennent

$$d\varphi = o\cos^2\gamma + e\sin^2\gamma,$$

$$du = \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon\delta\sin 2\gamma,$$

$$d\omega = \frac{2\pi}{\lambda}u\varepsilon\delta\cos 2\gamma.$$

En comparant entre eux ces deux groupes d'expre rons enfin les valeurs suivantes de $d\varphi$, du, $d\omega$, exact

$$d\varphi = o\cos^2\gamma + e\sin^2\gamma,$$

$$du = \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon\delta\sin 2\gamma,$$

$$d\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\left(u + \frac{du}{2}\right)\varepsilon\delta\cos 2\gamma.$$

On peut mettre sous une autre forme l'expressio pelle n l'indice de réfraction correspondant à la vi qui correspond à la vibration Oe, δ est alors l'ex mier indice sur le second, et l'on a :

(1) $$d\varphi = \varepsilon\frac{n+n'}{2} + \frac{1}{2}\varepsilon\delta\cos 2\gamma.$$

(2) $$du = \frac{\pi}{\lambda}\varepsilon\delta\sin 2\gamma,$$

(3) $$d\omega = \frac{2\pi}{\lambda}\left(u + \frac{du}{2}\right)\varepsilon\delta\cos 2\gamma.$$

Les équations (1), (2) et (3) résolvent complèt que nous nous étions posé.

II. — VIBRATIONS TRAVERSANT UN PAQUET TRÈS MINCE DE

Formules générales. — Si nous supposons que la traverse successivement un nombre plus ou moins g tallines superposées, les équations précédentes pou connaître les modifications totales que la traversée

à la vibration; à la condition toutefois que l'épaisseur des leur nombre laissent très petites les variations $d\varphi$, du, $d\omega$. pelons $d\Phi$, dU, $d\Omega$, ce que deviennent ces variations après la du paquet de lames, nous aurons évidemment

$$d\Phi = \Sigma\varepsilon\,\frac{n+n'}{2} + \frac{1}{2}\,\Sigma\,\varepsilon\delta\cos 2\gamma,$$

$$dU = \frac{\pi}{\lambda}\,\Sigma\,\varepsilon\delta\sin 2\gamma,$$

$$d\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}\,\Sigma\left(u + \frac{du}{2}\right)\varepsilon\delta\cos 2\gamma.$$

ne Σ indiquant la somme de termes analogues à celui qui est dans lesquels les quantités n, n' ε, δ, γ, u, du, ont les valeurs viennent successivement à chacune des lames traversées.

où la vibration incidente est rectiligne. — Nous allons ap- ces formules au cas particulier où la vibration qui tombe sur le de lames est rectiligne, c'est-à-dire où u a une valeur nulle à e.

très facile de construire géométriquement $d\Phi$, dU, $d\Omega$.

OV (fig. 95) la direction de la vibration, appelons dE l'épaisseur du paquet de lames; à partir de O nous construisons une ligne nale O12...n, dont le p^e^ côté, qui a pour longueur $\frac{\varepsilon_p\delta_p}{d\mathrm{E}}$, fait N un angle égal à $2\gamma_p$; ε_p, δ_p, γ_p étant les valeurs de ε, δ, γ qui

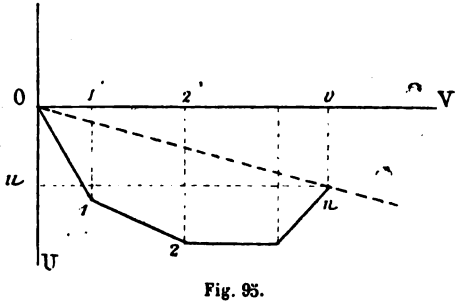


Fig. 95.

iennent à la p^e^ lame. La projection Ov de la ligne polygonale OV, est évidemment égale à $\Sigma\frac{\varepsilon\delta}{d\mathrm{E}}\cos 2\gamma$. La projection O$u$ de la

même ligne polygonale sur une perpendiculaire à OV

si nous convenons de porter les U positifs sur la direc
contre en tournant de 90°, à partir de OV, *dans le sens*

Enfin nous remarquons que la ligne 1 1′ projetant
égale à $\frac{\lambda}{\pi}\frac{du_1}{dE}$, si du_1 est le petit axe de l'ellipse vibra

de la 1re lame; que 2 2′ est de même égal à $\frac{\lambda}{\pi}\frac{du_2}{dE}$, si d
axe de l'ellipse émergeant de la 2e lame, et ainsi de suit
01′, 02′.... sont respectivement égales à $\varepsilon_1\,\delta_1\cos 2\gamma_1$, ε_2
On en déduit sans peine que les aires 011′, 1 2, 1′2′, etc
vement égales à

$$\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{dE}\cdot\frac{du_1}{2}\frac{\varepsilon_1\delta_1}{dE}\cos 2\gamma_1,\qquad \frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{dE}\left(u_1+\frac{du_2}{2}\right)\frac{\varepsilon_2\delta_2}{dE}\cos 2$$

et qu'enfin

$$\text{Aire } 0\,1\,2..nv=\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{dE}\,\Sigma\left(u+\frac{du}{2}\right)\frac{\varepsilon\delta}{dE}\cos 2\gamma=\frac{\lambda}{2\pi}$$

Si l'on représente par s la valeur algébrique de l'aire (
aurons

$$d\Omega=\frac{2\pi^2}{\lambda^2}\,s\,dE^2.$$

Les aires parcourues dans le sens positif de la dir
considérées comme positives lorsqu'elles sont au-dessous
OV, comme négatives lorsqu'elles sont au-dessus. L'inverse
aires parcourues dans le sens négatif.

Si la vibration incidente rectiligne est dirigée suivan
qui ferme la ligne polygonale, dU est nul, et la phase d
la vibration en traversant le paquet de lames, ou, en d'a
le temps employé par la vibration à exécuter ce chemin,

$$d\Phi=dE\left[\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right)+\frac{\Delta}{2}\right]$$

en appelant Δ la longueur On.

ration est dirigée suivant une perpendiculaire à On, dU est , et la phase acquise par la vibration est :

$$d\Phi = dE\left[\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right) - \frac{\Delta}{2}\right],$$

dans tous les termes qui composent la somme

$$\Delta = \Sigma\,\frac{E}{dE}\,\delta\cos 2\gamma\,,$$

e changé en $\frac{\pi}{2} - \gamma$, et par conséquent Δ en $-\Delta$.

vibration OV, avec laquelle On fait un angle égal à $2m$, on a :

$$d\Phi = dE\left[\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right) + \frac{Ov}{2}\right],$$

ne $Ov = \Delta\cos 2m$:

$$d\Phi = dE\left[\Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right) + \frac{\Delta}{2}\cos 2m\right].$$

pose

$$N = \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right) + \frac{\Delta}{2},$$

$$N' = \Sigma\left(\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2}\right) - \frac{\Delta}{2},$$

isément que la valeur générale de $d\Phi$ pour une vibration OV dont la n fait un angle $2m$ avec On, peut se mettre sous la forme

$$d\Phi = dE\left(N\cos^2 m + N'\sin^2 m\right).$$

n pose

$$\rho = N\cos^2 m + N'\sin^2 m,$$

on trace, autour d'un point O, une courbe dont les rayons vec- sont ρ et les azimuts sont m, cette courbe est sensiblement une . Posons en effet :

$$N_b = \Sigma\,\frac{\varepsilon}{dE}\,\frac{n+n'}{2};$$

$$N = N_b + \frac{\Delta}{2}, \qquad N' = N_b - \frac{\Delta}{2},$$

et Δ est une petite quantité, car dans $\Sigma \frac{\varepsilon}{d\mathrm{E}} \partial \cos$

petits à cause de la faible biréfringence des lames

négligeons les termes en Δ^2, nous trouverons, par

formations très simples :

$$\rho = \mathrm{N}_b \left(1 + \frac{\Delta}{2\mathrm{N}_b} \cos 2m\right), \qquad \rho \left(1 - \frac{\Delta}{2\mathrm{N}_b} \mathrm{co}\right.$$

$$\rho^2 \left(1 - \frac{\Delta}{\mathrm{N}_b} \cos 2m\right) = \mathrm{N}_b^2,$$

$$\rho^2 \left[\left(1 - \frac{\Delta}{\mathrm{N}_b}\right) \cos^2 m + \left(1 + \frac{\Delta}{\mathrm{N}_b}\right) \sin^2 m\right]$$

$$\rho^2 \left[\frac{\cos^2 m}{\left(1 + \frac{\Delta}{2\mathrm{N}_b}\right)^2} + \frac{\sin^2 m}{\left(1 - \frac{\Delta}{2\mathrm{N}_b}\right)^2}\right] =$$

ou enfin,

$$\rho^2 \left[\frac{\cos^2 m}{\mathrm{N}^2} + \frac{\sin^2 m}{\mathrm{N}'^2}\right] = 1,$$

ce qui est l'équation d'une ellipse dont les axes,

et la perpendiculaire à On, ont respectivement pour

En résumé, suivant la direction de propagation c

de lames se comporte comme une lame unique d'ép

laquelle l'ellipse, qui a pour axes N et N', représent

un plan perpendiculaire à la direction de propaga

inverse qui régirait ses propriétés optiques.

Le rayon vecteur de cette ellipse, suivant une di

a pour expression :

$$\rho = \Sigma \frac{\varepsilon}{d\mathrm{E}} (n \cos^2\gamma + n' \sin^2\gamma).$$

D'après ce qui vient d'être démontré, chacun d

somme, se rapportant à une lame composante dète

sensiblement le rayon vecteur, dirigé suivant la

rée, de l'ellipse que cette lame découpe dans

blable à l'ellipsoïde inverse qui la caractérise, et

similitude égal à $\frac{\varepsilon}{d\mathrm{E}}$.

Si donc on construit pour chacune des lames composantes un ellipsoïde semblable à son ellipsoïde inverse avec un rapport de similitude égal à $\frac{\varepsilon}{dE}$, et si, suivant chaque direction de l'espace, on porte une longueur égale à la somme des rayons vecteurs, correspondant à cette direction, de chacun de ces ellipsoïdes, on obtient une certaine surface dont l'intersection, par le plan perpendiculaire à la direction de propagation, est l'ellipse dont les axes sont N et N′ et qui régit les propriétés optiques du paquet suivant cette direction de propagation.

Lorsque, au lieu de considérer la direction de propagation normale au plan des lames composantes, on en considère une autre quelconque, il est clair qu'on pourra appliquer à cette nouvelle direction tout ce qui a été démontré pour la précédente, si l'on peut négliger les légères brisures produites dans le rayon par les différences des indices moyens des lames traversées. On trouvera donc encore que, suivant cette direction, le paquet se comporte comme une lame unique, d'épaisseur dE, dont les propriétés optiques sont régies par une ellipse obtenue en coupant la surface, dont on vient d'indiquer la construction, par un plan normal à la direction de propagation.

Cette surface est donc sensiblement un ellipsoïde, puisque son intersection par un plan quelconque est une ellipse.

Si nous réservons expressément les phénomènes produits par la rotation $d\omega$ des axes de l'ellipse vibratoire, un paquet de lames cristallines suffisamment minces et en nombre suffisamment petit, se comporte donc, suivant toutes les directions de propagation, comme une lame, dont l'épaisseur dE est celle même du paquet, et qui serait découpée dans un cristal fictif dont l'ellipsoïde inverse serait obtenu par la construction indiquée plus haut.

Nous pouvons remarquer, d'une manière générale, que la construction qui sert à déterminer l'ellipsoïde inverse du paquet est indépendante de l'ordre dans lequel les lames sont empilées et ne dépend que de la nature et de l'orientation relative des ellipsoïdes inverses de chacune des lames, dilatés respectivement dans le rapport qu'indique l'épaisseur de la lame.

Il en résulte que si tous ces ellipsoïdes construits autour d'un point donnent une figure symétrique par rapport à un plan, ce plan est un plan de symétrie de l'ellipsoïde inverse du paquet. Si la figure admet un axe de symétrie binaire, cet axe est un des axes de l'ellipsoïde in-

verse du paquet. Si la figure admet un axe d'ordre supéri l'ellipsoïde inverse est de révolution autour de cet axe.

Pouvoir rotatoire du paquet de lames. — Ayant déterm un paquet de lames, les quantités dU et $d\Phi$, il ne nous reste voir comment varie Ω.

Nous remarquerons tout d'abord que dU et $d\Phi$ sont proport dE et, par conséquent, sont du premier ordre de grandeur, t l'on a

$$d\Omega = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} s\, dE^2,$$

s étant une quantité finie qui est l'aire du polygone 01 2... figure 95, et que, par conséquent $d\Omega$ est du second ordre de g

L'angle Ω est compté positivement dans le sens *dextrorsum*. même signe que s.

L'aire s dépend des longueurs des côtés du polygone, lesque proportionnelles aux retards engendrés par chacune des lames sant le paquet. S'il n'y avait pas de dispersion cristalline, ces seraient indépendants de la longueur d'onde λ, et il en serait d de s. Si, comme il arrive presque toujours, la dispersion line des lames est faible, on pourra la négliger dans une p approximation, et l'on pourra dire alors que $d\Omega$ varie en raison du carré de la longueur d'onde.

Une autre remarque intéressante, c'est que la projection de l polygonale 01 2... n ne dépend que du nombre et de la longu côtés et nullement de l'ordre dans lequel ils se succèdent, de so dU et $d\Phi$ ne dépendent pas de l'ordre dans lequel les lames son lées. Il en est tout autrement de l'aire s du polygone; d'où il fa clure que la rotation $d\Omega$ dépend, non seulement du nombre, de l tation et des propriétés optiques des lames superposées, mais de l'ordre dans lequel ces lames se succèdent. Nous supposerons to le polygone construit, à partir de O, en partant de la lame infé du paquet, c'est-à-dire de celle qui reçoit la lumière incidente.

L'aire s est en général formée de deux parties : l'une est l'aire du gone 01 2... n (fig. 95), et l'autre celle du triangle Onv; cette der surface dépend de la position de la vibration OV; la première, au traire, ne dépend que de l'arrangement et de la nature des lames tallines.

Si nous convenons d'appeler s_0 l'aire 012... n, la rotation $d\Omega$ qui se produit lorsque la vibration est dirigée suivant On est proportionnelle à s_0. Elle est positive quand l'aire s_0 est positive, négative quand cette aire est négative. Avec les conventions faites, l'aire s_0 est positive quand elle est au-dessous de On, c'est-à-dire dans la partie du plan que l'on décrit à partir de On en tournant dans le sens *dextrorsum*, et qu'en outre la projection, sur On, du point qui parcourt le polygone se meut dans le sens positif.

C'est ainsi que l'aire 01 2... n (fig. 96) est positive, l'aire 01'2'... n négative.

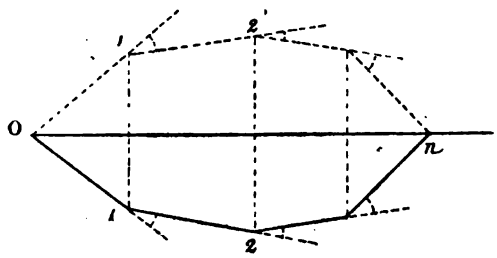


Fig. 96.

Supposons que le polygone 01'2'... n soit symétrique de 01 2... n par rapport à On, l'aire s_0' est égale en valeur absolue à s_0 et l'on a $s_0' = -s_0$, de sorte que le paquet auquel conviendrait le polygone 01'2'... n aurait une rotation égale et contraire à celle du paquet auquel s'applique le polygone 01 2... n.

Or on voit que, dans le paquet 01'2'... n, des lames égales sont superposées dans le même ordre, et de façon que la section principale de la première lame supérieure fait avec celle de la lame inférieure le même angle dans les deux paquets ; la seule différence, c'est que cet angle, compté à partir de la section principale inférieure, a changé de sens ; s'il était *dextrorsum* dans le premier paquet, il sera *sinistrorsum* dans le second, et inversement. Nous dirons que le *sens d'empilement* des deux paquets est différent. On voit que le sens de la rotation change avec le sens d'empilement.

Nous conviendrons, pour simplifier l'écriture, de poser

$$r = \frac{2\pi^2}{\lambda^2} s_0 dE,$$

de telle sorte que, lorsque la vibration incidente
On, c'est-à-dire suivant ce qu'on peut appeler la se
paquet, on a

$$d\Omega = r\,dE.$$

III. — VIBRATIONS TRAVERSANT UNE PILE FORMÉE PA D'UN GRAND NOMBRE DE PAQUETS TRÈS MI

1° CAS OU LA ROTATION DE LA VIBRATION PEUT ÊT

Un paquet très mince, composé de lames très m
que des modifications très faibles dans les vibration
Mais on peut superposer un nombre, aussi grand qu
paquets identiques entre eux et semblablement orie
former ce que nous appellerons une *pile*, d'épaisseu
proposons de trouver les effets produits par une sem

Nous remarquons d'abord que la rotation $d\Omega$, imprim
la vibration qui le traverse, étant du second ordre pa
seur dE du paquet, on peut toujours concevoir les pa
pour que le pouvoir rotatoire de la pile tout entièr
C'est le cas que nous examinerons tout d'abord.

Il est clair que dans ce cas, la pile se comporte
composée de la superposition de lames cristalline
elles et de même orientation. Si l'épaisseur de la pil
se comportera donc comme une lame cristalline d'ép
rait taillée dans un cristal fictif dont l'ellipsoïde inv
que celui d'un des paquets élémentaires.

Appliquons la théorie à quelques cas particuliers.

Paquet composé de deux lames identiques en
posons un paquet composé de deux lames identiques
les sections principales sont croisées sous un angle
deux ellipsoïdes inverses qui correspondent aux de
lame sont identiques entre eux, et ils sont placés s
rapport aux plans bissecteurs de l'angle m normaux a
L'ellipsoïde inverse résultant, qui régit les propriét

quet, admet donc ces deux plans bissecteurs comme des plans de symétrie. La normale aux plans des lames est ainsi un axe de cet ellipsoïde, dont les deux autres axes sont les deux bissectrices des angles formés par les sections principales.

Soient Oo_1 et Oe_1 la section principale de l'une des lames, Oo_2 et Oe_2, celles de l'autre ; n, l'indice correspondant à o, n', celui qui correspond à e, $\delta = n - n'$ et $\frac{\varepsilon}{dE} = \frac{1}{2}$: nous prenons $01 = \frac{\varepsilon}{dE}\delta = \frac{1}{2}(n - n')$, puis sur la direction 1 2 (fig. 97) faisant avec 01 dans le sens droit un angle égal à $2m$, nous prenons encore $1\,2 = \frac{1}{2}(n - n')$. La direction 02 fait avec 01 un angle égal à m, ce qui veut dire que l'une des sections principales du paquet fait avec Oo_1 un angle égal à $\frac{m}{2}$; c'est ce que nous avions déjà trouvé d'une autre façon. En outre, l'indice correspondant à la vibration dirigée suivant cette section principale est égale à

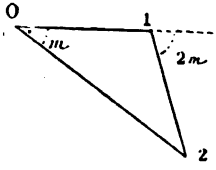


Fig. 97.

$$N = \frac{n + n'}{2} + 02 = \frac{n + n'}{2} + (n - n')\cos m.$$

N est l'un des axes de l'ellipsoïde inverse résultant ; un autre est,

$$N' = \frac{n + n'}{2} - (n - n')\cos m.$$

Le troisième axe N″ de l'ellipsoïde inverse résultant est perpendiculaire au plan des lames et est égal au rayon de l'ellipsoïde inverse composant qui coïncide avec cette direction.

Lorsque $m = 90°$, c'est-à-dire lorsque les lames sont croisées à angle droit, on a $N = N' = \frac{n + n'}{2}$; l'ellipsoïde inverse résultant est de révolution, et la pile présente les phénomènes des cristaux uniaxes.

On peut réaliser ces deux cas avec des lames minces de mica biaxe. Norremberg a montré qu'en croisant de semblables lames à angle droit, on obtient une pile uniaxe. Reusch a croisé ces lames minces sous des angles quelconques.

Les lames de mica sont taillées perpendiculairement à l'axe $\frac{1}{a}$ de l'ellipsoïde inverse, qui est la bissectrice aiguë. Les indices correspondant

aux vibrations dirigées dans le plan des lames sont
bration dirigée suivant la ligne des pôles des lemmis
tre vibration. Si les lames sont croisées de manière
pôles de chacune d'elles forment un angle m moind
sectrice de cet angle correspond à un axe dont la gr

$$N = \frac{n_c + n_b}{2} + \frac{n_c - n_b}{2} \cos m;$$

l'axe perpendiculaire est

$$N' = \frac{n_c + n_b}{2} - \frac{n_c - n_b}{2} \cos m,$$

dont le maximum est n_b. On a ainsi

$$N < N' < n_c.$$

L'axe perpendiculaire aux lames est donc toujours
de l'ellipsoïde inverse. On a d'ailleurs

$$N - N' = (n_c - n_b) \cos m,$$

et par conséquent $N - N' < n_c - n_b$. Si l'on appell
des axes optiques d'une lame avec l'axe $\frac{1}{a}$, et V l'angl
optiques de la pile avec le même axe, on a

$$\operatorname{tg} v = \sqrt{\frac{n_c - n_b}{n_b - n_a}}, \qquad \operatorname{tg} V = \sqrt{\frac{(n_c - n}{\frac{n_c + n_b}{2} - \frac{n_c -}{2}}}$$

ou

$$\operatorname{tg} V = \sqrt{\frac{2 \cos m}{\frac{n_c - n_a}{n_c - n_b} + \frac{n_b - n_a}{n_c - n_b} - \cos m}} = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 v} +}$$

$(n_c - n_b) \cos m$ est plus petit que $n_c - n_b$; de plus
$\cos m$ ou $n_c \sin^2 m + n_b \cos^2 m$ est plus grand que
rayon d'une ellipse dont n_b est le petit axe. Pour c
on aura donc toujours $tg^2 V < tg^2 v$ ou $V < v$. Le cr
diminue donc toujours l'angle des axes, jusqu'à
$m = 90°$.

Paquet composé de 3 lames identiques. — Supposons que le paquet soit composé de 3 lames identiques entre elles. La ligne 03 (fig. 98) qui ferme le polygone 0123, fait avec 01 un angle qui est le double de celui que la section principale de la pile fait avec celle de la première lame du paquet.

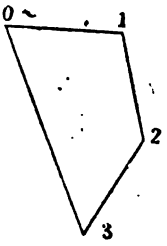


Fig. 98.

Lorsque la section principale d'une lame fait avec celle de la lame inférieure un angle égal à 60°, la ligne polygonale 0123 (fig. 99) est fermée, et la direction normale aux lames est un axe optique de la pile.

C'est ce qui résulte d'ailleurs de cette remarque que cette direction est un axe ternaire de la figure formée par les 3 ellipsoïdes des 3 lames construits autour d'un centre commun. La pile est uniaxe et la direction normale aux lames est l'axe principal.

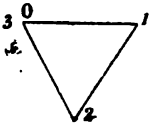


Fig. 99.

La grandeur N_a de l'axe principal de la pile est égale à celle du rayon vecteur de l'ellipsoïde inverse d'une des lames dirigé perpendiculairement au plan des lames. La grandeur N_c du rayon équatorial de l'ellipsoïde de révolution, est égale à la demi-somme des axes de l'ellipse découpée par une des lames dans son ellipsoïde inverse.

On arriverait à une conclusion analogue, si le paquet était composé d'un nombre quelconque n de lames identiques entre elles et superposées de manière que la section principale de l'une des lames fasse avec celle de la lame précédente un angle égal à $\pm \frac{2\pi}{n}$.

Il peut arriver non seulement que la pile soit uniaxe, mais encore que l'axe principal soit égal au rayon équatorial de l'ellipsoïde inverse résultant. Celui-ci est alors une sphère et la pile est uniréfringente. Mais, tandis que toutes les conséquences précédentes peuvent être vérifiées par l'empilement de lames de mica, il n'en saurait être de même de celle-ci. En effet, le mica étant négatif, l'axe normal aux lames est le plus petit axe de l'ellipsoïde inverse du mica, et il est conservé dans toutes les piles que l'on peut former. Les deux autres axes de l'ellipsoïde inverse de la pile sont au contraire intermédiaires entre ceux de l'ellipsoïde du mica, et sont toujours, par conséquent, plus grands que le troisième.

2° CAS OU LE POUVOIR ROTATOIRE DE LA PILE NE PEUT PA

Lorsque le pouvoir rotatoire de la pile ne peut pas phénomènes sont plus complexes, mais nous pourron construction connue, trouver l'ellipsoïde inverse qui d chaque direction de propagation, ce que nous contin les deux sections principales de la pile. Cet ellipsoï encore la vitesse avec laquelle se transmet, suivant propagation, la vibration qui, elliptique à l'émergen dence, rectiligne et dirigée suivant une des sections pile. Cette vibration traverse en effet, avec la même vi ellipticité croissante, chacun des paquets qui compos

Cas d'une vibration incidente, rectiligne et diri des sections principales de la pile. — Déterm de Ω. — Nous supposons une vibration incidente, plitude égale à 1, et dirigée suivant l'une des deux se d'un paquet.

La vibration a traversé un certain nombre de paquet un chemin que nous appellerons E; à ce moment, elliptique, le petit axe a pris une valeur égale à U, de l'ellipse a tourné, par rapport à la vibration rectil égal à Ω.

Il en résulte que la section principale d'une lame faisait avec la vibration incidente un angle égal à γ, l axe de la vibration elliptique, au moment considér à $\gamma - \Omega$.

Nous supposerons que U et Ω restent assez petits puissions négliger les termes dans lesquels ces quant troisième puissance.

On aura ainsi

$$dU = \frac{\pi}{\lambda} \Sigma \varepsilon\delta \sin 2(\gamma - \Omega)$$

ou, en développant,

$$dU = \frac{\pi}{\lambda} \cos 2\Omega \Sigma \varepsilon\delta \sin 2\lambda - \frac{\pi}{\lambda} \sin 2\Omega \Sigma \varepsilon\delta \cos$$

Nous nous bornons à considérer la variation dU pendant la traversée du paquet, de sorte que $\Sigma\varepsilon\delta \sin 2\gamma$ et $\Sigma\varepsilon\delta \cos 2\gamma$ sont des quantités très petites. On peut donc remplacer $\cos 2\Omega$ par 1, puisque l'erreur, qui est du deuxième ordre, est multipliée par une quantité très petite; on peut d'ailleurs toujours remplacer $\sin 2\Omega$ par 2Ω, puisque l'erreur commise n'est que du 3e ordre : on a ainsi

$$dU = \frac{\pi}{\lambda}\Sigma\varepsilon\delta \sin 2\gamma - \frac{2\pi}{\lambda}\Omega\Sigma\varepsilon\delta \cos 2\gamma.$$

Dans le 2e membre, le 1er terme est du 1er ordre de grandeur, et le 2e terme du 2e ordre. Le 1er terme s'annule à la sortie du paquet, puisque nous avons vu que, pour un paquet,

$$\Sigma\varepsilon\delta \sin 2\gamma = 0;$$

on aura donc, pour la variation dU produite par la traversée du paquet considéré :

$$dU = -\frac{2\pi}{\lambda}\Omega\Sigma\varepsilon\delta \cos 2\gamma.$$

Or, si nous nous reportons à ce qu'on a vu plus haut, nous verrons que $\Sigma\varepsilon\delta \cos 2\gamma$ représente ΔdE, Δ étant le retard causé par le paquet, c'est-à-dire la longueur On qui ferme la ligne polygonale $01 2 \ldots n$ de la figure 96. Nous pouvons donc écrire :

$$(a) \qquad dU = -\frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\Delta dE.$$

Occupons-nous de $d\Omega$; l'expression générale s'appliquera encore ici en substituant à γ la valeur $\gamma - \Omega$, que l'on peut supposer constante pendant la traversée d'un paquet. On aura donc

$$d\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}\left(U + u + \frac{du}{2}\right)\varepsilon\delta \cos 2\left(\gamma - \Omega\right)$$

Nous appelons u la valeur très petite de l'accroissement dU, qui se produit après la traversée d'un certain nombre de lames du paquet. La valeur totale de $d\Omega$, après la traversée de toutes les lames du paquet, est ainsi :

$$d\Omega = \frac{2\pi}{\lambda}U\Sigma\varepsilon\delta \cos 2(\gamma - \Omega) + \frac{2\pi}{\lambda}\Sigma\left(u + \frac{du}{2}\right)\varepsilon\delta \cos 2(\gamma - \Omega).$$

Le signe Σ indique la somme des termes analogu
écrit, et se rapportant successivement à chacune des
sent le paquet. En développant les $\cos 2(\gamma - \Omega)$ et
l'on peut faire $\sin 2\Omega = 2\Omega$, et $\cos 2\Omega = 1$, puisque
plié partout par des facteurs du 1er ordre de grand
en supprimant toujours les termes du 3e ordre :

$$d\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} U \Sigma \varepsilon \delta \cos 2\gamma + \frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \left(u + \frac{du}{2}\right) \varepsilon \delta \cos 2\gamma + \frac{4\pi}{\lambda}$$

Comme nous venons de le faire remarquer, on a Σ
et $\Sigma \varepsilon \delta \sin 2\gamma = 0$. Quant à $\frac{2\pi}{\lambda} \Sigma \left(u + \frac{du}{2}\right) \varepsilon \delta \cos 2\gamma$,
(V. p. 273); on aura donc :

$$(b) \qquad d\Omega = \frac{2\pi}{\lambda} U \Delta dE + r dE.$$

Les équations (a) et (b) sont les équations diffé
tanées en U, Ω, dV, $d\Omega$, qu'il s'agit d'intégrer pour
sions de U et Ω.

Pour ne pas embarrasser inutilement les calcul
$\frac{2\pi}{\lambda} \Delta = \psi$; les équations deviendront alors :

$$dU = -\Omega \psi dE,$$
$$d\Omega = U \psi dE + r dE.$$

Si l'on élimine dE entre ces deux équations, on
$$-\psi \Omega d\Omega = (U\psi + r) dU,$$

ce qui donne par l'intégration

$$-\psi \frac{\Omega^2}{2} = Ur + \frac{\psi U^2}{2},$$

la constante étant nulle, puisqu'on doit avoir U =
tire de cette équation

$$U = -\frac{r}{\psi} \pm \sqrt{\frac{r^2}{\psi^2} - \Omega^2}.$$

portant cette valeur de U dans l'expression de $d\Omega$, il vient

$$d\Omega = \pm \psi dE \sqrt{\frac{r^2}{\psi^2} - \Omega^2}$$

$$\psi dE = + \frac{\psi}{r} \frac{d\Omega}{\sqrt{1 - \frac{\psi^2}{r^2}\Omega^2}};$$

prendre le signe +, puisque pour $\psi = 0$, on doit avoir $d\Omega =$
. L'intégration donne

$$\psi E = \text{arc sin} \frac{\psi}{r} \Omega,$$

nstante étant encore nulle, car on a $\Omega = 0$ pour $E = 0$.
te expression peut se mettre sous la forme

$$\Omega = \frac{r}{\psi} \sin \psi E.$$

rtant dans l'expression de dU, il vient

$$dU = - r \sin \psi E . dE,$$

ui donne, en intégrant,

$$U = \frac{r}{\psi} \cos \psi E + C.$$

On doit avoir $U = 0$ pour $E = 0$, c'est-à-dire $C = -\frac{r}{\Delta}$, et par con-
quent

$$U = -\frac{r}{\psi}(1 - \cos \psi E) = -\frac{2r}{\psi} \sin^2 \frac{\psi E}{2}.$$

En remplaçant ψ par sa valeur $\frac{2\pi}{\lambda}\Delta$, les deux expressions de Ω et U
mettent sous la forme

(4) $$\Omega = rE \frac{\sin \frac{2\pi}{\lambda} E\Delta}{\frac{2\pi}{\lambda} E\Delta}$$

$$(5) \qquad U = -rE\frac{\sin^2\frac{\pi}{\lambda}E\Delta}{\frac{\pi}{\lambda}E\Delta}.$$

On déduit facilement de ces deux expressions

$$(6) \qquad U = -\Omega \operatorname{tg}\frac{\pi}{\lambda}E\Delta,$$

ou

$$(7) \qquad U\cos\frac{\pi}{\lambda}E\Delta + \Omega\sin\frac{\pi}{\lambda}E\Delta = 0.$$

Remarques sur les valeurs de U et de Ω. — I
de Ω sont proportionnelles à r et à l'épaisseur E
rappeler que r a pour expression

$$r = \frac{2\pi^2}{\lambda^2}s_0 dE,$$

et qu'il est ainsi proportionnel à l'épaisseur dE du
qui dépend de la nature et de l'arrangement des
qu'il est enfin en raison inverse du carré de la lo
l'on néglige la dispersion cristalline des lames qui c

La vibration rectiligne incidente a été supposée
sections principales de la pile, celle pour laquell
retard de Δ sur la vibration dirigée suivant la se
pendiculaire. Si la vibration était dirigée suivant c
perpendiculaire, Ω aurait la même valeur absolu
mais U, qui conserverait la même valeur, aurait
puisque Δ changerait de signe.

Les deux vibrations rectilignes incidentes dirigées
tions principales de la pile donnent donc, à l'émerge
les grands axes respectifs ont tourné l'un et l'au
sens, du même angle Ω, par rapport à la vibration
deux ellipses sont de sens différents; si l'une es
est lévogyre, et inversement.

Soit, rapportée à l'une des sections principales
tion incidente

$$x = p\sin 2\pi\frac{t}{T}.$$

La vibration elliptique émergente rapportée à une droite faisant un angle Ω avec la section principale comme axe des sinus, et à la droite perpendiculaire comme axe des cosinus, aura pour équations

$$X = p \cos U \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \Phi\right)$$
$$Y = p \sin U \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \Phi\right).$$

La vibration dirigée suivant la section principale perpendiculaire a pour équation, à l'incidence,

$$y = q \sin 2\pi\frac{t}{T};$$

et à l'émergence, si on la rapporte aux mêmes axes que l'ellipse précédente, l'ellipse vibratoire a pour équations

$$Y' = q \cos U \sin\left(2\pi\frac{t}{T} - \Psi\right)$$
$$X' = q \sin U \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - \Psi\right).$$

Cette ellipse a en effet un sens contraire à celui de la précédente, puisque les axes des sinus et des cosinus sont inversés.

Vibration incidente dirigée d'une manière quelconque. — Si la vibration incidente a une direction quelconque, il suffira de la décomposer en deux autres dirigées suivant les deux sections principales de la pile.

Si α est l'angle de la première section avec la vibration incidente il suffira de remplacer, dans les équations précédentes, p par $\cos\alpha$ et q par $\sin\alpha$.

Si l'on change l'origine du temps, de manière à faire $2\pi\frac{t}{T} - \Phi = 2\pi\frac{t'}{T}$, et si l'on pose $\Phi - \Psi = \varphi$, les équations des deux ellipses deviennent

$$X = \cos\alpha \cos U \sin 2\pi\frac{t}{T} \qquad Y = \cos\alpha \sin U \cos 2\pi\frac{t}{T}$$

$$X' = \sin\alpha \sin U \cos\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right) \qquad Y' = \sin\alpha \cos U \sin\left(2\pi\frac{t}{T} + \varphi\right)$$

Projetées sur les deux sections principales de la pile, les vibrations émergentes ont pour équations

$$x = (X + X') \cos\Omega + (Y + Y') \sin\Omega$$
$$y = -(X + X') \sin\Omega + (Y + Y') \cos\Omega$$

ou, en supprimant les termes du 3e ordre en U et Ω

$$x = \cos U \cos \Omega \cos \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} + U \sin \alpha \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) +$$

$$y = \cos U \cos \Omega \sin \alpha \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) + U \cos \alpha \cos \frac{2\pi t}{T} -$$

Nous pouvons poser

$$\cos U \cos \Omega \frac{U^2 + \Omega^2}{2} = 1 - m = 1 -$$

et nous avons trouvé la relation (6)

$$U = - \Omega \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2},$$

ce qui donne

$$x = (1 - m) \cos \alpha \sin \frac{2\pi t}{T} + \frac{\Omega \sin \alpha}{\cos \frac{\varphi}{2}} \sin \left(\right.$$

$$y = (1 - m) \sin \alpha \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi \right) - \frac{\Omega \sin}{\cos}$$

La vibration elliptique (X, Y) peut se décompos circulaires d'anomalie nulle, dont les rayons sont

$$r = \cos \alpha \frac{\cos U + \sin U}{2}$$

pour la vibration dextrogyre; et

$$r_1 = \cos \alpha \frac{\cos U - \sin U}{2}$$

pour la vibration lévogyre.

La vibration elliptique (X′, Y′) peut se décompo circulaires d'anomalie égale à $-\varphi$, et dont les ra

$$r' = \sin \alpha \frac{\cos U - \sin U}{2}$$

pour la vibration dextrogyre; et

$$r'_1 = \sin \alpha \frac{\cos U + \sin U}{2}$$

pour la vibration lévogyre.

des sinus des vibrations circulaires r' et r'_1 est à angle droit
e des sinus des vibrations circulaires r et r_1, ce qui revient à
re l'anomalie de la vibration r' de $-\frac{\pi}{2}$ et celle de r' de $+\frac{\pi}{2}$.
uatre vibrations circulaires équivalent à une vibration circu-
extrogyre de rayon R et d'anomalie Θ, et à une vibration
e de rayon R_1 et d'anomalie Θ_1. On aura

$$R\cos\Theta = r + r'\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$$
$$R\sin\Theta = -r'\sin\left(-\frac{\pi}{2}+\varphi\right)$$

l'on déduit

$$= r^2 + r'^2 + 2rr'\sin\varphi = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin 2U\cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2U\sin 2\alpha\sin\varphi.$$

r le rayon R_1 de la vibration circulaire lévogyre, on aura de

$$R_1^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\sin 2U\cos\alpha - \frac{1}{4}\cos 2U\sin 2\alpha\sin\varphi.$$

IV. — APPLICATION DE LA THÉORIE A UNE PILE UNIAXE.

peut appliquer la théorie qui précède à la recherche des phéno-
s que produit une pile uniaxe formée par l'empilement de paquets
mes de mica biaxe. Cette étude a un grand intérêt, car nous
ns que les cristaux de quartz peuvent être complètement assi-
à de telles piles. C'est donc en réalité l'étude de la polarisation
oire du quartz que nous allons entreprendre.

**le uniaxe formée par des paquets ternaires — Détermina-
de** r. — Nous supposons des paquets formés de trois lames
iques entre elles, mais croisées sous des angles de 60°. Nous
osons, pour fixer les idées, l'empilement fait dans le sens *dextror-*
La ligne polygonale 0 1 2 (fig. 100) est fermée et figure un triangle
latéral dont chaque côté est égal à $\frac{\varepsilon\delta}{dE} = \frac{1}{3}\rho$. L'aire du triangle est

par conséquent égal à $\frac{\delta^2}{6\sqrt{3}}$ en valeur absolue, et

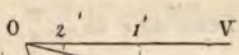


Fig. 100.

aire négativement, puisqu
positives, l'aire O11' (fig
le sens positif OV est p
aires 11'22' et 22'O pa
contraire à OV sont néga

On a donc

$$r = -\frac{\pi^2}{3\lambda^2\sqrt{3}}\delta^2 dE.$$

Si l'on prend une pile, composée d'un nomb
considérable pour que l'épaisseur de la pile soi
en appliquant les formules connues, dans lesq
$\Delta = 0$:

$$\omega = rE = -\frac{\pi^2}{3\lambda^2\sqrt{3}}\delta^2 E dE$$

$$u = 0$$

en substituant, pour simplifier l'écriture, les pe
grandes lettres qui ne sont plus utiles.

Phénomènes produits par la pile lorsque la gation est dirigée suivant l'axe. — On voit par vibration rectiligne tombant sur la pile, en res avoir tourné d'un angle ω dans le sens opposé à des lames. Cette rotation de la vibration incidente, tionnelle à la hauteur de la pile, et elle serait inverse du carré de la longueur d'onde, si la dis mica, qui est faible, était rigoureusement nulle.

Il faut remarquer que la rotation ω est non s nelle à E, mais qu'elle l'est encore à dE. La rota hauteur de pile E, sera donc d'autant plus faib petit, et pourra devenir presque nulle pour une ment petite.

Si nous observons une semblable pile entre deu lumière parallèle homogène, la lumière sera rê ne se fera que lorsqu'on aura fait tourner l'a égal à ω, de manière que la vibration émerger

cet angle se retrouve perpendiculaire à la vibration de l'analyseur.

Si l'on opère avec la lumière blanche, la lame paraîtra colorée, puisque les rayons des diverses couleurs donnent des vibrations émergentes qui font des angles différents avec la section principale de l'analyseur. Ni la teinte, ni l'intensité de la teinte ne varient lorsqu'on tourne la lame sur le porte-objet; mais l'une et l'autre varient au contraire lorsqu'on fait tourner l'analyseur.

Lorsque l'analyseur est placé de manière que sa vibration soit perpendiculaire à la vibration émergente du jaune moyen, les parties extrêmes du spectre dominent et l'on a une teinte grise ; si l'on tourne l'analyseur vers les rayons les moins déviés, c'est-à-dire vers le rouge et dans le sens contraire à celui de la rotation de la pile, le violet et le bleu dominent; si l'on tourne dans le sens opposé, c'est-à-dire dans le sens de la rotation de la pile, c'est le rouge qui domine. De là cette règle : *Le sens suivant lequel il faut tourner l'analyseur pour que la teinte passe du bleu au rouge est le sens suivant lequel la pile fait tourner la vibration incidente.*

Toutes ces conséquences se vérifient aisément avec des piles formées de paquets ternaires de lames de mica, comme M. Reusch l'a montré le premier. M. Sohncke a vérifié, d'une manière précise, que la grandeur de la rotation produite par la pile est bien celle qui est indiquée par la théorie.

Représentation des phénomènes de rotation par l'inégale vitesse de propagation de deux rayons circulaires de sens inverse. — La vibration rectiligne incidente peut se décomposer en deux vibrations circulaires de sens inverse, ayant un même rayon r, et l'un de leurs axes communs dirigé suivant la direction de la vibration.

La vibration rectiligne émergente équivaut de même à deux vibrations circulaires de sens inverse, ayant un même rayon égal encore à r, et l'un de leurs axes communs dirigé suivant la direction de la vibration qui a tourné de ω par rapport à celle de la vibration incidente. De plus, ces vibrations circulaires ont acquis, par rapport aux vibrations circulaires incidentes, une phase égale à En_a, si n_a est l'axe principal de l'ellipsoïde inverse de la pile.

En se reportant à ce qui a été dit au chapitre précédent, on voit que la vibration circulaire émergente dextrogyre peut être rapportée aux mêmes axes que la vibration circulaire incidente dextrogyre, à la con-

dition de lui supposer une phase égale à :

$$-\frac{\lambda}{2\pi}\omega + \mathrm{E}n_a = \mathrm{E}\left(n_a - \frac{\lambda}{2\pi}r\right)$$

On verra de même que la vibration circulaire émergente peut être rapportée aux mêmes axes que la vibration lévo dente, à la condition de lui supposer une phase égale à :

$$+\frac{\lambda}{2\pi}\omega + \mathrm{E}n_a = \mathrm{E}\left(n_a + \frac{\lambda}{2\pi}r\right)$$

On peut donc, pour se représenter le phénomène, imagine deux vibrations circulaires inverses qui équivalent à la vib cidente se propagent dans la pile avec des vitesses inégal ployant ainsi, pour traverser l'épaisseur E, des temps respe représentés par les expressions précédentes.

Si r est positif, c'est-à-dire si la pile est dextrogyre, c'est la dextrogyre qui met un temps plus court à traverser la pile, propage le plus vite. L'inverse a lieu si r est négatif, c'est-à- pile est lévogyre.

Cet ingénieux énoncé du phénomène de rotation produit pa a été imaginé par Fresnel pour représenter le phénomène de tion que produit le quartz suivant son axe. Le quartz se con effet, comme une pile, ainsi que nous le verrons plus tard.

Il faut remarquer que si l'on prend la moyenne des temps par chacun des rayons circulaires de sens inverse à travers seur E de la pile, cette moyenne est égale à $\mathrm{E}n_a$, c'est-à-dire que la vibration rectiligne mettrait à traverser la pile si l rotatoire de celle-ci était nul. Ce fait a été vérifié par M. Corn cristaux de quartz.

Vibration se propageant suivant une direction incl l'axe de la pile. — Lorsqu'on veut calculer les phénomène duit une pile quand un rayon lumineux s'y propage suivant tion inclinée d'une façon quelconque par rapport à l'axe, il culer les valeurs de u et de ω correspondant à cette direction. naître u et ω, il faut connaître $\mathrm{E}\delta$ et r. La quantité $\mathrm{E}\delta$ est le la vibration rectiligne principale que l'on considère par rapp qui lui est perpendiculaire, retard qui se produirait si la pi

pouvoir rotatoire. C'est donc une quantité que l'on peut sup-
onnue.

t à r, on l'obtiendrait en construisant, pour un paquet, le
ne $O12..n$, dont chaque côté a pour direction la section
ale d'une des lames suivant la direction de propagation consi-

nous pouvons nous dispenser de cette construction pénible si
ous bornons à considérer des directions de propagation peu in-
sur l'axe. Nous pouvons remarquer, en effet, que si l'on sup-
etit l'angle ρ que la direction considérée fait avec l'axe, on peut
enter r par une expression de la forme

$$r = r_0 + k\rho + k'\rho^2 + \ldots$$

ous prenons, suivant toutes les directions de propagation incli-
ur l'axe, des longueurs proportionnelles à r, nous formerons une
ne surface, dont l'ellipse indicatrice autour du pôle de l'axe prin-
est un cercle, puisque, l'axe étant d'ordre supérieur à 2, cette
e doit avoir plus de 2 diamètres égaux entre eux. La surface se
donc à une sphère dans le voisinage du pôle de l'axe, et r_0 est
aleur maximum de la fonction r, ce qui exige que $k = 0$.
donc on néglige les termes en ρ^2, on pourra poser sensiblement,
toute direction peu inclinée sur l'axe, $r = r_0$.
en résulte que si l'on a, pour une pile,

$$\omega_0 = r_0 E,$$

tant la rotation suivant l'axe, on aura sensiblement, pour une di-
on peu inclinée sur l'axe, une rotation ω donnée par la formule :

$$\omega = \omega_0 \frac{\sin \varphi}{\varphi}$$

posant $\varphi = 2\pi \frac{e\delta}{\lambda}$; δ étant le retard que la traversée de la pile, sui-
t la direction considérée, apporterait dans la vibration principale
sidérée, par rapport à la vibration principale perpendiculaire.
Supposons une pile placée entre un polariseur et un analyseur, et
versée par le faisceau lumineux suivant une direction peu inclinée

sur l'axe et pour laquelle le retard relatif des de
pales est égal à $\frac{\lambda}{2\pi}\varphi$.

Nous avons vu (p. 284) que si la vibration princ
gation est la plus lente fait un angle α avec la vib
la vibration émergeant de la pile et projetée suiv
principales de celle-ci est représentée par les deux

$$x' = (1-m)\cos\alpha\sin\tau + \frac{\omega\sin\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\tau\right.$$

$$y' = (1=m)\sin(\tau+\varphi) - \frac{\omega\cos\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\sin\tau\right.$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$\tau = 2\pi\frac{t}{T}.$$

Si la vibration de l'analyseur fait un angle β
cipale x', les vibrations émergentes projetées sur
lyseur donnent l'équation :

$$\begin{aligned} A &= x'\cos\beta - y'\sin\beta \\ &= \sin\tau\left[(1-m)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos\varphi\right. \\ &\underline{+\cos}\tau\left[\overline{-}(1-m)\sin\alpha\sin\beta\sin\varphi + \omega\,\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}\right. \end{aligned}$$

d'où l'on tire, pour l'intensité de la lumière sorta

$$\begin{aligned} I = \cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2} + \omega\,\mathrm{si} \\ - \frac{\omega^2}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\left\{\cos 2(\alpha+\beta) + \sin\right. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à remplacer, dans cette e
expression approchée $\omega_0\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, ce qui donne enfin

$$\begin{aligned} I = \cos^2(\alpha+\beta) + \sin 2\alpha\sin 2\beta\sin^2\frac{\varphi}{2} + \omega_0\frac{\sin}{(\varphi} \\ - 4\omega_0^2\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\varphi^2}\left\{\cos 2(\alpha+\beta) + \right. \end{aligned}$$

Si, dans cette expression, nous faisons $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire si nous supposons que l'analyseur est croisé à angle droit sur le polariseur, nous obtenons :

$$I=\sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\varphi}{2}-\omega_0^3\frac{\sin^2\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi^2}{4}}\left(1-\sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)$$

Phénomènes présentés par une pile en lumière convergente. — Ces équations sont immédiatement applicables à l'étude des phénomènes que présente la pile en lumière convergente. Il suffit de remarquer que si O (fig. 101) est le centre de l'image, OP la vibration du

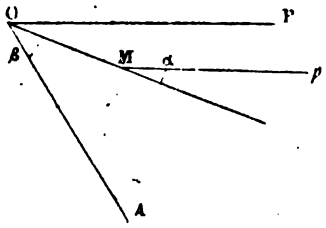


Fig. 101.

polariseur, et M un point quelconque, on peut prendre sensiblement OM comme une des sections principales de la pile au point M, l'angle α étant celui de OM avec OP. Il suffira donc, pour que les formules représentent l'intensité de la lumière propre à un point M de l'image, de faire $\alpha=$ POM, et de donner à φ la valeur de l'anomalie contractée par le rayon qui émerge obliquement en M.

Dans le cas du polariseur et de l'analyseur croisés à angle droit, la formule :

$$I+\left[\sin^2 2\alpha+\frac{4\omega_0^3}{\varphi^2}\left(1-\sin^2 2\alpha \sin^2\frac{\varphi}{2}\right)\right]\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

se réduit à ω_0^3 pour $\varphi=0$, c'est-à-dire au centre de l'image. Ce centre n'est donc plus noir, comme dans les cristaux uniaxes; il a, dans la lumière blanche, la teinte que prendrait la pile en lumière parallèle. A mesure qu'on s'écarte de l'axe, φ devient de plus en plus grand, et le

terme en ω_0^2 devient de plus en plus petit. Suivant l
vibrations du polariseur et de l'analyseur, $\sin^2 2\alpha$ est n
donc en décroissant sans cesse, et la croix noire repar
taine distance du centre, plus ou moins lavée de la tei

Suivant les directions inclinées de 45° sur les vib
riseur et de l'analyseur, $\sin^2 2\alpha$ est égal à 1, et la tein
assez rapidement place à celle qui se rencontre dans l
naires.

Pour toutes les valeurs $\frac{\varphi}{2} = n\pi$, sauf pour $n = 0$, I
montre qu'on a les cercles noirs ordinaires des cristau

La planche VII montre l'image que donne la pile en
gente entre deux nicols croisés.

Lorsque l'angle $\alpha + \beta$ n'est pas égal à 90°, les phéno
complexes; pour en étudier commodément les princip
remarquerons que si nous nous préoccupons surtout
l'image éloignés du centre, nous pourrons négliger le t
contient φ^2 au dénominateur. La formule devient alors

$$I = \cos^2(\alpha + \beta) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_0 \frac{\sin \varphi}{\varphi} \sin 2$$

En posant $\alpha + \beta = A$ ou $\beta = A - \alpha$, on a

$$I = \cos^2 A + \sin 2\alpha \sin 2(A - \alpha) \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_0 \frac{\sin \varphi}{\varphi} s$$

Nous remarquons d'abord que si ω_0 était nul, I se ré
mule qui s'applique à une lame cristalline ordinaire. Da
aurions à partager l'espace autour de O (fig. 102) en huit s
formés par les lignes OP, OA et leurs perpendiculaires r
les 4 secteurs dont l'angle est égal à POA = A, on a sin 2
positif. Dans les 4 autres secteurs (hachés sur la figur
est $\frac{\pi}{2} - A$, $\sin 2\alpha \sin 2(A - \alpha)$ est négatif.

Pour les directions qui limitent les secteurs, tels q
on a $\sin 2\alpha \sin 2(A - \alpha) = 0$. Pour ces 8 directions,

éduit à

$$I = \cos^2 A + \omega_0 \frac{\sin\varphi}{\varphi} \sin 2A,$$

minima d'intensité qui se produisent suivant ces directions se-
t produits, si l'on regarde d'abord φ comme constant, pour
$= -1$ ou $\varphi = \frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}$, etc. En réalité les minima seraient obte-
pour des valeurs de φ un peu plus faibles que celles-là, la diffé-
e allant en diminuant à mesure que φ devient plus grand.

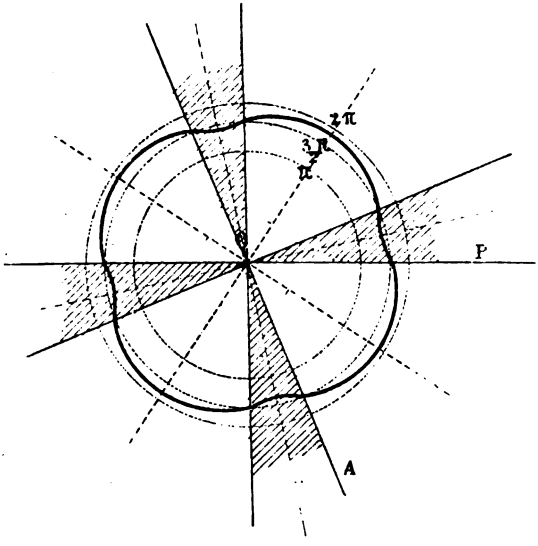


Fig. 102.

Cherchons maintenant les minima qui se produisent suivant les bissec-
ices de chacun des huit secteurs. Dans les secteurs *positifs* tels que POA,
bissectrice correspond à $\alpha = \frac{A}{2}$, et l'on a

$$I = \cos^2 A + \sin^2 A \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_0 \frac{\sin\varphi}{\varphi} \sin 2A.$$

Si ω_0 était nul, les courbes d'intensité minima seraient les cercles
ui correspondent à $\sin\frac{\varphi}{2} = 0$ ou $\varphi = 2\pi, 4\pi$, etc. Le terme en ω_0 étant

petit, l'intensité minima sera donnée par des val
$\varphi = 2\pi + \sigma$, σ étant une petite quantité. Substituan
de $1, 2\pi + \sigma$ à φ, il vient sensiblement

$$I = \cos^2 A + \frac{\sigma^2}{4} \sin 2A + \frac{\omega_0 \sigma}{2\pi} \sin 2A$$

en négligeant les termes en σ^2 qui sont multipliés p
de cette expression est donné par

$$\frac{\sigma}{2} \sin^2 A + \frac{\omega_0}{2\pi} \sin 2A = 0,$$

ou

$$\sigma = -\frac{2\omega_0}{\pi} \operatorname{cotg} A.$$

Les minima suivant les bissectrices des secteurs
donnés par des valeurs de φ successivement égales à

$$2\pi - \frac{4\omega_0}{2\pi} \operatorname{cotg} A, \qquad 4\pi - \frac{4\omega_0}{4\pi} \operatorname{cotg} A,$$

valeurs qui se rapprochent de plus en plus de $2n\pi$.

Dans les secteurs négatifs, les bissectrices
$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{A}{2}$; on a donc

$$I = \cos 2A - \cos^2 A \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \omega_0 \frac{\sin \varphi}{\varphi} \text{ si}$$

Si le terme en ω_0 n'existait pas, les minima sera
cercles qui correspondent à $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = 1$ ou aux vale
$\varphi = \pi, 3\pi$, etc. Le premier minimum sera donc do
ce qui donne sensiblement à l'expression de I la for

$$I = \cos^2 A - \left(1 - \frac{\sigma^2}{4}\right) \cos^2 A - \frac{\sigma}{\pi} \omega_0 \sin$$

Le minimum de cette expression est donné par

$$\frac{\sigma}{2} \cos^2 A - \frac{\omega_0}{\pi} \sin 2A = 0,$$

$$\sigma = \frac{4\omega_o}{\pi} \operatorname{tg} A.$$

minima correspondant aux bissectrices des secteurs négatifs donc donnés par les valeurs

$$\pi + \frac{4\omega_o}{\pi} \operatorname{tg} A, \quad 3\pi + \frac{4\omega}{3\pi} \quad A, \text{ etc.}$$

première courbe minima vient ainsi rencontrer les bissectrices secteurs positifs sur le cercle correspondant à $2\pi - \frac{4\omega_o}{2\pi} \operatorname{tg} A$, les ectrices des secteurs négatifs sur le cercle correspondant à $\frac{4\omega_o}{\pi} \operatorname{tg} A$, et les lignes qui limitent les secteurs, sur un cercle un plus petit que celui qui correspond à $\frac{3\pi}{2}$. La courbe a ainsi une ne analogue à celle que représente la figure 102.

orsqu'on tourne l'analyseur dans le sens dextrorsùm, A augnte, cotg A diminue et tg A augmente. Si ω_o est positif, les points des rbes minima situés sur les bissectrices s'éloignent du centre, et ces rbes paraissent se dilater. Si ω_o est négatif, les courbes paraissent contraire se contracter. L'inverse aurait évidemment lieu si l'on rnait l'analyseur dans le sens sinistrorsùm.

On en conclut cette règle établie par M. Delezenne pour le quartz : sens de la rotation de la pile est celui de la rotation de l'analyseur i produit la dilatation des courbes minima.

Phénomènes produits en lumière convergente par la superposion de deux piles de même nature mais de sens contraire. — pirales d'Airy. — Nous supposons superposées deux piles identiques, cela près que l'une est *dextrorsùm* et l'autre *sinistrorsùm*, c'est-dire ne différant entre elles que par le signe de ω_o. Nous supposons outre le polariseur et l'analyseur croisés à angle droit.

Une vibration rectiligne faisant un angle α avec la section principale e la première pile, émerge de celle-ci en donnant une vibration ellipique dont les composantes suivent O*o* et O*e* sont, comme nous l'avons

établi,

$$x' = (1-m)\cos\alpha\sin\tau + \frac{\omega\sin\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\tau + \frac{\varphi}{2}\right.$$

$$y' = (1-m)\sin\alpha\sin(\tau+\varphi) - \frac{\omega\cos\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\sin\left(\right.$$

équations dans lesquelles

$$m = \frac{\omega^2+u^2}{2} = \frac{\omega^2}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Suivant l'axe de la pile, l'intensité de la lumière
demment nulle, puisque la direction de la vibratio
première pile est détruite par la seconde. Les terme
d'importance que pour les directions de propagation
de l'axe de la pile, peuvent donc être ici négligés,
beaucoup le problème.

Chacune des vibrations x' et y' se compose de deux vi
dont l'une a une amplitude de l'ordre de ω. Cette vi
amplitude pourra être considérée comme se propag
deuxième pile dans les mêmes conditions que si cett
tait comme un cristal uniaxe ordinaire. En effet, chac
lieu à une ellipse dont le petit axe est de l'ordre de ω
en réalité la vibration tourne aussi de $-\omega$, mais la p
vibration sur x' ou y' ne diffère de la vibration e
quantités qui sont du deuxième ordre.

La vibration simple, d'amplitude finie, dirigée s
amplitude $\cos\alpha$; elle donne une ellipse dont le gra
suivant une ligne OX_1, faisant avec Oo un angle égal à -
est égal à $\cos\alpha$, et le petit axe, dirigé suivant une
OX_1, est égal à $-u\cos\alpha$, puisque u change de sign

Quant à la vibration, d'amplitude finie, dirigée suiv
amplitude $\sin\alpha$ et donne une ellipse dont le grand a
OY_1, est égal à $\sin\alpha$ et dont le petit axe, dirigé suiv
$-u\sin\alpha$.

L'anomalie de la vibration x' est nulle à l'incider

n y' est égal à φ; nous pouvons supposer que l'anomalie con-
par la vibration x', pendant la traversée de la deuxième pile, est
et que celle qui est contractée par la vibration y' pendant la
traversée, est égale à φ. Les composantes suivant OX_1 et OY_1
nc à l'émergence

$$x_1 = \cos\alpha \sin\tau - u \sin\alpha \cos(\tau + 2\varphi),$$
$$y_1 = \sin\alpha \sin(\tau + 2\varphi) - u \cos\alpha \cos\tau.$$

projetant sur x' et y', on obtient, au moyen des relations

$$x' = x_1 - \omega y_1, \qquad y' = y_1 + \omega x_1,$$
$$x' = \cos\alpha \sin\tau - u \sin\alpha \cos(\tau + 2\varphi) - \omega \sin\alpha \sin(\tau + 2\varphi),$$
$$y' = \sin\alpha \sin(\tau + 2\varphi) - u \cos\alpha \cos\tau + \omega \cos\alpha \sin\tau,$$

faisant usage de la relation $u = -\omega \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, et remarquant qu'il faut
er à x' et à y' les vibrations de petite amplitude qui émergent de
emière pile et que nous avons laissées de côté, on obtient

$$x' = \cos\alpha \sin\tau - \frac{\omega \sin\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\left(\tau + \frac{3\varphi}{2}\right) - \sin\left(\tau + \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$
$$y' = \sin\alpha \sin(\tau + 2\varphi) - \frac{\omega \cos\alpha}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\left(\tau + \frac{3\varphi}{2}\right) - \sin\left(\tau + \frac{\varphi}{2}\right)\right],$$

$$x' = \cos\alpha \sin\tau - 2\omega \sin\alpha \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \cos(\tau + \varphi),$$
$$y' = \sin\alpha \sin(\tau + 2\varphi) - 2\omega \cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \cos(\tau + \varphi).$$

rojetons sur la vibration de l'analyseur, que nous supposons per-
diculaire sur celle du polariseur; la projection A sera égale à

$$x' \sin\alpha - y' \cos\alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha [\sin\tau - \sin(\tau + 2\varphi)] + 2\omega \cos 2\beta \operatorname{tg}\frac{\delta}{2} \cos(\tau + \varphi)$$

encore

$$A = \left(-\sin 2\alpha \sin\varphi + 2\omega \cos 2\alpha \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) \cos(\tau + \varphi).$$

Si nous remplaçons enfin ω par $\omega_0 \frac{\sin\varphi}{\varphi}$, nous aurons

$$I = 4\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(-\sin 2\alpha\cos\frac{\varphi}{2} + \omega_0\cos 2\alpha\frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}\right)^2.$$

L'expression de I se composant de deux facteurs dont aucun ne devient infini, I sera nul pour toutes les valeurs de φ qui annulent chacun d'eux.

L'égalité $\sin^2\frac{\varphi}{2} = 0$ montre que, parmi les courbes obscures, figurent les cercles noirs que donnerait séparément, entre deux nicols croisés à angle droit, chacune des deux piles superposées.

En égalant à zéro l'autre facteur, on obtient

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \omega_0 \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}}.$$

Elle représente d'autres courbes obscures qui viennent s'ajouter aux cercles et dont nous allons chercher la forme en discutant leur équation.

A l'origine,

$$\varphi = 0, \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\frac{\varphi}{2}} = 1 \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \omega_0;$$

on a donc

$$2\alpha = n\pi + \omega_0 \quad \text{ou} \quad \alpha = \frac{n}{2}\pi + \frac{\omega_0}{2}.$$

On peut attribuer successivement à n les valeurs 0,1,2,3, ce qui donne

$$\alpha = \frac{\omega_0}{2}, \quad \frac{\pi}{2} + \frac{\omega_0}{2}, \quad \pi + \frac{\omega_0}{2}, \quad \frac{3\pi}{2} + \frac{\omega_0}{2}.$$

Si OP est la vibration du polarisateur, si l'on mène une droite OR faisant avec OP (fig. 103) un angle égal à $\frac{\omega_0}{2}$, et la droite qui est perpendiculaire

, on aura quatre branches de courbe qui, partant de l'origine, gentes à chacune des 4 directions de ces deux droites.

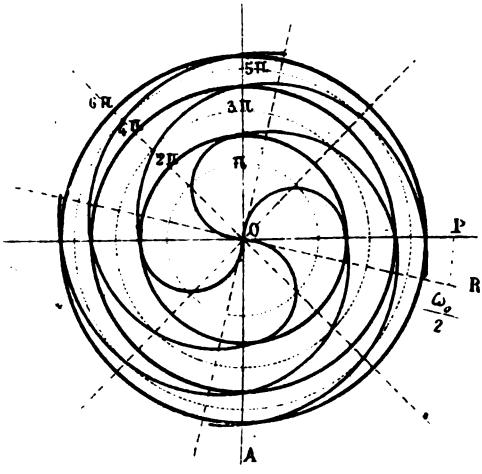


Fig. 105.

on suit la branche tangente à OR et correspondant à $\alpha = \frac{\omega_0}{2}$, on

que pour $\frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{2}$ ou $\varphi = \pi$, on a $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$, ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$; la courbe donc rencontrer sur la droite située à 45° de la vibration OP le e qui correspond à $\varphi = \pi$ ou $\sin \frac{\varphi}{2} = 1$.

ur $\frac{\varphi}{2} = \pi$ ou $\varphi = 2\pi$, on a $2\alpha = \pi$ ou $\alpha = \frac{\pi}{2}$; la courbe rencontre sur OA le premier cercle obscur. On verrait de même qu'elle ontre le second cercle obscur sur le prolongement de OP, etc.

s trois autres branches de la courbe ont des formes analogues.

es courbes spiraloïdes ont reçu le nom d'Airy, le premier savant en ait donné la théorie.

orsque ω_0 est positif, c'est-à-dire lorsque la première pile est dex-yre, les spirales sont dextrogyres; elles sont lévogyres lorsque la nière pile est lévogyre.

ans la lumière blanche, les spirales sont vivement colorées, parce pour chaque longueur d'onde, ω_0 varie. Pour le rouge, c'est-à-dire

pour le plus grand λ, ω_0 est le plus petit ; les spi
pondant au violet sont donc les plus éloignées de (
sont colorées en rouge dans la lumière blanche, la
rales est colorée en rouge.

Les figures de la planche VIII peuvent donner un
d'Airy ; la première correspond au cas où la premiè
gyre ; la seconde au cas où la première lame est lé

**Phénomènes produits en lumière converge
placée entre un polariseur rectiligne et un ana**
— Nous supposons maintenant une pile placée entre
tiligne et un analyseur circulaire.

Nous avons vu que la vibration qui émerge de l

direction de propagation pour laquelle le retard co

décompose en deux vibrations circulaires. Le rayon
circulaire dextrogyre est donné par la formule (*V.*

$$R^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sin 2u \cos 2\alpha + \frac{1}{4}\cos 2u \sin 2\alpha$$

Si on superpose un analyseur circulaire droit, la v
se propage seule, et l'intensité de la lumière qui ém
est $I = 2R^2$, ou, en remplaçant $\sin 2u$ par $2u$ et cos

$$I = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha \sin \varphi) + u \cos 2\alpha - u^2 \sin$$

Pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire au centre de l'image, on

de l'image est donc occupé par du blanc dans la lum
trouver ce qui se passe à une certaine distance du

vons négliger le terme en u^2, et, en remplaçant u
vient

$$I = \frac{1}{2}(1 + \sin 2\alpha \sin \varphi) - 2\omega_0 \cos 2\alpha \frac{\sin}{\varphi}$$

Comme nous ne nous proposons que d'acquérir
forme des courbes d'intensité minima à une certaine
c'est-à-dire lorsque les variations de φ sont petites pa

s regarder φ comme constant, ce qui donne, pour déterminer ts d'intensité minima qui se succèdent sur le rayon d'azimut α, on

$$\frac{dI}{d\varphi} = -\frac{1}{2}\sin 2\alpha \cos\varphi - \omega_0 \cos 2\alpha \frac{\sin\varphi}{\varphi} = 0$$

bligation de rendre positive l'expression

$$\frac{d^2I}{d\varphi^2} = -\frac{1}{2}\sin\varphi - \omega_0 \cos 2\alpha \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

ortant dans $\frac{d^2I}{d\varphi^2}$ la valeur de $\sin\varphi$ tirée de $\frac{dI}{d\varphi} = 0$, celle-ci de-

$$\frac{d^2I}{d\varphi^2} = -\frac{\cos\varphi}{2\omega_0\varphi\cos 2\alpha}(\varphi^2 \sin^2 2\alpha + \cos^2\alpha).$$

signe de $\frac{d^2I}{d\varphi^2}$ est donc celui de $-\frac{\cos\varphi}{2\omega_0\varphi\cos 2\alpha}$.

quation $\frac{dI}{d\varphi} = 0$ donne

$$\operatorname{tg} 2\alpha = 2\omega_0 \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\varphi}.$$

pposons que la pile soit négative, c'est-à-dire que φ soit négatif. ur $\varphi = 0$, c'est-à-dire au centre de l'image, on a les 4 valeurs

$$\alpha = \omega_0, \qquad \frac{\pi}{2} + \omega_0, \qquad \pi + \omega_0, \qquad \frac{3\pi}{2} + \omega_0.$$

our que $\frac{d^2I}{d\varphi^2}$ soit positif, il faut que $\cos 2\alpha$ soit positif; il faut c conserver les valeurs ω_0 et $\pi + \omega_0$, en supprimant les deux autres. ainsi deux espèces de spirales tangentes respectivement, à l'origine, deux directions de la droite OR (fig. 104) qui fait avec la vibration polariseur OP un angle égal à ω. Ces spirales tournent dans le sens *trorsùm*, puisque $\operatorname{tg} 2\alpha$ croît en même temps que $\operatorname{tg}\varphi$.

Pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$, on a $\operatorname{tg} 2\alpha = \infty$ ou $\alpha = \frac{\pi}{4}$; la spirale atteint alors la

tache noire qui se produirait si la pile n'avait pas
ou si ω_0 était nul. (Voir page 259.)

Pour $\varphi = \pi$, on a $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$ ou $\alpha = \pi$.

Fig. 104.

Pour $\varphi = \frac{5\pi}{2}$, on a $\alpha = \frac{5\pi}{4}$, et la spirale rencontr
minima qui se produirait dans le secteur AOP′, si
de suite.

Au centre de l'image, les minima sont à peine a
ne sont pas visibles. Les minima commencent à
dans le voisinage de la tache noire que l'on observ
ce minima correspond, en effet, dans ce cas à u
ω_0 était nul, la tache noire se produirait pour φ
tion OM (qui est celle de l'axe du mica quart d'o
seur est perpendiculaire sur le polariseur.

La valeur complète de I est, en changeant le si

$$I = \frac{1}{2}(1 - \sin 2\alpha \sin \varphi) + 2\omega_0 \cos 2\alpha \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\varphi} + 4\omega_0^2$$

Les trois premiers termes donnent une somme égale à zéro pour $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $2\alpha = \frac{\pi}{2}$; l'intensité est alors exprimée par le dernier terme qui est positif. Le premier point d'intensité nulle est donc donné par une valeur de φ supérieure à $\frac{\pi}{2}$ et par une valeur de α supérieure à $\frac{\pi}{4}$. Le premier point où le minimum est fortement accusé et qui marque, comme une tache noire, le début de la spirale, est donc situé entre la direction OM et la direction OA. La spirale paraît commencer en quelque sorte sur la direction OA et à une distance du centre peu différente de celle du cercle qui correspond à $\varphi = \pi$.

Si l'analyseur est gauche, au lieu d'être droit, on verrait que les spirales gardent la même gyration, mais qu'elles paraissent commencer sur les directions OP et la direction opposée (fig. 105).

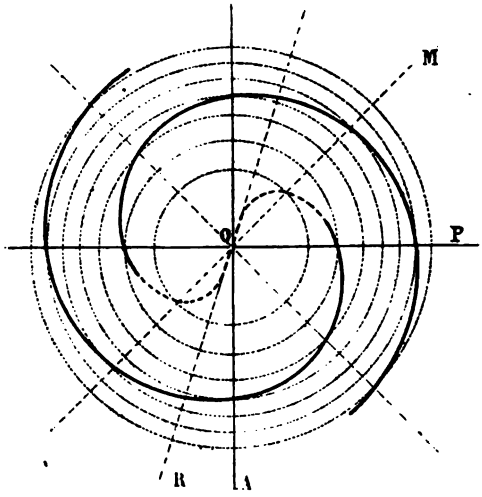


Fig. 105.

Si la pile est lévogyre, ω_0 change de sens, et le sens de gyration des spirales devient lévogyre; les spirales commencent sur OP et OP′ quand l'analyseur est droit; sur OA et OA′ quand il est gauche, ce qui est l'inverse de ce qui se produisait dans le cas de la pile dextrogyre.

Tous ces faits s'observent très aisément avec une pile négative formée par l'empilement de lames de mica.

Si la pile est positive, φ change de signe; les s
gyration; mais les taches noires qui se produira
passent dans les secteurs qui ne contiennent pas l
d'onde, et l'origine des spirales se fait suivant OA
vant OP avec une pile négative, et inversement.

CHAPITRE IX

POLARISATION ROTATOIRE DES SUBSTANCES CRISTALLISÉES ET NON CRISTALLISÉES.

I. — POLARISATION ROTATOIRE DU QUARTZ.

Les cristaux de quartz se comportent optiquement comme les nes de mica de Reusch. — Le quartz cristallise dans le système omboédrique avec une hémiédrie holoaxe ou, plus probablement I, p. 314), dans le système hexagonal avec une tétartoédrie rhomédrique dépourvue de centre. Une lame découpée dans un cristal quartz normalement à l'axe ternaire devrait donc se comporter, ur la lumière se propageant normalement à la lame, comme une subance monoréfringente; placée entre deux nicols croisés à angle oit, elle ne devrait pas supprimer l'obscurité. Arago observa le prelier, en 1811, que les choses se passent tout autrement, et que dans s conditions, la lame de quartz ne se comporte pas comme le fait ne lame cristalline taillée perpendiculairement à l'axe dans un cristal naire ou ternaire.

Arago montra que l'anomalie présentée par les lames de quartz consste en ce qu'une vibration rectiligne incidente, au lieu de conserver a direction en traversant la lame, est déviée et exécute dans un ertain sens une rotation partielle plus ou moins grande. De là le nom e polarisation rotatoire sous lequel on désigne communément les phénomènes que montre le quartz et tous les phénomènes analogues.

Biot, dans une longue suite de travaux, étudia avec le plus grand oin la polarisation rotatoire du quartz, et en établit les lois principales. Avant d'énoncer ces lois, nous pouvons dire qu'elles peuvent se résumer en un mot : les cristaux de quartz se comportent comme s'ils con-

stituaient une pile formée, comme celles que nous
le chapitre précédent, par la superposition de paq
tiques entre eux et semblablement orientés ; chaque
par la superposition de lamelles cristallines biaxes e
dont les sections principales seraient croisées de
rapport aux autres. Parmi les cristaux de quartz, les
des piles dont les paquets sont empilés dans le s
autres comme des piles dont les paquets sont empilé
gyre. Les premiers sont des cristaux lévogyres ; les
taux dextrogyres.

On pourra donc observer avec les cristaux de q
commodément qu'on ne peut le faire avec les piles
les phénomènes suivants, que nous croyons devoir r
ment ici.

Si l'on place entre deux nicols croisés à angle
quartz taillée perpendiculairement à l'axe, et si l'on
lumière simple, on constate que la lumière est réta
ramener l'obscurité, il faut tourner l'analyseur d'un
dans le sens *dextrorsum* pour les lames dextrogyr
sinistrorsum pour les lames lévogyres. Cet angle e
l'épaisseur de la lame de quartz ; il a la même
ne diffère que par le sens, pour les lames dextrog
de même épaisseur.

Cet angle est à peu près en raison inverse du car
d'onde de la lumière employée.

Lorsqu'on emploie la lumière blanche, la rotati
variant avec chaque lumière élémentaire, et la pro
qui émerge de l'analyseur croisé à angle droit varia
du sinus de la rotation, la lame paraît colorée d'u
avec l'épaisseur de la lame, et reste identique quan
sur le porte-objet.

Si l'on tourne l'analyseur à partir de la positi
teinte de la lame varie. Supposons que la lame so
(fig. 105) étant la vibration du polariseur, dans le f
de la lame, OR est la vibration du rouge (la lumière
d'onde la plus grande ayant la rotation la plus fo
bration du violet, OJ celle du jaune moyen qui a d
tensité la plus forte. Si l'on fait tourner l'analyseu

ion de l'analyseur va se trouver d'abord à angle droit sur OR et ge sera supprimé dans l'image, qui pren- une teinte bleue ; puis la vibration de yseur devient perpendiculaire sur OJ, et nière la plus vive du spectre étant sup- e, la lame prend une teinte peu éclatante une nuance grisâtre formée d'un mélange uge et de violet.

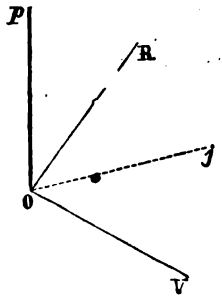


Fig. 105.

te teinte particulière a reçu le nom de *sensible.* En effet, lorsque l'analyseur est la position qui donne cette teinte, il suffit lui imprime un léger mouvement dans le sens *dextrorsum* pour rimer du violet et donner à la lame une nuance rouge avec une sité lumineuse accrue par suite du rétablissement d'une partie jaune. Il suffit au contraire d'une légère rotation *sinistrorsum* supprimer du rouge et donner à la lame une nuance bleue.

voit que si l'on part de la teinte sensible, on obtient le *rouge* en nant l'analyseur *dans le sens de la rotation* de la lame. Cette règle net de trouver aisément le sens de rotation d'une lame.

Bilames de quartz. — On se sert de cette propriété des lames de rtz pour placer l'analyseur dans une position ri- reusement perpendiculaire sur le polariseur. On sert à cet effet d'une bilame (fig. 106) formée de x lames juxtaposées et d'épaisseur égale, taillées pendiculairement à l'axe d'un cristal de quartz,

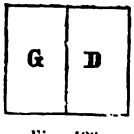


Fig. 106.

trogyre pour l'une et lévogyre pour l'autre. Lorsque cette bilame est cée au-dessus du polarisateur, vibration de ce polariseur est iée à droite pour la lame droite, auche pour la lame gauche, et quantités respectivement égales ur les deux lames et pour une me couleur, de telle sorte que vibration du rouge est, après la versée de la lame droite en R_d g.107) après la traversée de la lame

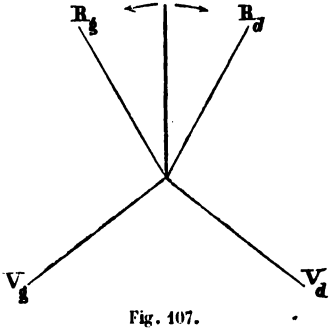


Fig. 107.

uche en R_g ; R_d et R_g étant symétriquement placés par rapport à la ration du polarisateur. Lorsque la vibration du polariseur est rigou-

reusement perpendiculaire à celle de l'analyseur, le
et R_d sur cette vibration sont égales, et les teintes d
identiques. Mais dès que la vibration de l'analyseu
position, chaque lame prend une teinte différente, e
d'autant plus sensible à l'œil que les deux teintes so

Lames de quartz observées en lumière converg
examine la lame de quartz en lumière convergente,
les particularités que nous avons déjà étudiées avec
avons parlé de piles uniaxes ; nous n'y reviendrons p

Mesure du pouvoir rotatoire du quartz. — Po
voir rotatoire d'une lame de quartz, on peut se
procédés qu'il est intéressant de connaître, parce
nombreuses applications.

On peut d'abord se servir de la teinte sensible.
tournant l'analyseur, de juger assez exactement du
tient cette teinte, parce que de légers déplacement
ou au rouge. Or l'angle dont il a fallu, pour arri
tourner l'analyseur à partir de la position où il est
le polariseur, correspond assez bien à la rotation du
la longueur d'onde est à peu près $0^{mm},000\,550$.

On peut aussi se servir de verres colorés à peu
tiques que l'on interpose au-dessus de l'analyseur
polariseur.

On atteint une exactitude beaucoup plus grande en
Bunsen, dans la flamme incolore desquels on place
sel de lithine, de sodium ou de thallium. On
lumières sensiblement monochromatiques rouge, ja
lesquelles on éclaire successivement l'appareil, en
chacune d'elles l'angle dont il faut tourner l'analys
position rectangulaire sur le polariseur, pour rame

Un procédé qui permet de déterminer la rotation
lumières rigoureusement définies par les raies du sp
imaginé par MM. Fizeau et Foucault et employé ensu
que par un grand nombre d'observateurs.

Supposons qu'on fasse passer à travers une fente
prisme, la lumière qui émerge de l'analyseur, il se
Lorsqu'on fait tourner l'analyseur de manière à en
la vibration émergente du violet, le spectre ne cont

t une bande noire remplace cette couleur. Si l'analyseur continue à ɔurner, on supprime successivement chacune des couleurs du spectre, t l'on voit dans celui-ci une bande noire s'avancer du violet vers le ·ouge. Lorsque cette bande noire est en contact avec une raie du ;pectre solaire, D par exemple, la rotation de l'analyseur donne la rotation correspondant à la longueur d'onde de D, etc.

On a trouvé, par ce procédé, qu'une lame de quartz de 1^{mm} d'épaisseur exerce sur les lumières dont les longueurs d'ondes correspondent aux diverses raies du spectre solaire, les rotations suivantes :

	B	C	D	E	F	G	H
λ =	0^{mm},00068706	65595	58880	52686	48597	43088	3968
ω =	15°,55	17°,22	21°,67	27°,46	32°,69	42°.37	50°,98
$\omega\lambda^2$ =	0^{mm},00000754	741	755	764	773	788	804

On voit que $\omega\lambda^2$ ne varie pas beaucoup et qu'ainsi la rotation n'est pas très éloignée d'être en raison inverse du carré de la longueur d'onde. Il est aisé de voir quelle doit être la forme théorique de la fonction qui représenterait avec une grande exactitude la valeur de ω. Nous avons vu en effet que ω est proportionnel $\frac{\delta^2}{\lambda^2}$, δ étant le retard produit par l'unité d'épaisseur des lames qui composent ces paquets. Or δ peut être représenté, d'après la formule de dispersion de Cauchy, par une expression de la forme $A+\frac{B}{\lambda^2}$ et δ^2, en se bornant aux deux premiers termes, par une expression de la même forme. La rotation ω sera donc exprimée par une expression de la forme $\frac{M}{\lambda^2}+\frac{N}{\lambda^4}$.

M. Boltzmann a, en effet, déduit des nombres que j'ai reproduits plus haut la formule empirique

$$\omega=\frac{7.07018}{10^6\lambda^2}+\frac{0.14983}{10^{12}.\lambda^4},$$

dans laquelle ω est exprimé en degrés et λ en millimètres.

MM. Soret et Sarasin[1] ont vérifié que la formule de Bolzmann représente encore correctement la rotation des rayons ultra-violets.

1. *Journal de Physique.* — T. V, p. 156 (Extrait).

M. Desains a mesuré la rotation du quartz pour fiques infra-rouges. Il employait comme source calo Bourbouze-Wiesnegg. Les rayons, dispersés par un pr saient sur deux grands nicols entre lesquels était quartz, et venaient former un spectre sur un écran. O pile de Nobili très étroite (1mm d'ouverture) une faibl calorifique, et on tournait l'analyseur jusqu'à ce que fût devenue nulle. Pour définir les rayons calorifi la distance qui séparait le rouge extrême de la parti sée, et on notait la région colorée du spectre qui, de à la même distance de cette couleur finale. Voici nombres donnés par M. Desains :

	Région colorée symétrique, par rappo de la région calorifique ol			
	Jaune.	Jaune verdâtre.	Vert bleuâtre.	Bleu.
ω pour 1mm de quartz	6°,8	6°,0	2°,9	2°,08

Définition du pouvoir rotatoire du quartz par de propagation de vibrations circulaires inverse de Fresnel. — Nous avons vu qu'on peut définir l d'une pile, et par conséquent aussi celui du quartz, les deux rayons circulaires inverses entre lesquels o la vibration rectiligne incidente se propagent dans vitesses inégales ; le circulaire droit se propagean cristaux droits, et inversement. Cela revient à dire q laires ont en quelque sorte des indices différents. F qu'ils doivent nécessairement se séparer et se réfract rections légèrement divergentes s'ils viennent à tra plane inclinée par rapport à leur direction.

Pour vérifier cette conclusion, et augmenter la d par la traversée d'une seule surface, qui serait tro observable, Fresnel faisait traverser au rayon lum prisme ABC (fig. 108) taillé dans un cristal droit de m la direction de l'axe, la surface d'incidence AC étan Le faisceau arrivé à la surface inclinée BC rencontre le circulaire droit marche moins vite dans le prisme le prisme droit, il s'approche de la normale tandis gauche s'en éloigne ; le faisceau rencontre ensuite

face BE du prisme un prisme droit, et la séparation des deux circulaires s'accentue encore. On arrive enfin à faire sortir les rayons à travers un plan normal à l'axe, et les deux circulaires, gardant l'écartement relatif qu'ils ont acquis, se propagent ensuite parallèlement dans l'air.

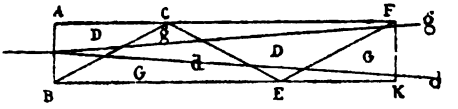


Fig. 108

Pour manifester l'existence des deux rayons circulaires il suffit de les recevoir sur un analyseur circulaire. Si l'analyseur est droit, on recevra le circulaire droit et on arrêtera le gauche et inversement.

Variation du pouvoir rotatoire du quartz sous l'action de la chaleur. — L'action de la chaleur modifie d'une manière assez notable le pouvoir rotatoire du quartz.

M. Fizeau[1] a montré que la variation de ω avec la température t peut être représentée de 0° à 70° par la formule

$$\omega_t = \omega_0 (1 + kt).$$

k étant égal à $0{,}000119t$.

M. Von Lang[2], entre des limites de température un peu plus écartées, a trouvé

$$k = 0{,}000149\,t.$$

M. Sohncke[3] a proposé la formule

$$\omega_t = \omega_0 (1 + at + bt^2),$$

avec

$$a = 0{,}0000999, \qquad b = 0{,}000000318.$$

M. Joubert[4], qui a porté la température jusque vers 1500° en plaçant le cylindre de quartz dans un tube de porcelaine chauffé par des vapeurs métalliques ou placé dans un fourneau chauffé par les huiles lourdes de pétrole, a fait les observations suivantes :

1. Ann. Ch. et Ph. (4), II, 176.
2. J. Phys., V, 36 (1876).
3. Wiedem. Ann. III (1878), et J. Phys., VII, p. 320.
4. J. Phys., VIII, 5 (1878).

	Pouvoir rotatoire de 1mm de quartz.	Coefficie moyen à partir de zéro
—20°.....	21° 599	
0.....	21 658	
100.....	21 982	0,00014
350.....	23 040	0,00018
448.....	23 464	0,00018
840.....	25 259	0,00019
1500?.....	25 420	»

M. Joubert a fait la remarque, intéressante à no échantillons de quartz sont identiques entre eux au pouvoir rotatoire et reprennent exactement, après ref pouvoir primitif, même après avoir été portés aux plus élevées.

Les variations que produit la chaleur dans le pou quartz doivent sans doute être attribuées aux variatio chaleur dans les propriétés biréfringentes des lam biaxes à la superposition desquelles nous attribuons l ciales des cristaux de quartz. Nous verrons en effet chaleur agit sur les constantes optiques de tous les

Relation du pouvoir rotatoire avec l'hémiédr sable. — Les cristaux de quartz possèdent un mode superposable, qui permet d'assigner aux cristaux s gauche, et de distinguer des cristaux droits et des Un semblable mode d'hémiédrie doit d'ailleurs caract ment la symétrie de l'édifice moléculaire d'un cris polarisation rotatoire, puisque le sens de la rotation une droite et une gauche. Il est évident que si la st du cristal était telle qu'une semblable distinction fût aurait aucune raison pour que le cristal fît tourner un sens plutôt que dans un autre, et la rotation d apparaîtrait comme un effet sans cause.

On a constaté que les cristaux qui portent des directes droites (tome I, page 142) et qu'on appelle vue cristallographique, sont *dextrogyres* au point de sation rotatoire ; et qu'inversement les cristaux *gauch* cristallographique sont *lévogyres* au point de vue rotatoire.

Toutefois cette règle est soumise à des exceptions dont nous parlerons plus tard.

Explication du pouvoir rotatoire du quartz. — Les propriétés optiques du quartz s'expliquent, de la manière la plus complète, en supposant que les cristaux de cette substance sont formés à la manière des piles de lames cristallines que nous avons étudiées dans le chapitre précédent. Il s'agit de concevoir comment la structure d'un cristal peut présenter une analogie étroite avec une pile de lames cristallines.

On peut d'abord se représenter les cristaux de quartz comme formés par des molécules ayant la symétrie rhombique, mais susceptibles de s'assembler en un réseau dont le plan réticulaire perpendiculaire à l'axe vertical a pour maille un rhombe de 120°. Un semblable réseau a une symétrie hexagonale.

Si l'édifice moléculaire se construisait avec la régularité théorique, il serait constitué de telle sorte que, le système réticulaire ayant la symétrie hexagonale, et la molécule ayant seulement la symétrie rhombique, l'édifice moléculaire aurait seulement la symétrie rhombique.

Mais considérons les rangées parallèles à l'axe vertical qui est un axe sénaire du réseau et seulement un axe binaire de la molécule. Autour de cet axe, la molécule peut prendre, par une rotation de 120°, trois positions distinctes qui restituent le réseau. Nous pouvons donc supposer que les molécules se superposent de manière que l'une d'elles soit, par rapport à la molécule immédiatement inférieure, tournée de 120° et toujours dans le même sens. Les molécules cesseront d'être toutes semblablement orientées ; le cristal cessera d'être homogène, au sens que nous avons attaché à ce mot dans la théorie générale du tome I, mais le réseau n'aura subi aucune modification.

Il est clair qu'un cristal ainsi constitué jouera exactement, au point de vue optique, le rôle d'une pile composée de paquets ternaires, ou, si l'on ne suppose pas que toutes les molécules situées dans le même plan horizontal ont la même orientation, d'une série de piles parallèles entre elles et constituées de la même façon, ce qu revient au même.

Nous verrons plus tard que cette structure singulière se retrouve, à un degré plus ou moins parfait, dans un nombre très considérable de substances cristallisées. Toutes ces substances sont caractérisées par ce fait que la symétrie de la molécule appartient à un système cristallin moins symétrique que celui auquel appartient la symétrie du réseau.

Ce sont les substances auxquelles j'ai proposé d
pseudo-symétriques.

Il faut d'ailleurs remarquer que la symétrie
molécule, pour la simplicité de l'exposition et pou
les piles de Reusch fût plus complète, n'est nulle
doit même être écartée, car si la molécule avait
cal, la construction que nous avons imaginée donna
une symétrie ternaire autour de cet axe, la sym
axe serait sénaire, et le degré de l'axe du quar
naire.

Mais on peut admettre que la molécule a une
binaire, l'axe binaire étant perpendiculaire à l'ax
ment des molécules ayant lieu de la façon que
l'axe vertical deviendra ternaire, et le cristal ac
axes binaires dans un plan horizontal. D'ailleu
centre, puisqu'une molécule est entourée de pa
même rangée verticale, par des molécules dont l'o
même. Le cristal aura donc l'hémiédrie ternair
mode de symétrie qui peut appartenir aux cristau

**Groupements de portions dextrogyres et
même cristal.** — Les molécules élémentaires du
propriété qui les distingue les unes des autres,
s'empiler, soit dans le sens dextrogyre, soit dans
faut chercher dans les circonstances extérieures
président à la cristallisation les raisons du choix
molécule entre ces deux sens de superposition. A
tous les gisements un nombre à peu près égal de
cristaux gauches.

Mais il y a plus, et le réseau des cristaux droi
celui des cristaux gauches; ces deux réseaux pour
eux pour former un même cristal. Un tel assemb
plus à la surface que par quelques lignes de sut
les stries marquées sur les faces cristallines, et m
des parties droites d'avec les parties gauches. Lo
rieure d'un cristal est formé à la fois de parties
droites, les sommets des unes portent des faces
celles des autres, des faces plagièdres droites. La
du pointement peut donc être gravement altérée.

rare de rencontrer des cristaux qui présentent la régularité des figures en quelque sorte idéales qui sont représentées tome I, page . On peut dire, avec M. Des Cloizeaux[1], « qu'un cristal de quartz homogène dans toute sa masse est une des plus grandes raretés minéralogiques connues ».

Si l'examen de l'enveloppe extérieure de quartz révèle quelquefois, mais imparfaitement, l'enchevêtrement si complexe des cristaux, l'examen optique de lames taillées normalement à l'axe, dévoile au contraire avec une grande fidélité toutes les particularités de la structure interne.

La plupart des cristaux montrent, dans les lames perpendiculaires à l'axe, des juxtapositions de plages inverses. Il arrive en général que cette juxtaposition se fait suivant des surfaces planes parallèles à des plans réticulaires cristallographiquement déterminés. Lorsque ces plans sont inclinés sur la surface de la lame, on voit se superposer deux plages inverses le long d'une bande dont la largeur dépend de l'inclinaison du plan de séparation. La ligne longitudinale qui divise la bande en deux parties égales correspond à la superposition des deux plages inverses d'égale épaisseur, et cette ligne paraît noire entre deux nicols croisés. A partir de cette ligne médiane, l'épaisseur de la plage dextrogyre va en croissant d'un côté et en décroissant de l'autre; on voit donc la teinte varier de part et d'autre et passer graduellement à celles qui caractérisent les plages homogènes, dextrogyre ou lévogyre, qui entourent la bande.

Groupements des cristaux de quartz améthyste. — Il y a des cristaux remarquables dans lesquels l'enchevêtrement des parties dextrogyres et lévogyres, au lieu de se faire sans ordre, est au contraire assujetti à une régularité très curieuse. De ce nombre sont particulièrement les cristaux de quartz colorés en violet et auxquels on donne le nom d'*améthystes*. L'une des dispositions les plus remarquables de ces améthystes, et qui peut servir de type à toutes les autres, est celle qui est représentée d'une façon théorique par le diagramme, figure 109.

Une lame découpée normalement à l'axe la montre partagée par trois bandes très-minces divergeant du centre et normales aux arêtes $e^2\bar{e}^2$, en 3 par-

1. Mémoire sur la cristallisation du quartz. Mémoires des savants étrangers, t. XV, p. 570 (1868).

ties très distinctes. Ces bandes centrales s'étalent
d'arriver au bord de la lame pour se terminer

latéraux dont les côtés sont parallèles aux trois
et les triangles auxquels elles aboutissent ne so

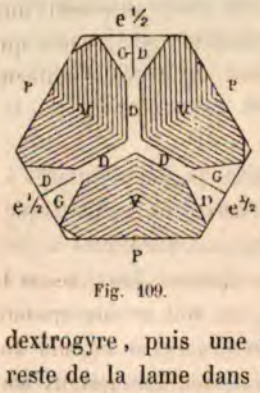


Fig. 109.

matière violette qui p
tal. Les bandes sont
gyrès par exemple. L
minent sont partagés
par une ligne média
l'allongement du mil
deux moitiés d'un tri
verse, et si l'on passe
dans un ordre dète
alternativement une
dextrogyre, puis une moitié lévogyre, et ain
reste de la lame dans lequel la matière colora
concentrée, il est divisé par les trois bande
en trois sections correspondant aux arêtes e^2
traversé par deux séries de plans inclinés sur
qui paraissent parallèles à deux des faces de l
(*V.* tome I, p. 143). Ces plans qui viennent se ren
médiane du secteur sont visibles à l'œil lorsqu
à la lumière. Sous le microscope polarisant, on
deux portions du cristal ayant des rotations inv
clinaison des plans de séparation que les plag
sent en biseau suivant une normale à la lame,
entre deux nicols croisés une série de bandes n
parties de la lame où les parties dextrogyres et
sont d'épaisseur égale.

De semblables lames, lorsqu'elles s'approche
rique (qu'elles n'atteignent jamais complètemen
les observe entre un polariseur et un analyse
curieux phénomènes optiques.

Quartz calcédoine. — On peut s'étonner qu
ne puissent se former que par une succession d
des orientations régulièrement alternées. On ne
cristaux de quartz dans lesquels les molécules a

parallèle et qui seraient alors nettement biaxes et probablement clinorhombiques. Mais on connaît une variété de quartz, dite *calcédoine*, qui ne se présente qu'à l'état d'agrégats cristallins, et qui se montre, sous le microscope, formée de grains à contours irréguliers, dépolarisant très inégalement la lumière et ne s'éteignant complètement dans aucun azimut. On peut conjecturer que la calcédoine est du quartz, dans lequel les circonstances de la cristallisation n'ont pas permis aux molécules de se superposer suivant la loi d'orientation alternée qui paraît nécessaire à la construction et à la stabilité de l'édifice moléculaire cristallin.

II. POLARISATION ROTATOIRE DES CRISTAUX AUTRES QUE LE QUARTZ.

Les cristaux uniaxes et uniréfringents manifestent seuls la polarisation rotatoire. — On connaît un certain nombre de cristaux qui montrent des phénomènes de polarisation rotatoire soumis aux mêmes lois que ceux que présente le quartz. Tous ces cristaux sont uniaxes ou uniréfringents. On a l'habitude d'expliquer cette particularité remarquable en disant que dans les cristaux biaxes, la biréfringence masquerait la polarisation rotatoire, si elle pouvait s'y manifester. Une semblable explication ne présente en réalité aucun sens. Il est certain que les phénomènes de polarisation rotatoire ne seraient pas, dans les cristaux biaxes, ceux que l'on observe dans les cristaux uniaxes, mais ils n'en seraient pas moins nets, et la biréfringence ne les masquerait en aucune façon, pas plus que ne les masque, dans le quartz, la biréfringence suivant les directions inclinées sur l'axe.

Il est facile de voir pourquoi la polarisation rotatoire ne peut pas se rencontrer dans les cristaux biaxes. Nous avons en effet attribué la polarisation rotatoire à la superposition de paquets identiques formés par l'empilement régulier de lames très minces, ce qui revient, comme nous l'avons vu à propos du quartz, à la superposition, suivant la même rangée, de molécules présentant des orientations différentes et régulièrement alternées.

Pour que les molécules prennent ainsi des orientations différentes dans un même édifice cristallin, il faut qu'elles puissent tourner autour d'un certain axe sans que le système réticulaire soit modifié, du moins sensiblement; car c'est le système réticulaire qui règle la figure extérieure du cristal. Il faut donc que la molécule puisse tourner

autour d'un axe qui est un axe de symétrie pour le réseau pas un pour elle-même.

Or, les axes du réseau ne peuvent être que binaires, ter ternaires ou sénaires. Si l'axe de rotation de la molécule supérieur à 2, le cristal acquiert, par l'empilement ré alterné des molécules, un axe de symétrie supérieur à 2, e devient uniaxe ou uniréfringent.

Si l'axe de rotation de la molécule est seulement binai plus que deux orientations distinctes de la molécule ; et da orientations distinctes, les sections principales de l'ellipso optique, normales à l'axe, sont situées à 180° l'une de l'aut gone, dont l'aire est proportionnelle à la rotation, a une su et le cristal n'acquiert pas de propriété rotatoire.

Il résulte donc de notre explication que c'est seulement cristaux uniaxes ou uniréfringents que la propriété rotatoire rencontrée, ainsi que l'ont montré depuis longtemps les o les plus multipliées.

Tableau des substances cristallines connues qui man polarisation rotatoire. — On a réuni dans le tableau sui les substances cristallines, connues jusqu'à ce jour, qui man polarisation rotatoire.

Nous remarquerons, à propos de ce tableau, que le cinabre considérablement sur toutes les autres substances par la gr son pouvoir rotatoire, qui est 15 à 16 fois plus grand que celui Cette rotation énergique s'accompagne d'un pouvoir biréfring dérable. Cela est d'accord avec l'explication que nous avons pouvoir rotatoire des cristaux. Ce pouvoir doit être en effe tionnel au carré du retard provoqué par les lames élémentai dont la superposition donne lieu aux phénomènes de rotati nous est pas possible de connaître ce retard, mais il est p penser qu'il doit être plus considérable pour les substances q festent encore, après le croisement des lames, une double réfra énergique.

Toutes les substances actives montrent également des crista et des cristaux gauches. Cependant pour quelques-unes d'en l'une des formes prédomine. C'est ce qui arrive pour le carb guanidine, dont les cristaux sont presque tous dextrogyres, e sulfate de strychnine, dont les cristaux sont le plus souvent lé

	FORMULE CHIMIQUE.	INDICES PRINCIPAUX ORDINAIRE.	INDICES PRINCIPAUX EXTRA-ORDINAIRE.	ROTATION POUR 1mm (jaune).
	I. *Cristaux sénaires ou ternaires.*			
Cinabre	HgS	2,816	3,142 Li	325° environ
Benzyle	$C^{14}H^{10}O^2$	»	»	24,92
Periodate de soude	$NaIO^4 + 3aq$	»	»	23,3
Quartz	SiO^2	1,544	1,553 Na	21,67
Hyposulfate de potasse anhydre	K^2SO^6	1,455	1,514 Na	8,38
Hyposulfate de plomb hydrate	$PbS^2O^6 + 4aq$	1,635	1,531 Na	5,53
Hyposulfate de chaux hydrate	$CaS^2O^6 + 4aq$	»	»	2,09
Hyposulfate strontiane hydrate	$SrS^2O^6 + 4aq$	1,530	1,525 Na	1,64
Maticocamphre	$C^{10}H^{16}O$	1,5415	1,5104 Li	2,4
	II. *Cristaux quadratiques.*			
Diacétyl-phénol-phtaléine	$C^{20}H^{12}O^4(C^2H^3O)^2$	»	»	19,7
Sulfate d'éthylène diamine	$Az^2H^6C^2H^4SO^4$	»	»	15,45
Carbonate de guanidine	$(CH^5Az^3,^2H^2CO^3$	1,496	1,486	14
Sulfate de strychnine	$(C^{21}H^{22}Az^2O^2)^3H^2SO^4 + 6aq$	»	»	9 à 10°
	III. *Cristaux cubiques.*			
Chlorate de soude	$NaClO^3$	»	»	3,67
Bromate de soude	$NaBrO^3$	»	»	2,80
Sulfantimoniate de soude	$Na^3SbS^4 + 9aq$	»	»	2,7
Acétate d'urane et de soude	$NaC^2H^3O^2 + UO^2.C^4H^6O^4$	»	»	1,8
Alun d'amylamine	$\left.\begin{matrix}(AzH^3C^5H^{11})^2SO^4 \\ Al^2S^3O^{12}\end{matrix}\right\} + 24aq$	»	»	?

Dans tous les cristaux actifs, la rotation varie à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde, comme cela a lieu pour le quartz, et avec une approximation analogue.

Relation entre le pouvoir rotatoire et la forme cristalline. — Les cristaux qui possèdent le pouvoir rotatoire et font tourner, soit à droite, soit à gauche, la vibration incidente, ont nécessairement une structure intérieure qui permet de leur assigner une droite et une gauche, car autrement il n'y aurait aucune raison physique pour que la vibration fût déviée plutôt dans un sens que dans l'autre, et la rotation

n'aurait plus aucune raison d'être. Mais la forme cristalline extérieure n'est pas toujours apte à déceler la dyssymétrie intérieure de l'édifice moléculaire.

Parmi les substances à symétrie sénaire ou ternaire, le periodate de soude, le quartz, l'hyposulfate anhydre de potasse et l'hyposulfite hydraté de chaux ont seuls montré dans leurs formes cristallines l'hémiédrie ternaire holoaxe à formes conjuguées non superposables. Les cristaux qui portent des formes droites sont dextrogyres ; ceux qui portent des formes gauches sont lévogyres.

Parmi les substances quadratiques, on n'a trouvé d'hémiédrie non superposable que dans les cristaux de carbonate de guanidine (Bodewig). Ces cristaux, qui ont la forme octaédrique, montrent en effet de petites faces, non mesurables, d'un hémidioctaèdre droit, et la plus grande partie des cristaux sont dextrogyres.

Les cristaux de sulfate de strychnine n'ont pas de formes hémiédres, mais M. Baumhauer a pu déceler l'hémiédrie de la structure cristalline en provoquant à la surface des cristaux des figures de corrosion. Nous reviendrons plus loin sur cet intéressant procédé d'investigation.

Quant aux cristaux cubiques doués de la polarisation rotatoire, ils accusent tous, sauf l'alun d'amylamine, la dyssymétrie de l'édifice moléculaire, en montrant la coexistence de formes para- et antihémiédriques. Les cristaux sont donc tétartoédriques (*V.* T. I, page 95). Les cristaux droits, c'est-à-dire dans lesquels les faces du dodécaèdre pentagonal sont à droite de celles du dodécaèdre rhomboïdal, lorsqu'on place en haut l'angle non modifié par le tétraèdre, sont dextrogyres, et inversement.

Structure théorique des cristaux quadratiques possédant le pouvoir rotatoire. — Pour concevoir le mode de structure propre à communiquer à un cristal quadratique le pouvoir rotatoire, il ne suffit pas d'imaginer la superposition de lamelles cristallines rhombiques empilées de manière que les sections principales consécutives soient à 90° l'une de l'autre. Il est en effet aisé de voir, en construisant le polygone dont l'aire représente la rotation d'un paquet ainsi composé, que les différents côtés de ce polygone faisant entre eux des angles égaux à 180°, se disposent sur une même droite. L'aire du polygone est donc nulle. D'ailleurs le paquet ne contient en réalité que deux lames, car les sections principales des deux lames inférieures sont respectivement parallèles à celles des deux lames supérieures.

Pour imaginer une construction qui puisse expliquer la structure istalline, on peut supposer que le réseau est quadratique, tandis que s molécules sont anorthiques. Supposons que, sur une certaine hère, O (fig. 110) est le pôle de l'axe quaternaire, P, Q P_1, Q_1, ceux des

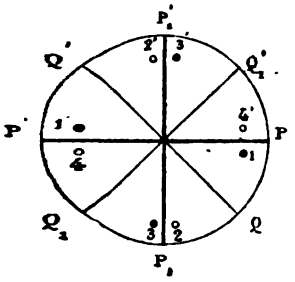


Fig. 110.

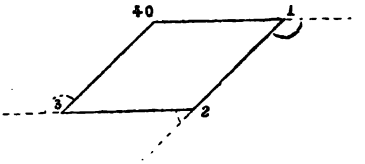


Fig. 111.

quatre axes binaires. Les axes de l'ellipsoïde optique inverse de la molécule sont dirigés d'une manière quelconque par rapport aux axes cristallographiques du réseau, et nous supposons que le point 1 est le

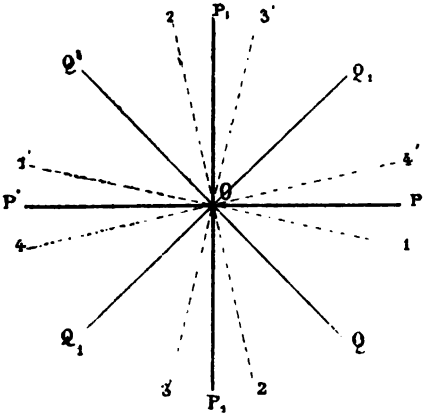


Fig. 112.

pôle de l'un de ces axes. Si nous faisons tourner de 180° le réseau autour de OQ, la molécule changera d'orientation et le pôle 1 de l'ellipsoïde viendra en 2; par une rotation de 180° autour de OP, le pôle vient en 3; et il vient en 4 par une rotation autour de OQ_1.

Par la combinaison de ces quatre orientations de la molécule, l'ellipsoïde résultant a acquis les 4 axes de symétrie binaire OP, OP_1, OQ,

OQ_1, et par conséquent aussi l'axe quaternaire dont le pôle est en O. Le cristal est donc devenu uniaxe.

Le cristal a en outre acquis la polarisation rotatoire. Représentons en effet par O1 (fig. 112) l'un des axes de l'ellipse obtenue en coupant par un plan normal à l'axe quaternaire du réseau l'ellipsoïde inverse de la molécule dans sa position 1; si OQ est la direction de l'axe binaire, et si l'on prend $QO2 = QO1$, O2 est l'axe de même nature dans l'ellipse correspondant à l'orientation 2 de la molécule. On aura de même les axes O3 et O4 correspondant aux orientations 3 et 4.

Il est bien aisé de voir que le polygone de rotation est un certain losange (fig. 111) dans lequel l'angle O12 est égal à π diminué de deux fois l'angle 102 de la figure 112. Chaque côté du parallélogramme est égal à $\frac{1}{4}\delta$, δ étant l'excès sur l'autre axe de celui des axes de l'ellipse qui est dirigé suivant O1. Le pouvoir rotatoire du paquet est égal à

$$r = 4\frac{\pi^2}{\lambda^2}s\varepsilon,$$

s étant l'aire du parallélogramme et ε l'épaisseur de la strate du réseau perpendiculaire à l'axe quaternaire.

Structure théorique des cristaux cubiques possédant le pouvoir rotatoire. — On ne se représente pas la structure d'un cristal cubique doué du pouvoir rotatoire aussi aisément que celle d'un cristal à un axe principal. Dans ce dernier cas, le cristal peut être supposé formé par la superposition de strates cristallines identiques entre elles, sauf par l'orientation des molécules, et l'identité de cette structure avec celles des piles de Reusch est manifeste. Les cristaux cubiques ne peuvent pas avoir une structure aussi simple.

Si nous imaginons un réseau cubique avec une molécule asymétrique, on peut supposer la molécule liée invariablement à l'une des faces d'un hexoctaèdre, et on conclura que la molécule peut recevoir 48 orientations différentes sans que l'alvéole cubique du réseau cesse d'occuper la même position dans l'espace. Si la structure de l'édifice cristallin est telle qu'il possède, également réparties, un même nombre de ces 48 orientations différentes de la molécule, on obtiendra l'ellipsoïde inverse du cristal ainsi composé en construisant autour d'un même centre les 48 orientations correspondantes de l'ellipsoïde inverse qui caractérise une des alvéoles cubiques, et en composant ces ellipsoïdes

entre eux suivant la règle exposée page 271. L'ellipsoïde résultant admettant tous les axes du système cubique holoédrique est une sphère.

Au lieu de donner à la molécule les 48 orientations auxquelles conduit le système des axes de symétrie de l'holoédrie, on peut se borner aux douze orientations différentes qui correspondent aux douze faces de l'hexoctaèdre tétartoédrique (V. tome I, page 94). L'ellipsoïde inverse résultant est encore une sphère, mais en supposant les 12 orientations différentes de la molécule également réparties suivant une certaine loi dans la masse du cristal, celui-ci ne possède que la symétrie tétartoédrique, et, suivant les 12 orientations que l'on aura choisis, le cristal sera tétartoédrique droit ou tétartoédrique gauche.

Quelle que soit la loi uniforme adoptée pour la répartition des 12 orientations moléculaires différentes, les rangées parallèles du réseau pourront, en général, ne pas présenter la même loi de succession dans l'orientation des molécules superposées; mais si nous considérons un cylindre parallèle à ces rangées et de très petite section, il renfermera toutes les variétés que l'on peut rencontrer dans ces rangées.

Si ce cylindre représente un faisceau lumineux traversant le cristal, on pourra le décomposer en autant de faisceaux distincts qu'il comprendra de rangées et chercher pour chaque rangée la rotation produite dans une vibration rectiligne par la traversée du cristal. Les vibrations correspondant à chacun de ces faisceaux interféreront entre elles de manière à donner la vibration résultante. La rotation de cette vibration par rapport à la vibration incidente se produira pour tout faisceau parallèle traversant le cristal suivant la direction donnée.

Si, en conservant toutes choses égales, on substitue aux douze orientations moléculaires considérées les douze autres orientations qui leur seraient symétriques par rapport au centre, le cristal, s'il était droit, deviendra gauche et réciproquement. Tous les nouveaux polygones de rotation seront symétriques des anciens, par rapport à un point; et, suivant une même direction, la rotation de la vibration émergente conservera la même valeur en changeant de sens.

Dans un même cristal, la rotation de la vibration est la même autour des 4 axes ternaires qui persistent dans la tétartoédrie; et, tout autour des 8 pôles de ces axes la surface que l'on obtiendrait en représentant, suivant chaque direction, la rotation par un rayon vecteur proportionnel, sera assimilable à une sphère de même rayon. On peut donc admettre que cette surface est elle-même peu différente d'une sphère, et

que, ainsi que le constate l'observation, la rotation est sensiblement la même suivant toutes les directions.

III. POLARISATION ROTATOIRE DES SUBSTANCES NON CRISTALLISÉES.

Existence et constatation du pouvoir rotatoire dans les substances non cristallisées. — Suivant la théorie, conforme à l'observation, qui a été développée plus haut, le pouvoir rotatoire est communiqué aux cristaux par un certain enchevêtrement régulier de molécules diversement orientées. Il est donc évident qu'il ne peut survivre à la structure cristalline qui le produit. La fusion, la dissolution, la vaporisation devront donc faire évanouir le pouvoir rotatoire dans les substances cristallines énumérées plus haut.

C'est en effet ce qui se produit pour toutes ces substances, sauf pour deux d'entre elles, le sulfate de stychnine et l'alun d'amylamine. Nous reviendrons sur ces deux exceptions remarquables.

Mais Biot a découvert qu'un assez grand nombre de substances non cristallisées, solides, liquides ou gazeuses, possèdent un certain pouvoir rotatoire. Pour manifester cette propriété on dispose, dans un tube, une assez longue colonne, de 1 décimètre et plus, de la substance, en général liquide, que l'on veut étudier. On fait tomber un faisceau de lumière polarisée, qui se propage parallèlement à l'axe de la colonne, et dont on connaît, à l'incidence, la direction de vibration. Le faisceau qui émerge de la substance est reçu sur un analyseur. Si on opère avec une lumière monochromatique, on mesure la rotation qu'exerce la substance en mesurant l'angle dont il faut tourner l'analyseur, à partir de la position où il est croisé à angle droit sur le polariseur, pour rétablir l'obscurité supprimée par l'introduction de la colonne dans le faisceau.

Biot, au lieu d'employer de la lumière monochromatique, se servait ordinairement de verres rouges colorés par l'oxyde de cuivre et qui ne laissent guère passer que des rayons rouges dont la longueur d'onde est de $0^{mm}000\,628$ environ.

Il arrive d'ordinaire que le pouvoir rotatoire de la substance varie à peu près en raison inverse du carré de la longueur d'onde. Si l'on opère pour la lumière blanche, on peut alors, en tournant l'analyseur, à partir de la position où il est croisé à angle droit sur le polariseur, trouver, comme pour le quartz, une teinte sensible, et la rotation de l'analyseur est sensiblement égale à celle qui correspond au jaune moyen.

·sque le pouvoir rotatoire de la substance suit ainsi les mêmes lois elui du quartz, on peut encore le mesurer en cherchant quelle est isseur d'une lame de quartz de sens inverse qui le compense. Si la ance est dextrogyre par exemple, on interpose sur le passage du eau lumineux une bilame de quartz lévogyre formée de deux s prismatiques mobiles. En faisant mouvoir l'une de ces lames rapport à l'autre, on fait varier l'épaisseur totale de la bilame jus- ce que la compensation ait lieu. Ce procédé exige que la substance incolore.

Lois de la polarisation rotatoire de dissolution. — Supposons il s'agisse d'une substance dite *active*, et mise en dissolution dans un uide *inactif*, tel que l'eau, l'alcool, l'éther, etc. Appelons p le poids la substance active dissoute dans l'unité de poids du mélange qui con- nt ainsi en poids $1-p$ du dissolvant, et soit δ la densité du mélange.

volume occupé par l'unité de poids de ce mélange est $\frac{1}{\delta}$, et le ids de la substance active contenu dans l'unité de volume est $\frac{}{} = p\delta$. Si l'on expérimente sur un volume de longueur l, le poids

le matière active contenue dans un cylindre de longueur l et ayant une section égale à l'unité est égal à $lp\delta$. Or, Biot a montré, par de nom- reuses expériences, que la rotation ρ produite par le cylindre de longueur l est représentée par la formule

$$\rho = [\alpha]\, lp\delta.$$

Dans cette formule, on prend ordinairement pour unité de longueur le *décimètre* et pour unité d'angle le *degré*. L'angle est considéré comme positif quand la rotation est dextrogyre, comme négatif quand elle est lévogyre.

Pour une couleur ayant une longueur d'onde donnée, $[\alpha]$ est à peu près constant pour une même substance active, et à peu près indépen- dant de la quantité relative du dissolvant et même de la nature du dissolvant.

Le coefficient $[\alpha]$ reste encore sensiblement le même lorsque $p = 1$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a plus de dissolvant, et que la matière active est maintenue en dissolution par la fusion. Lorsque le corps fondu se

solidifie sans prendre l'état cristallin, il présente encore à l'état solide un pouvoir rotatoire caractérisé par le même coefficient $[\alpha]$. C'est ce que l'on observe, par exemple, lorsque l'on compare le pouvoir rotatoire des dissolutions de sucre, à des états variables de concentration, avec celui de sucre d'orge qui est presque anhydre.

Lorsque la matière active peut être réduite à l'état de vapeur, on constate, en enfermant la vapeur dans un long cylindre de verre, qu'elle jouit encore du pouvoir rotatoire. Si dans la formule on substitue à $lp\delta$ le poids de la vapeur contenue dans un cylindre de longueur l et de section égale à 1, on trouve que la rotation d'un cylindre de longueur l est encore donnée par la même formule dans laquelle $[\alpha]$ garde la même valeur.

La conséquence évidente de ces faits, c'est que le pouvoir rotatoire des substances non cristallisées a sa cause dans la nature et la configuration de la molécule; que c'est en un mot une propriété essentiellement moléculaire,

Guidé par ces idées, Biot avait donné au coefficient $[\alpha]$ le nom de *pouvoir rotatoire moléculaire*. Il vaut peut-être mieux le désigner sous le nom de *pouvoir rotatoire spécifique*, car le coefficient $[\alpha]$ représente la rotation qui serait effectuée par une colonne de longueur 1 contenant l'unité de poids de la substance active dans l'unité de volume. Si nous voulons comparer entre eux les pouvoirs rotatoires exercés par les molécules de deux substances actives différentes, il faudra multiplier $[\alpha]$ par le poids moléculaire P propre à chacune d'elles, et le coefficient P $[\alpha]$ peut alors recevoir plus correctement le nom de *pouvoir rotatoire moléculaire* En réalité, pour ne pas avoir de trop grands nombres, on donne ce nom au produit $[M] = \frac{P[\alpha]}{100}$.

Le coefficient $[\alpha]$ varie, pour une même substance active avec la longueur d'onde. La loi de cette variation est à peu près la même que pour les substances cristallisées, c'est-à-dire qu'elle est *à peu près* en raison inverse du carré de la longueur d'onde.

Si le même dissolvant renferme deux ou plusieurs substances actives différentes et sans action chimique l'une sur l'autre, les rotations propres à chaque substance prise isolément s'ajoutent *algébriquement*; la rotation dextrogyre étant considérée comme positive, suivant la convention déjà mentionnée, et la rotation lévogyre, comme négative.

Les lois générales ne sont qu'approximatives. — Toutes les lois que nous venons d'énoncer ne sont d'ailleurs qu'approximatives, et les diverses substances actives s'en écartent toujours plus ou moins.

C'est ainsi que le pouvoir rotatoire moléculaire varie un peu avec la proportion de dissolvant; en général il augmente avec cette proportion; quelquefois c'est l'inverse, comme pour le camphre. Les variations sont considérables pour l'acide tartrique, mais elles tiennent sans doute à une action chimique du dissolvant.

Le pouvoir rotatoire moléculaire peut aussi varier avec le temps qui s'est écoulé depuis la formation de la dissolution. Il augmente encore après deux mois, avec les solutions d'essences dans l'alcool.

Le pouvoir rotatoire moléculaire peut encore varier avec la nature du dissolvant, et cette variation est quelquefois considérable, comme il arrive surtout pour les dissolutions des alcaloïdes dans l'eau, l'alcool ou le chloroforme.

Si la molécule n'était point altérée par la chaleur, le pouvoir rotatoire moléculaire serait indépendant de la température, qui n'aurait pour effet, comme la dilatation ou la vaporisation, que d'écarter plus ou moins les molécules les unes des autres. Il n'en est point ainsi, et M. Gernez a trouvé que pour les essences d'orange, de bigarade et de térébenthine, on pouvait poser

$$[\alpha] = a - bt - ct^2.$$

Les valeurs de a, b, c pour la raie D sont les suivantes :

	a	b	
Essence d'orange (dextrogyre)....	115.91	0.1237	0.000016
— de bigarade —	118.55	0.1175	0.000216
— de térébenthine (lévogyre)	36.61	0.004437	0

Enfin la loi de la dispersion rotatoire n'est pas plus rigoureusement celle de la proportionnalité à l'inverse du carré de la longueur d'onde, que cela a lieu pour les substances cristallisées. En général les écarts sont du même ordre que pour celles-ci. Il en est autrement pour quelques substances telles que l'acide tartrique dissous dans l'eau, l'alcool éthylique et l'esprit-de-bois. Il est très vraisemblable que dans ce cas la dissolution a pour résultat de modifier la forme de la molécule, ou, en d'autres termes, que le dissolvant agit chimiquement sur la substance active.

Relation entre le pouvoir rotatoire des dissolutions et la forme des cristaux. — Lorsqu'une substance active peut prendre l'état cristallin, comme cela a lieu pour l'acide tartrique, le sucre, etc., on constate *en général* que les cristaux présentent un mode d'hémiédrie non superposable. Le sens de cette hémiédrie est en rapport avec le sens de la rotation des dissolutions. Les dissolutions lévogyres donnent des cristaux à formes gauches; et les dissolutions dextrogyres, des cristaux à formes droites.

Toutefois on connaît des dissolutions actives comme celles du camphre ordinaire, du camphre de patchouli, du camphre de menthe, *qui* donnent des cristaux dans lesquels l'hémiédrie n'est pas observable. Mais nous savons que des cristaux dont la structure est hémiédrique, ne la décèlent pas toujours dans leur forme extérieure.

Il faut remarquer avec soin la différence considérable qui existe entre les cristaux hémiédriques d'une substance telle que l'acide dextrotartrique dont les dissolutions sont actives et dextrogyres, et les cristaux hémiédriques d'une substance telle que le chlorate de soude *dont* les cristaux sont actifs, tandis que la dissolution ne l'est pas.

Dans les cristaux de chlorate de soude, l'hémiédrie de l'édifice cristallin n'est produite, comme nous l'avons vu, que par une distribution régulièrement alternée de molécules diversement orientées. Il en résulte cette conséquence, conforme à l'observation, que les dissolutions de chlorate de soude, et en général toutes les dissolutions des substances actives à l'état cristallin, peuvent donner à la fois des cristaux droits et des cristaux gauches. Si l'on prend des cristaux de chlorate de soude exclusivement gauches, la dissolution de ces cristaux donne, par évaporation, un mélange de cristaux droits et de cristaux gauches.

Pour les cristaux d'acide dextrotartrique au contraire, l'hémiédrie provient de la forme dyssymétrique de la molécule, et tous les cristaux de cette substance, quelle que soit la manière dont on les obtienne, *sont* toujours droits. On ne peut obtenir des cristaux gauches qu'à la condition de modifier la forme de la molécule, et alors la substance est chimiquement différente; l'acide lévotartrique n'est plus qu'un isomère de l'acide dextrotartrique, et les propriétés physiques ou chimiques des deux substances sont plus ou moins dissemblables.

C'est ainsi que l'acide dextrotartrique est le seul qui se rencontre dans la nature, et que l'acide lévotartrique, resté longtemps inconnu, a été découvert par M. Pasteur qui l'a préparé au moyen d'un autre isomère de l'acide tartrique, l'acide racémique.

Il peut même arriver que des deux formes droite ou gauche de la substance, une seule puisse être obtenue. Le sucre $C^{12} H^{22} O^{11}$ est dans ce cas et n'est encore connue que sous sa forme droite.

Substances actives en cristaux et en dissolution. — Sulfate de strychnine et alun d'éthylamine. — Les dissolutions des substances actives ne donnent pas en général des cristaux actifs, tandis que les cristaux actifs ne donnent pas en général des dissolutions actives. On ne connaît jusqu'à présent que deux substances faisant exception à cette règle, le sulfate de strychnine et l'alun d'amylamine.

Le sulfate de strychnine cristallisé vers 40° contient 5 équiv. d'eau (Rammelsberg), et cristallise dans le système clinorhombique sans manifester aucune propriété rotatoire particulière. Cristallisé au contraire à la température ordinaire, il contient 6 équiv. d'eau (Rammelsberg) et cristallise dans le système quadratique. Ces cristaux, qui ne possèdent pas de faces susceptibles d'accuser l'hémiédrie non superposable, manifestent une polarisation rotatoire telle que 1^{mm} d'épaisseur fait tourner de 9° à 10° les rayons jaunes moyens. On n'a jusqu'à présent rencontré que des cristaux lévogyres. La solution est aussi lévogyre et on a :

$$(\alpha) = -28^{\circ},5.$$

La densité des cristaux est 1.398.

D'après ces derniers nombres, le pouvoir rotatoire des cristaux sur 1^{mm} d'épaisseur, devrait être

$$0,01 \times 28,5 \times 1,498 = 0^{\circ},4.$$

Ce pouvoir rotatoire, étant en réalité de 9°,5 environ pour les rayons jaunes, est donc environ 24 fois plus considérable que celui de la substance dissoute. Il faut remarquer que ce calcul suppose que l'orientation des molécules qui existe dans les cristaux et ne se rencontre pas dans les dissolutions, est sans influence sur le pouvoir rotatoire, ce qui est certainement inexact.

Le pouvoir rotatoire de l'acide persiste dans les sels. — Lorsqu'un acide est actif, ses sels sont en général actifs; l'acide droit donne des sels droits, et inversement. Cet important caractère se marque très clairement dans l'acide tartrique et les tartrates. L'acide dextrotartrique donne des dextrotartrates et l'acide lévotartrique, des lévotartrates. Le dextrotartrate et le lévotartrate d'une même base ont ordinairement la même forme cristalline, mais ces

formes sont toujours symétriques l'une de l'autre. En général les dextrotartrates ont des formes hémièdres droites et les lévotartrates des formes hémièdres gauches; il n'y a que quelques rares exceptions à cette règle; le dextro-bitartrate de thallium, par exemple, a montré des formes hémièdres gauches. Nous avons déjà dit, à propos des formes hémiédriques que des formes hémièdres gauches pouvaient se produire dans un édifice moléculaire droit.

Explication du pouvoir rotatoire des substances non cristallisées. — Il n'est pas douteux que le pouvoir rotatoire des substances non cristallisées ne soit uniquement dû au passage des rayons lumineux à travers la molécule. C'est donc dans la constitution de la molécule qu'il faut chercher la cause de cette propriété.

L'identité des lois de la polarisation rotatoire que présentent les dissolutions et de celle que montrent les cristaux, principalement en ce qui regarde la dispersion, rend très probable que l'explication de cette propriété doit être la même dans les deux cas. Il est en effet facile de comprendre que la disposition des atomes dans la molécule peut jouer le même rôle que celle des molécules dans les substances cristallisées. Si nous admettons que l'espace très petit dans lequel vibre l'atome est un milieu biréfringent, l'arrangement régulier des atomes qui donne naissance à la molécule produit le même effet, au point de vue optique, que l'arrangement des cellules réticulaires dans les cristaux uniaxes ou cubiques. Les molécules d'un cristal formant ainsi autant de paquets identiques entre eux et semblablement orientés, un cristal peut être considéré comme un assemblage analogue aux piles de Norremberg et de Reusch.

Lorsque l'arrangement atomique de la molécule est tel qu'on ne peut pas distinguer de cet arrangement celui qui lui serait symétrique par rapport à un point, la molécule n'exerce aucune action rotatoire sur un faisceau lumineux qui la traverse suivant une direction quelconque. C'est en effet ce qui résulte de la théorie exposée dans le chapitre précédent. Le cristal ne manifeste alors que les propriétés biréfringentes ordinaires; et il est très remarquable qu'il soit permis de considérer ces propriétés biréfringentes comme produites par les molécules elles-mêmes, indépendamment de leur arrangement réticulaire.

Lorsque la molécule présente cette dyssymétrie spéciale qui fait qu'on peut lui assigner une droite et une gauche, le faisceau lumineux qui la traverse éprouve une rotation variable avec la direction du fais-

ceau. Cette rotation est toujours très faible. Nous avons vu en effet que la rotation du grand axe de l'ellipse vibratoire incidente est, toutes choses égales, proportionnelle à l'épaisseur des milieux biréfringents superposés. Dans les cristaux, cette épaisseur est de l'ordre des distances intermoléculaires; dans les molécules, elle est de l'ordre des distances interatomiques, qui sont sans aucun doute beaucoup plus faibles que les premières.

Il résulte naturellement de là que, pour rendre sensible la polarisation rotatoire produite par l'arrangement atomique, il faudra faire traverser au faisceau un nombre extrêmement considérable de molécules. C'est sans doute pour cette raison que les cristaux des substances actives, qui ne peuvent jamais être observés sous des épaisseurs bien considérables, ne montrent pas de polarisation rotatoire. Lorsque le contraire a lieu, comme pour le sulfate de strychnine, c'est qu'alors les cellules réticulaires des molécules dyssymétriques se groupent entre elles comme celles du quartz et des autres substances actives à l'état cristallisé. Le pouvoir rotatoire des cristaux tels que le sulfate de strychine est ainsi dû à un phénomène de cristallisation entièrement distinct de la forme de la molécule ; aussi la grandeur de la polarisation rotatoire des cristaux n'a-t-elle aucun rapport avec celle de la polarisation rotatoire de la dissolution.

Lorsque la substance active est dissoute, fondue ou volatilisée, les molécules ne sont plus orientées parallèlement, et la parfaite identité des propriétés de la matière, suivant toutes les directions, rend nécessaire d'admettre qu'une droite quelconque, menée à travers cette matière, rencontre, sur une très petite longueur, un même nombre de molécules ayant toutes les orientations possibles. Dans ces conditions, il est évident que, lorsqu'un faisceau lumineux traverse un semblable milieu suivant une direction quelconque, les phénomènes biréfringents s'annulent; car si une vibration rectiligne traversant un certain nombre de molécules acquiert un retard égal à $+r$, cette même vibration acquerra le retard $-r$ en traversant un nombre précisément égal de molécules disposées de manière que la section principale normale au faisceau, soit à angle droit sur celle des premières. La biréfringence disparaît donc, et une vibration rectiligne à l'incidence ressort rectiligne à l'émergence.

Il n'en est pas de même de la polarisation rotatoire ; la grandeur de la rotation est variable avec l'orientation de la molécule, mais les rotations qui correspondent à toutes les orientations possibles de la molécule ne se compensent pas, au moins en général, et la vibration du

faisceau, après la traversée de toutes ces orientations possibles éprouve une rotation moyenne spécifique, qui est la même suivant toutes les directions, et qui est proportionnelle au nombre des molécules traversées.

Cette rotation est d'ailleurs toujours en raison inverse du carré de la longueur d'onde, puisque c'est la loi générale qui régit, au moins approximativement, la rotation produite par la traversée d'un nombre quelconque de milieux biréfringents.

On retrouve donc ainsi, par une hypothèse très vraisemblable, toutes les lois de la polarisation rotatoire moléculaire.

L'explication que nous avons donnée de la polarisation *rotatoire*, que l'on peut appeler moléculaire, pour la distinguer de celle qui est propre à l'arrangement cristallin, conduit à admettre que les cristaux formés par des molécules à symétrie non superposable devraient manifester un pouvoir rotatoire si on pouvait les observer sur une épaisseur assez considérable. Il est même difficile de comprendre comment il en pourrait être autrement, et comment le pouvoir rotatoire, qui persiste lorsque les molécules font partie d'un liquide ou d'une vapeur, *disparaîtrait* lorsque les molécules sont régulièrement groupées dans un édifice cristallin. Cela est d'autant plus improbable que la molécule garde entièrement sa forme à travers tous ces changements d'état, puisque la dyssymétrie du cristal traduit celle de la molécule.

En général, en effet, la rotation qu'on pourrait observer avec les épaisseurs ordinaires des lames cristallines est faible. Nous avons déjà vu, pour le sulfate de strychine, que le pouvoir rotatoire des cristaux, en admettant qu'il soit, suivant l'axe des cristaux, le même qu'en dissolution, ne serait que de $0^{\circ},4$ pour une lame de 1^{mm} d'épaisseur, ou 4° pour 1 centimètre. Une rotation aussi faible serait très malaisée à observer.

Il y a cependant des substances pour lesquelles cette conclusion est peu admissible. Le camphre de patchouli, par exemple, cristallise d'après M. Des Cloizeaux, en prismes hexagonaux réguliers, et des lames de 7^{mm} d'épaisseur ne manifestent pas le pouvoir rotatoire. La densité des cristaux est 1,03. Les dissolutions sont actives et

$$(\alpha)_j = -238^{\circ}.$$

Si les cristaux possédaient, suivant l'axe principal, un pouvoir rotatoire égal à celui des dissolutions, la rotation serait de $-2^{\circ},44$ pour

de 1^{mm} d'épaisseur, et de $-17^{\circ},08$ pour une lame de 7^{mm}. Il
ifficile qu'une rotation semblable, quoique encore faible, puis-
st à peu près égale à $\frac{1}{10}$ de celle du quartz, échappe complète-
'observation.

tre n'est-ce pas suivant l'axe sénaire que la rotation molécu-
t la plus grande? suivant cette direction le pouvoir rotatoire
t même être plus faible que la rotation moyenne observée dans
olutions.

CHAPITRE X.

DOUBLE RÉFRACTION ACCIDENTELLE

Les perturbations que la propagation de la lumière éprouve dans l'intérieur d'un corps dépendent évidemment de la nature et de l'arrangement des particules matérielles qui composent ce corps. Toute action qui altère cette nature ou cet arrangement est donc de nature à altérer aussi le mode de la propagation lumineuse. Lorsque l'action ne s'exerce pas de la même façon suivant les différentes directions de l'espace, le corps peut devenir biréfringent s'il était primitivement isotrope : ou bien la double réfraction que le corps possédait d'abord peut subir des modifications plus ou moins profondes.

Telle est la cause générale des faits que l'on groupe ordinairement sous le nom de double réfraction accidentelle.

I. DOUBLE RÉFRACTION PRODUITE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE.

Verre comprimé. — Parmi toutes les actions qui peuvent produire la double réfraction accidentelle, les plus simples à mettre en jeu sont les actions mécaniques.

Si l'on comprime entre les deux mâchoires d'une presse, un cube de verre homogène et sans action sur la lumière polarisée, et si l'on place le cube ainsi comprimé entre un polariseur et un analyseur croisés à angle droit, on voit l'introduction du cube rétablir la lumière, à moins que la direction suivant laquelle s'exerce la compression ne soit parallèle à la vibration de l'un des nicols. On constate en outre aisément, au moyen d'une lame sensible ou d'une lame quart d'onde, que la vibra-

tion parallèle à la direction de la pression est la plus rapide à se propager. L'inverse a lieu si le cube est tiré au lieu d'être comprimé.

Si la pression est exercée au moyen d'un poids, et si l'on mesure, avec un compensateur, la différence de marche qui correspond à une certaine pression, on constate que ces deux quantités varient proportionnellement l'une à l'autre. Cela pouvait se prévoir *a priori*, comme on peut prévoir que cette proportionnalité ne se maintient pas lorsque la pression dépasse certaines limites.

Lorsqu'un parallélipipède de verre dont la hauteur est h, dont la base a pour largeur l et pour épaisseur e, est chargé sur cette base d'un poids P réparti uniformément, la pression exercée sur l'unité de surface est $\frac{P}{le}$. Quand le faisceau lumineux traverse le verre parallèlement au côté e de la base, la différence de marche observée est ed, si d est la différence de marche engendrée par la pression et rapportée à l'unité d'épaisseur. La loi du phénomène est que d est proportionnel à la pression, ou à $\frac{P}{le}$. On a donc

$$d = k\frac{P}{le},$$

k étant une constante.

La différence de marche observée à travers l'épaisseur e est ainsi :

$$ed = k\frac{P}{l};$$

elle est par conséquent indépendante de l'épaisseur e.

Si le faisceau lumineux observé traversait le parallélipipède suivant le côté l de la base, la différence de marche observée serait de même égale à

$$ld = k\frac{P}{e}.$$

Le parallélipipède de verre étant devenu un milieu homogène biréfringent, les propriétés optiques doivent en être représentées par un ellipsoïde. Cet ellipsoïde est nécessairement de révolution autour de la direction de la pression. Le verre comprimé agit donc comme un cristal uniaxe dont le signe est négatif puisque la vitesse de propagation de la vibration dirigée suivant l'axe de compression est la plus grande.

Formules mathématiques représentant la loi du phénomène. — Il est aisé d'obtenir des formules représentant le phénomène que nous venons de décrire sommairement. Quelle que soit en effet la véritable nature de la force que nous avons appelée l'élasticité optique, il nous suffit de savoir qu'elle varie avec la déformation de la substance, pour que nous puissions relier cette force élastique à la déformation par des relations de la même forme que celles qui ont été établies dans le chapitre II entre les forces élastiques mécaniques et la déformation. Dans un cas comme dans l'autre, d'ailleurs, les formules données par la théorie ne seront applicables que dans les limites où l'on peut supposer que l'effet est proportionnel à la cause.

Supposons qu'un corps solide ait subi, sous l'action de forces quelconques, une certaine déformation, et que cette déformation soit définie en chaque point par un certain ellipsoïde.

Si l'on évalue, suivant un plan quelconque, la force élastique optique qui existait, au point considéré, avant la déformation ; la variation que produit cette déformation pour chacune des composantes de la force se déduira des δ et des α correspondant à la direction choisie, au moyen des formules (6) de la page 25. Dans ces formules entrent 21 coefficients, différents bien entendu de ceux qui conviennent à l'élasticité mécanique, et qui devront être, pour chaque corps, déterminés par l'expérience. Lorsque le corps cristallise dans un système symétrique les formules se simplifient et le nombre des coefficients diminue comme il est dit aux pages 38, 39 et 40.

Au moyen de ces formules, on pourra déterminer, en chaque point du corps, la forme et l'orientation de l'ellipsoïde d'élasticité optique. En général cet ellipsoïde variera d'un point à un autre, et les phénomènes biréfringents produits par la traversée du corps tout entier s'obtiendront par des calculs analogues à ceux que nous avons appliqués à des milieux non homogènes, tels que ceux qui sont produits par la superposition de lames minces cristallines.

Après avoir indiqué le procédé général qui permettrait de résoudre le problème dans tous les cas, nous nous restreindrons à l'examen de quelques cas particuliers très simples.

Soit un prisme comprimé sur deux de ses bases opposées par une force normale (pression ou traction) égale à p par unité de surface. On aura (Voir page 45) :

$$\delta_x = pB'_y, \qquad \delta_y = pB'_x, \qquad \delta_z = pA'_z,$$
$$\alpha_x = pC'_z, \qquad \alpha_y = pD'_z, \qquad \alpha_z = pF'_z,$$

A′, B′, etc., étant les coefficients inverses de l'élasticité mécanique.

Supposons que le corps soit isotrope ou cristallisé dans le système cubique; les C′, D′, F′ sont égaux à zéro; il en est de même par conséquent des α_x, α_y, α_z; on a $B'_y = B_x$, d'où résulte $\delta_x = \delta_y$. L'ellipsoïde de déformation est ainsi de révolution autour de l'axe des z.

Si nous désignons par N_x, N_y, N_z, T_x, T_y, T_z les composantes des forces élastiques optiques qui s'exercent suivant les 3 plans coordonnés, par A et B les coefficients directs de l'élasticité optique, les formules (11) de la page 40 montrent que les T sont nuls, et que $N_x = N_y$, ce qui indique que l'ellipsoïde d'élasticité optique est aussi de révolution autour de l'axe des z. Les mêmes formules donnent

$$N_x = N_0 + (A + B)\delta_x + B\delta_z,$$
$$N_z = N_0 + 2B\delta_x + A\delta_z,$$

en désignant par N_0 la force élastique qui s'exerçait également suivant toutes les directions avant la déformation. Si l'on se rappelle que N_x, N_z, N_0, sont proportionnels aux carrés des vitesses de propagation lumineuse, en appelant V la vitesse de propagation de la vibration perpendiculaire à la direction de la pression, V′ celle de la vibration parallèle à cette direction, v la vitesse de toutes les vibrations avant la déformation, on aura :

$$V^2 = v^2 + (A + B)\delta_x + B\delta_z,$$
$$V'^2 = v^2 + 2B\delta_x + A\delta_z.$$

Telles sont les formules données jadis par Neumann. On peut mesurer expérimentalement V^2, V'^2, v^2, et on en déduira les constantes A et B si l'on connaît en même temps δ_x et δ_z.

Expériences de Neumann. — A l'époque où Neumann a publié ses travaux, on supposait que, dans les corps isotropes, on a toujours $\delta_x = -\frac{1}{4}\delta_z$. Si l'on admettait la réduction à 15 des 21 coefficients de Green (telle qu'elle est exposée pages 56 à 58), on aurait $\delta_y = -0{,}4\delta_z$. Mais l'isotropie que suppose cette dernière réduction semble bien rarement atteinte par les corps solides, et il paraît préférable de laisser indéterminée et de chercher directement par l'expérience la

valeur du rapport $\frac{\delta_x}{\delta_z}$. Les expériences de M. Mach conduisent à la valeur $\frac{\delta_x}{\delta_y} = -0{,}239$, assez voisin du nombre $-0{,}25$ qu'admettait Neumann.

Pour mesurer V^2 et V'^2, Neumann se servait d'une expérience due à Brewster, qui consiste à courber un prisme de verre reposant sur deux appuis. Suivant la théorie ordinaire de la flexion, il se trouve dans le prisme une fibre neutre qui ne subit aucune déformation, et qui sépare les fibres allongées des fibres raccourcies.

Si l'on observe le milieu de la verge entre deux nicols croisés, dont les vibrations sont inclinées de 45° sur l'axe de cette verge, on voit la fibre neutre se dessiner par une ligne noire de part et d'autre de laquelle des lignes isochromatiques indiqueront le retard correspondant à chaque partie de la verge. Comme la théorie de la flexion donne pour chaque point l'allongement, ou le raccourcissement δ_z, on connaîtra le retard $\frac{1}{V'} - \frac{1}{V}$ en fonction de δ_z.

Pour trouver l'expression de $\frac{1}{V'} - \frac{1}{V}$ on peut opérer comme suit.

La variation relative produite dans la vitesse de propagation étant toujours faible, on peut extraire les racines carrées de V et V' par approximation, ce qui, en posant :

$$\frac{A}{2v} = q, \qquad \frac{B}{2v} = p,$$

donne :

$$V = v + (p + q)\delta_x + p\delta_z,$$
$$V' = v + 2p\delta_x + q\delta_z.$$

Si l'on pose encore $\delta_x = -k\delta_z$, k étant le rapport de la dilatation transversale à la contraction longitudinale, les formules deviennent

$$V = v + [-kq + (1-k)p]\delta_z \qquad \text{ou} \qquad \frac{V - v}{\delta_z} = (1-k)p - kq,$$

$$V' = v + (q - 2kp)\delta_z \qquad \text{ou} \qquad \frac{V' - v}{\delta_z} = q - 2kp,$$

ınt négatif dans le cas de la compression et positif dans le cas de ıction.

ı en déduit, par le même procédé d'approximation :

$$\frac{1}{V}-\frac{1}{V'}=-\frac{p-q}{v^2}(1+k)\delta_z.$$

a compression du verre et de tous les corps solides essayés jusqu'ici ne toujours $\frac{1}{V'}>\frac{1}{V}$; comme δ_z est alors négatif, $\frac{p-q}{v^2}(1+k)$ est ıtif.

Neumann a trouvé, avec un verre à glaces pour lequel v était égal à ı54 :

$$\frac{\frac{1}{V}-\frac{1}{V'}}{\delta_z}=-\frac{p-q}{v^2}(1+k)=-0.158.$$

En faisant interférer les rayons qui avaient traversé la partie dilatée e la verge fléchie, avec ceux qui avaient traversé la partie contractée, t observant le déplacement des franges, Neumann a pu déterminer non eulement $\frac{1}{V'}-\frac{1}{V}$, mais encore V et V', et il a trouvé :

$$\frac{V'-v}{\delta_z}=(1-k)p-kq=-0.029,$$

$$\frac{V-v}{\delta_z}=q-2kp=-0.097.$$

Il résulte de là que, dans le cas de la compression, c'est-à-dire quand δ_z est négatif, V et V' sont l'un et l'autre plus grands que v.

Il en résulterait que la compression, qui correspond à un accroissement de densité, augmente la vitesse de propagation ou diminue l'indice de réfraction. Ce résultat paraît être en opposition avec la loi de Gladstone, vérifiée il est vrai plutôt pour les liquides que pour les solides.

M. Mach a repris les observations de Neumann par d'autres méthodes d'observation, et il est arrivé à des résultats peu différents.

Expériences de Wertheim. — Dans la série nombreuse d'observations qu'il a faites sur ce sujet, Wertheim observait la différence de marche produite dans un parallélipipède d'une substance isotrope, sous

l'influence d'une pression connue. Il se dispensait d'avoir recours au compensateur en opérant comme il suit. Il prenait pour analyseur un prisme de spath donnant les deux images et dont la section principale était croisée à angle droit sur la vibration du polariseur. Avant la compression, l'image extraordinaire apparaissait donc seule. En chargeant de poids le cube de verre, on voyait l'image ordinaire apparaître et l'image extraordinaire diminuer d'intensité, puis disparaître au moment précis où la différence de marche engendrée par la pression était égale à une demi-longueur d'onde, $\frac{\lambda}{2}$. En continuant à ajouter des poids, on arrivait à rétablir l'image extraordinaire, puis à faire disparaître l'image ordinaire lorsque la différence de marche était égale à une longueur d'onde ; et ainsi de suite.

On pouvait aussi, lorsqu'on employait la lumière blanche, évaluer les différences de marche par la succession des teintes observées soit dans l'image extraordinaire, soit dans l'image ordinaire.

Voici les principaux résultats obtenus par Wertheim :

		DENSITÉ	INDICE.	PRESSION EN KIL. PAR MM² produisant un retard de $\frac{\lambda}{2}$ pour 1mm de longueur.	COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ optique C	COEFFICIENT D'ÉLASTICITÉ mécanique E	$\frac{1}{E} = \frac{1}{C} - \frac{1}{\nu^2}$.
				kilogr.			
Verres.	Crown Maës et Clémandot. [Borosilicate de potassium et de zinc.]	2.657	1.532	6.87	26978	5888	0.2182
	Crown Feil et Grimaud. [Borosilicate de potassium et de zinc]	2.629	1.541	7.62	29923	6397	0.2138
	Flint de Grimaud	3.589	1.617	6.60	25917	4976	0.1920
	Verre à glaces	2.457	1.543	8.25	32396	6180	0.1908
	Flint Maës et Clémandot	3.538	1.614	8.30	32593	5523	0.1633
	Borosilicate de plomb (Feil)	4.050	1.676	13.25	52031	5208	0.1001
	Flint lourd Feil	4.056	1.624	12.97	50932	5017	0.0985
	Flint Faraday	4.358	1.681	14.60	57332	5017?	0.0875?
Fluorine		3.183	1.436	14.16	55605	8647	0.1555
Sel gemme		2.136	1.557	9.80	38483	3876	0.1007
Alun inactif		1.632	1.455	3.87	15197	975	0.0641

On a pris pour longueur d'onde celle du jaune moyen $\frac{\lambda}{2} = 0^{mm},000275$.

Le coefficient d'élasticité optique C est tel que :

$$\frac{1}{V} - \frac{1}{V'} = \frac{P}{C},$$

P étant la pression en K*g* par mm^2. Les nombres de la 3e colonne sont les moyennes des expériences faites sur chaque substance sous diverses pressions et avec divers échantillons. Pour calculer C, on a multiplié assez arbitrairement par 1,08 les nombres de la 3e colonne pour tenir compte de l'abaissement qui se manifeste, pour les faibles charges, dans le chiffre de la pression qui donne un retard d'une demi-longueur d'onde. Le coefficient d'élasticité mécanique $E = \frac{P}{\delta_z}$ (P étant la pression qui produit la variation de longueur δ_z) a été observé, pour chaque substance, au moyen des vibrations transversales d'une lame mince et suffisamment longue; cette lame mise en vibration au moyen d'un archet, les deux bouts étant libres, rendait le son fondamental et quelques-uns de ses harmoniques.

Si l'on compare les expériences de Wertheim à celles de Neumann, qui n'ont porté que sur le verre à glaces, on voit que Wertheim a trouvé $\frac{\frac{1}{V} - \frac{1}{V'}}{-\delta_z} = 0{,}191$ et Neumann $= 0{,}158$. Mais rien ne prouve que les verres employés par les deux observateurs aient été identiques.

Wertheim avait trouvé que la différence de marche engendrée par la pression est, toutes choses égales, indépendante de la longueur d'onde de la lumière employée. En d'autres termes, dans la formule

$$\delta = k\frac{P}{le},$$

k serait indépendant de λ. M. Macé de Lépinay a constaté[1] que cette loi ne s'applique qu'aux verres ordinaires, et que pour le flint extradense, par exemple, le retard croît légèrement du rouge au violet.

Effets des actions mécaniques sur différentes substances. — Comme Brewster l'a depuis longtemps observé, de la colle forte récemment coulée et pressée entre les doigts prend une double réfraction très énergique, tandis que la traction ne produit qu'un effet insignifiant.

1. *Ann. chim. et phys.* (5), XIX, p. 1 (1880).

Les substances à moitié fluides comme le verre fondu, la colophane fondue, le baume de Canada, l'acide phosphorique sirupeux, peuvent montrer la double réfraction par pression. L'acide phosphorique sirupeux, contrairement à ce qui a lieu pour tous les autres corps connus jusqu'ici, devient positif par la pression.

Effets des actions mécaniques sur les cristaux. — Des expériences faites sur les corps isotropes il résulte qu'une compression latérale fait passer l'ellipsoïde inverse de la forme sphérique à celle d'un ellipsoïde de révolution aplati suivant la direction de l'axe qui est celle de la pression. On peut énoncer ce résultat d'une manière mnémonique en disant que l'ellipsoïde inverse se déforme comme s'il cédait à l'influence de la pression. Il est clair que cet énoncé ne suppose pas que l'ellipsoïde inverse primitif soit une sphère, et le même principe pourra servir à prévoir quels seront, en gros, les phénomènes produits par une compression exercée sur un cristal n'appartenant pas au système cubique.

Supposons que l'on comprime un cristal uniaxe suivant la direction de l'axe, l'ellipsoïde inverse sera de révolution et le cristal restera uniaxe. Le retard engendré par une lame parallèle à l'axe sera augmenté si le cristal est négatif et diminué s'il est positif. C'est ce que l'on peut constater en effet très aisément en expérimentant sur le quarz positif et la tourmaline négative.

Si l'on comprime le cristal uniaxe normalement à l'axe, l'ellipsoïde inverse cesse d'être de révolution, et le cristal prend les propriétés biaxes d'un cristal terbinaire. Représentons par n_e l'axe de révolution, par n_o l'axe équatorial de l'ellipsoïde inverse primitif. Suivant la direction de la pression, n_o diminuera et deviendra $n_o - D$. Appelons d la diminution du rayon équatorial n_o perpendiculaire à la pression, et d' celle de n_e. Les quantités d et d' sont en général différentes entre elles, puisque les élasticités, optique ou mécanique, ne sont pas les mêmes suivant les deux directions. Toutefois, de ce qui se passe pour les corps isotropes, nous pouvons conclure que d et d' sont plus petits que D.

Avec un cristal négatif, on a $n_e < n_o$; lorsque la compression ne sera pas trop considérable, les trois indices seront donc rangés comme il suit dans l'ordre de grandeur décroissante :

$$n_o - d, \qquad n_o - D, \qquad n_e - d'.$$

Le plan des axes optiques est ainsi perpendiculaire à la direction de la pression. Si l'on comprime transversalement une lame de tourmaline

nale à l'axe, on verra donc, en lumière convergente, les anneaux changer en lemniscates, la croix noire se disloquer et donner naissance à deux branches d'hyperboles dont l'axe transverse sera perpendulaire à la direction de la pression.

Avec un cristal positif, on a $n_e > n_o$; les axes de l'ellipsoïde inverse sont, après compression, rangés par ordre de grandeur décroissante comme il suit :

$$n_e - d', \qquad n_o - d, \qquad n_o - D.$$

Le plan des axes optiques passe par la direction de la pression. C'est ce qu'on observe avec des lames de quartz normales à l'axe.

Si V est le demi-angle des axes optiques pendant la compression, on aura sensiblement:

$$\operatorname{tg}^2 V = \pm \frac{D - d}{n_e - n_o + D - d'},$$

le signe + devant être pris quand le cristal est positif, et le signe — quand il est négatif. En négligeant les carrés de D, d et d', on aura

$$\operatorname{tg}^2 V = \pm \frac{D - d}{n_e - n_o}.$$

Comme D et d sont proportionnels à la pression, il en est de même de $\operatorname{tg}^2 V$.

Pour les cristaux biaxes, on trouverait des résultats analogues. Considérons une lame taillée dans un cristal biaxe perpendiculairement à la bissectrice aiguë. On peut la presser latéralement soit suivant la direction du plan des axes, soit perpendiculairement.

Nous supposerons d'abord le cristal négatif. On a alors sensiblement:

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{n_c - n_b}{n_b - n_a}.$$

Lorsque la pression est exercée suivant le plan des axes, c'est-à-dire suivant c, c'est n_c qui subit la diminution la plus considérable et V diminue. Si au contraire la pression est exercée perpendiculairement au plan des axes, c'est-à-dire suivant b, c'est n_b qui subit la diminution la plus forte, et V augmente.

Avec un cristal négatif, on voit donc les axes se rapprocher lorsque

la pression est dirigée sur le plan des axes, et s'écarter lorsque la pression est dirigée perpendiculairement à ce plan.

Avec un cristal positif, le numérateur de tg ^2V est $n_b - n_a$; lorsque n_b subit la plus forte diminution, c'est-à-dire lorsque la pression est perpendiculaire au plan des axes, V diminue; les phénomènes sont donc inverses de ceux que l'on observe avec un cristal négatif.

Avec une petite presse à comprimer, on vérifie très aisément, en quelques minutes, toutes les conséquences qui précèdent. Mais, jusqu'à présent, on ne possède que très peu de données précises faisant connaître les variations des indices principaux de certaines substances cristallines sous des pressions connues.

M. le Dr Bücking[1] a publié récemment sur ce sujet intéressant quelques observations malheureusement encore fort incomplètes. Nous en extrairons seulement un chiffre qui montrera l'importance des quantités que nous avons appelées D, d et d'. En comprimant une plaque carrée de quartz ayant 10^{mm} de côté et 4^{mm} d'épaisseur, M. Bücking a observé un écartement d'axes dans l'air égal à 12°. On en déduit pour la pression P par millimètre carré, $P = 1^{Kg},22$, et pour le demi-angle vrai des axes, $V = 3° 52'$. En prenant $n_o - n_e = 0,0092$, on en déduit $D - d = 0,0000426$, soit 0,000035 pour une pression de 1^{Kg} par mm^2.

Des expériences de Wertheim citées plus haut, on tire que, pour le verre à glaces, la différence des indices produite par une pression de 1^{Kg} est égale à 0,000031, nombre très voisin de celui que nous venons de trouver pour le quartz. La variation des indices produite par une même pression dans les matières colloïdes et cristallines est donc du même ordre de grandeur.

Les cristaux peuvent-ils subir, sous l'influence de la compression, des déformations permanentes? — M. Bücking semble surtout s'être préoccupé de la question, d'ailleurs très importante, de savoir si la variation que la compression fait subir à la double réfraction peut rester permanente, au moins partiellement ; si, en d'autres termes, les cristaux sont susceptibles, comme les corps colloïdes, d'être déformés d'une manière permanente par la compression. Avec des cristaux que l'on peut considérer comme régulièrement constitués, tels que l'orthose sanidine et le quartz, M. Bücking n'a pas observé de déformation permanente. Avec des cristaux uniaxes comme le béryl, la tourmaline et l'apatite, il a, au contraire, trouvé des modifications permanentes

1. Neues Jahrb. für Min. und Geol. (1880), p. 199, et Zeitschrift für Kryst, T. VII (1882)

peur considérables. Mais nous verrons plus tard que ces cristaux ne sont pas réellement uniaxes, que leur uniaxie, qui n'est qu'apparente, résulte d'une constitution intérieure très complexe et qui n'est même pas uniforme en tous les points du cristal. Il ne serait pas surprenant que cet enchevêtrement intérieur fût modifié d'une manière permanente sons l'influence de la pression, comme il l'est certainement par l'action de la chaleur. Les expériences de M. Bücking ne sont donc pas contraires à l'idée que les cristaux, formés par des molécules orientées parallèlement entre elles et disposées suivant un réseau régulier, ne peuvent modifier leur arrangement intérieur que sous l'influence de forces extérieures actuellement agissantes. Cette opinion est entièrement d'accord avec la théorie exposée dans le premier volume de cet ouvrage.

Il faut remarquer, en effet, qu'un corps colloïde, comme le verre, peut être considéré comme formé par un assemblage peu régulier de molécules présentant dans un petit espace toutes les orientations possibles. Il ne répugne pas à l'esprit d'admettre qu'un tel assemblage soit susceptible de prendre, sous l'influence de déformations produites par des forces extérieures, diverses positions d'équilibre stable. Mais dans un corps cristallisé, où la position et l'orientation de chaque molécule sont rigoureusement fixées, il semble qu'une seule position d'équilibre soit possible en l'absence de forces extérieures.

Cas où le cristal comprimé jouit de la polarisation rotatoire. — Un cas intéressant à examiner est celui où le cristal jouit de la polarisation rotatoire. En comprimant transversalement une lame de quartz normale à l'axe, MM. Mach et Mertens[1] ont vu la teinte plate, observée en lumière parallèle, changer de manière à correspondre à un faible *accroissement* de rotation.

Cet effet se comprend aisément si, comme nous l'avons fait, on assimile le cristal de quartz à une pile de lames minces régulièrement croisées. En effet, ces lames étant positives, une pression latérale augmente le retard produit par chacune d'elles, et l'on sait que la rotation est proportionnelle à ce retard. Le contraire devrait avoir lieu pour les cristaux négatifs doués de la propriété rotatoire, mais les observations manquent sur ce point.

En observant, dans la lumière convergente, le cristal de quartz comprimé, les cercles se transforment, comme on l'a dit plus haut, en cour-

1. *Pogg. Ann.*, CLVI, p. 639 (1875). *J. Phys.*, V, 33-231.

bes bipolaires. Dans la lumière polarisée circulairement, la spirale fait place pendant la compression à deux spirales tournant dans le même sens que la première et disposées autour de chacun des pôles qui ont pris naissance.

DOUBLE RÉFRACTION PRODUITE PAR LA TREMPE

Tensions intérieures et biréfringence du verre trempé. — Les corps colloïdes, c'est-à-dire dépourvus de structure cristalline, proviennent en général de la solidification d'un corps amené à l'état liquide soit par la chaleur, soit par la dissolution. La solidification se produit, dans le premier cas, par le refroidissement; dans le second cas, par l'évaporation. Dans l'un et l'autre cas, la solidification se produit donc d'abord à la surface et marche progressivement de l'extérieur à l'intérieur; elle est d'ailleurs ordinairement accompagnée d'une variation de densité.

Supposons, pour fixer les idées, qu'on ait affaire à une masse de verre fondue, exposée à un refroidissement brusque. La surface se solidifie rapidement et tend à occuper un volume moindre que celui qu'elle occupait à l'état liquide. Ce dernier effet est combattu par l'influence de la masse intérieure restée liquide et qui a gardé son volume primitif. Il pourrait résulter de là, comme il arrive pour la plupart des corps, un tressaillement de la masse superficielle solidifiée. Pour le verre et probablement aussi pour tous les corps colloïdes qui passent de l'état liquide à l'état solide en prenant l'état pâteux, la surface peut se solidifier sans se briser; mais il est évident que cette surface possède alors une structure analogue à celle qu'elle prendrait, si, en la supposant d'abord régulièrement constituée, on lui faisait prendre sa forme actuelle en la dilatant par une pression intérieure.

Les couches intérieures se solidifient successivement dans des conditions analogues, et, lorsque la solidification est complète, le corps est dans un état semblable à celui où il se trouverait s'il avait été étiré en chaque point, d'une quantité variable avec la position de ce point par rapport à la surface. Le corps se trouve ainsi dans un état anormal de tension intérieure.

Cette répartition intérieure des tensions ne peut subsister que par leur combinaison mutuelle; l'équilibre du corps a quelque analogie avec celui d'une voûte qui ne se tient en équilibre que par l'action mutuelle des voussoirs, et qui s'effondre lorsqu'un seul d'entre eux est

supprimé. Aussi les corps qui présentent cet état singulier, et qu'on appelle *trempés*, sont-ils susceptibles de se briser en fragments plus ou moins menus lorsqu'une seule fissure vient à être provoquée dans la masse.

La trempe sera évidemment d'autant plus intense que le refroidissement sera plus brusque, car il y a alors une différence plus grande entre la température de l'intérieur et celle que possède la surface au moment où elle se solidifie. Aussi le verre refroidi très lentement ne présente-t-il que des phénomènes de trempe nuls ou peu sensibles. Par la même raison, la trempe peut être détruite par un recuit convenable suivi d'un refroidissement très lent.

Nous avons d'ailleurs supposé que le corps colloïde partait de l'état liquide pour arriver à l'état solide. Il est clair qu'il suffit qu'il parte de l'état pâteux, s'il est susceptible de prendre cet état, ce qui est le cas du verre.

Il résulte de ce que nous venons de dire qu'un corps trempé doit présenter une double réfraction, variable en chaque point. Une lame de verre trempé placée entre deux nicols croisés présentera donc une distribution de couleurs plus ou moins complexe, mais qui sera toujours en rapport avec la configuration extérieure, puisque c'est la solidification de la surface qui est la cause du phénomène.

Nous n'entrerons pas ici dans l'étude de la double réfraction des corps trempés, étude qui sort évidemment de notre sujet, mais il est nécessaire de faire une remarque importante. Quelle que soit la forme des lignes d'égale teinte que l'on observe dans un semblable corps entre deux nicols croisés, il se produira toujours une transition graduelle dans les teintes de polarisation qui appartiennent à deux points voisins. Il est bien évident en effet que la double réfraction ne peut varier dans le corps que d'une façon continue, puisqu'elle dépend de l'état de tension intérieure, état qui ne saurait être discontinu.

Une autre conséquence, c'est que le corps trempé occupe un volume plus considérable qu'avant la trempe. Aussi MM. Chevandier et Wertheim ont-ils observé qu'un verre trempé de densité 2,513 prenait après le recuit une densité de 2,523.

La trempe est-elle compatible avec l'état cristallin? — En comparant l'état d'un corps trempé à celui d'un corps qui aurait été étiré d'une quantité variable d'un point à l'autre, nous avons fait une comparaison inexacte par un côté important. Un corps ainsi étiré ne pourrait en effet rester en équilibre que sous l'action de forces extérieures,

et de semblables forces n'agissent pas sur le corps trempé. Il faut donc que, dans celui-ci, les molécules prennent une certaine position d'équilibre, différente de celle qui caractérise le corps isotrope, plus ou moins déformé par des forces extérieures. Il est ainsi nécessaire que les molécules d'un corps capable d'être trempé puissent prendre les unes par rapport aux autres des positions d'équilibre multiples. Cette condition est réalisée pour les corps colloïdes susceptibles de prendre l'état pâteux, mais rien n'autorise à en faire une propriété générale de la matière.

Dans les corps cristallins en particulier, la trempe n'a jamais été observée et il est très vraisemblable qu'elle y est, en général, impossible. Nous aurions à invoquer ici les mêmes raisons que celles qui nous ont fait considérer toute déformation permanente comme incompatible avec la structure réticulaire des cristaux. On a cru cependant, par une hypothèse tout à fait gratuite, pouvoir attribuer à une espèce de trempe, contractée pendant l'acte même de la cristallisation, certains phénomènes optiques anomaux, tels que l'existence de la double réfraction dans la plupart des cristaux cubiques. Nous verrons plus tard que non seulement ces phénomènes sont dus à une tout autre cause, mais encore que l'hypothèse de la trempe ne les explique en aucune façon.

Biréfringence du verre lorsque toute la masse n'est pas en équilibre de température. — Un phénomène qui présente quelque analogie avec celui de la trempe se manifeste dans un corps colloïde transparent en voie d'échauffement ou de refroidissement.

Supposons un corps à une température uniforme et en un point duquel on applique une source de chaleur. La chaleur se propagera dans la masse autour du point échauffé et, à chaque moment de la durée, l'état thermique du corps sera caractérisé par une certaine succession de surfaces isothermes. L'accroissement de température en chaque point s'accompagnant d'une certaine variation de volume, l'état de tension intérieure du corps et, par conséquent, la biréfringence du milieu varieront d'un point à un autre. Si le milieu était isotrope, comme le verre, il deviendra biréfringent.

Une expérience très simple met ce phénomène en évidence. On prend une lame de verre isotrope et on la place entre deux nicols croisés. On pose ensuite au centre de la lame un petit corps porté à une température élevée. La chaleur se répand dans la lame, et les surfaces isothermes peuvent être considérées comme des sphères décrites du corps chaud comme centre. Dans un très petit rayon autour de chaque

point, le milieu biréfringent pourra donc être considéré comme symétrique tout autour d'une droite joignant ce point au centre, et l'ellipsoïde optique correspondant à ce point sera de révolution autour de cette droite. Chaque point de la lame aura ainsi sa section principale dans un plan normal à la lame et passant par le petit corps chaud. Il en résulte évidemment qu'il se produira une croix noire dont les deux branches respectivement parallèles aux vibrations du polariseur et de l'analyseur viendront se couper au centre du petit corps chaud. Comme tous les points également distants de ce centre jouissent de propriétés identiques, il peut aussi se produire des cercles isochromatiques.

Ces phénomènes disparaissent d'ailleurs lorsque tous les points de la lame sont revenus à la même température.

Biréfringence des corps non homogènes. — Toutes les fois qu'un milieu transparent n'est pas homogène et que sa nature intérieure varie d'une manière continue, ce milieu est biréfringent, et le phénomène précédent n'est qu'un cas particulier de ce principe général. Si le corps est analogue à une sphère formée de couches concentriques de nature différente comme les grains d'amidon, les cristallins des yeux de la plupart des animaux, etc., il rétablira la lumière lorsqu'il sera placé entre deux nicols croisés, et montrera une croix noire dont les bras parallèles aux vibrations du polariseur et de l'analyseur viendront se rencontrer au centre de la sphère. La croix sera plus ou moins régulière, suivant que les grains approcheront plus ou moins de la forme sphérique régulière.

Si le corps est, comme une fibre végétale, formé de tubes concentriques de nature différente, il dépolarisera la lumière et s'éteindra lorsque l'axe commun de ces tubes sera parallèle à l'une des vibrations du polariseur ou de l'analyseur. Le phénomène est très brillant avec les fibres de coton ou de lin qui restent souvent attachées à la surface des lames de verre après qu'elles ont été essuyées avec un linge.

CHAPITRE XI

PHÉNOMÈNES D'ABSORPTION LUMINEUSE. — PLÉOCHROÏSME. — COULEURS SUPERFICIELLES. — FLUORESCENCE.

I. PLÉOCHROÏSME.

Couleur d'un corps vue par transmission. — Coefficient d'absorption. — On sait que, lorsque les vibrations lumineuses éthérées traversent un milieu isotrope, l'intensité en est généralement diminuée. Si l'on désigne par I_0 l'intensité incidente, par I l'intensité émergente, après la traversée d'une certaine épaisseur z du milieu, on a

$$I = I_0 e^{-\alpha z},$$

e étant la base des logarithmes népériens, et α une constante spécifique qui est le *coefficient d'absorption*. Dans cette expression, I_0 est une certaine fonction de la longueur d'onde λ qui dépend de la nature de la source lumineuse; α est une autre fonction de λ qui dépend de la nature du corps absorbant.

La couleur du corps *vue par transmission* résulte de l'impression que fait sur notre œil la somme des intensités lumineuses déduites de la formule précédente en donnant successivement à λ toutes les valeurs possibles dans I_0 et α. Cette couleur dépend ainsi, non seulement de la nature du corps, mais encore de son épaisseur et de la nature de la source lumineuse.

Pour une source lumineuse donnée, il suffit de connaître la fonction α de la longueur d'onde λ, pour pouvoir déterminer la couleur du corps correspondant à toutes les épaisseurs z. Nous verrons plus

tard comment cette détermination de la fonction α peut être faite expérimentalement.

Distinction entre les couleurs essentielle et accidentelle. — Le pouvoir absorbant d'un corps, c'est-à-dire sa couleur vue par transmission, peut avoir deux causes bien distinctes. Il peut tenir à la nature même de la substance et aux propriétés de ses dernières molécules. On sait que certains corps simples communiquent à leurs composés la propriété de la couleur; tels sont la plupart des métaux proprement dits, sauf le zinc et l'étain. D'autres corps, au contraire, donnent des composés incolores lorsqu'ils ne se combinent pas avec des corps colorants; tels sont les métaux alcalins, terreux et alcalino-terreux.

Les substances ayant une couleur propre ont une poussière colorée.

Des substances, incolores par elles-mêmes, peuvent être colorées par l'interposition, dans les intervalles intermoléculaires, de petites quantités d'un corps coloré. C'est ainsi que des quantités très petites de sels de cobalt peuvent colorer un verre en bleu. La plupart des minéraux et même des gemmes remarquables par leurs belles teintes, comme le rubis, le saphir, l'émeraude, etc., ne doivent leur coloration qu'à des quantités de matières colorantes si petites que la nature ne peut pas le plus souvent en être déterminée par l'analyse chimique.

Les substances ainsi colorées artificiellement peuvent être distinguées de celles qui ont une couleur propre par cette circonstance que leur poussière n'est pas colorée.

Dans les substances cristallisées et colorées accidentellement, la matière colorante s'interpose entre les mailles du réseau cristallin, sans que celui-ci en soit troublé. Dans certains cas, on constate que la répartition intérieure de la matière colorante est jusqu'à un certain point en rapport avec la structure intérieure du cristal. C'est ainsi que, dans les quartz améthystes dont nous avons déjà parlé, la matière colorante violette est exclusivement concentrée dans les parties du cristal formées par la superposition des strates alternativement droites et gauches. Il n'est pas rare de trouver certains minéraux, comme la tourmaline ou la fluorine, ayant des couleurs différentes à l'intérieur ou à l'extérieur.

Sénarmont a reproduit artificiellement des cristaux colorés, en faisant cristalliser différents sels dans de l'eau colorée par des substances tinctoriales.

Toutefois toutes les substances cristallines ne se montrent pas également aptes à s'imprégner de toutes les teintures. Sénarmont est arrivé à produire des cristaux colorés d'une manière particulièrement

intense, en faisant cristalliser de l'azotate de strontiane dans une dissolution de campêche.

Pléochroïsme des substances cristallisées. — Les substances isotropes, ayant une couleur propre ou acquise par la teinture, montrent la même couleur, quelles que soient la direction de la propagation et celle de la vibration lumineuse qui les traversent.

Les substances cristallisées, au contraire, au moins celles qui n'appartiennent pas au système cubique, ne présentent pas en général la même couleur dans tous les sens, c'est-à-dire que le pouvoir absorbant qu'elles exercent sur la lumière qui les traverse, varie avec la direction de la propagation ou celle de la vibration.

Le minéral que l'on désigne sous le nom de cordiérite, est aussi appelé dichroïte, parce qu'il paraît *bleu foncé* lorsqu'on le regarde de manière que le faisceau lumineux traverse le cristal normalement à la base *p*; *blanc grisâtre* perpendiculairement à h^1, et *blanc jaunâtre* perpendiculairement à *g*.

Cette propriété du dichroïsme, ou plutôt du pléochroïsme, est essentielle à tous les cristaux colorés non cubiques, que leur couleur soit essentielle ou accidentelle. Seulement dans ce dernier cas, qui est celui de la dichroïte, de la tourmaline, etc., etc., le pléochroïsme, comme la coloration, varie considérablement d'un échantillon à un autre.

Il est évident que le pouvoir absorbant des corps et par suite leur couleur uniforme, ou variable avec la direction, dépendent de l'action que les molécules matérielles exercent sur les vibrations éthérées. La cause du phénomène est donc la même que celle de la dispersion et de la double réfraction. Mais sans entrer dans la question fort complexe du mode d'action réciproque des particules matérielles et des molécules éthérées, on peut construire une théorie générale du pléochroïsme cristallin, tout à fait indépendante de la nature de la cause qui le produit.

Loi de la variation du coefficient d'absorption avec la direction de la vibration transmise. — Loi de Babinet. — Ellipsoïde inverse d'absorption. — Lorsque le milieu coloré est isotrope, le coefficient d'absorption α est évidemment le même, quelle que soit la direction de la vibration. Il n'est plus le même lorsque le milieu est anisotrope, comme le sont les milieux cristallins. Nous allons chercher quelle est, dans ce cas, la loi de variation de α.

De la formule

$$I = I_0 e^{-\alpha z},$$

ire

$$dI = -\alpha I dz.$$

est la force vive moyenne du mouvement vibratoire et dI est la force absorbée pendant que la vibration, supposée rectiligne, parcourt longueur égale à dz.

e milieu est supposé homogène, ou plutôt on remplace le milieu l, qui est périodique, par un milieu homogène continu produisant mêmes effets.

L'absorption de force vive qui se produit lorsque l'onde plane, vançant avec la vitesse v, a progressé de dz, est donc la même que lle qui s'est exercée pendant le temps $\Delta t = \frac{dz}{v}$, sur la molécule vibrant l'origine du mouvement.

Quelle que soit la cause de l'absorption, la force vive disparue représente le travail d'une force résistante dont la direction OF (fig. 113) est évidemment déterminée par celle de la vibration OV. La grandeur de cette force n'est pas, comme celle de la force élastique, fonction du déplacement de la molécule; elle n'est pas en effet déterminée par l'action qu'exerce le milieu sur une molécule dérangée de sa position d'équilibre, et elle n'entre en jeu que lorsque la molécule est en mouvement, c'est-à-dire animée d'une certaine vitesse. Elle est donc une fonction de la vitesse vibratoire, et nous pouvons la considérer comme proportionnelle à cette vitesse même. Cette force peut ainsi être représentée à chaque instant par $f\frac{dl}{dt}$; f étant un coefficient indépendant du temps, dl le déplacement de la molécule, et dt la différentielle du temps.

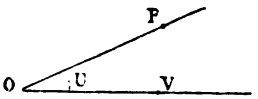


Fig. 113.

La force $f\frac{dl}{dt}$, quelle qu'en soit la raison d'être, représente une certaine action exercée par le milieu tout entier sur la molécule vibrante. On en conclut (Voir Chap. I) que si l'on prend $OV = \frac{dl}{dt}$, et $OF = f$, le point F décrit un ellipsoïde lorsque le point V décrit une sphère.

La force vive absorbée pendant le temps infiniment petit dt, représente le travail de la force $f\frac{dl}{dt}$, travail qui a lui-même pour expression

$$f\frac{dl}{dt} \cdot dl \cos U = f\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \cos U \, dt.$$

U étant l'angle compris entre OF et OV, angle toujours moindre que 90°, puisque la force vive absorbée est toujours positive.

Pendant un temps Δt, petit d'une manière absolue, mais grand par rapport à la durée d'une vibration, le travail effectué a pour expression

$$fu^2 \cos U \Delta t,$$

en appelant u^2 le moyen carré de la vitesse vibratoire.

La force vive absorbée pendant le temps Δt a d'ailleurs pour expression

$$\alpha m u^2 dz = \alpha m u^2 v \Delta t.$$

On a donc

$$\alpha m u^2 v \Delta t = f u^2 \cos U \Delta t,$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{f}{mv} \cos U.$$

Si l'on supposait indépendantes de la direction de la vibration les quantités f et U, on voit par cette expression que α n'en varierait pas moins avec v qui est la vitesse de propagation correspondant à cette direction. On voit que α serait d'autant plus grand que v serait plus petit, c'est-à-dire que les vibrations les plus absorbées seraient celles qui se propageraient le plus lentement. Telle est en effet la loi formulée par Babinet, et à laquelle il avait été vraisemblablement conduit par un raisonnement analogue à celui que nous avons employé.

La loi de Babinet, quoique soumise à d'assez nombreuses exceptions, paraît être exacte en général. Mais la cause directe n'en saurait être l'inégale vitesse de propagation des diverses vibrations, car il y aurait alors une certaine proportionnalité entre l'absorption et l'inverse de la vitesse, c'est-à-dire l'indice. Il est bien loin d'en être ainsi, puisque dans la tourmaline la différence des deux indices principaux n'est guère supérieure à $\frac{1}{80}$ de leur valeur, tandis que le rapport des coefficients d'absorption est égal à 5 ou 6 unités et même davantage. Une preuve tout aussi péremptoire se trouve dans ce fait que des substances incolores auxquelles on ajoute des traces de matières colorantes peuvent donner des cristaux énergiquement polychroïques sans que les

ices principaux soient notablement modifiés. Si, conformément à la de Babinet, les coefficients d'absorption croissent en général avec indices, ce fait ne peut donc s'expliquer par le plus long séjour e font, dans le milieu cristallin, les vibrations dont la propagation . la plus lente. La coïncidence entre l'accroissement de l'indice et lui du coefficient d'absorption est due sans doute à ce que les deux ènomènes sont dus l'un et l'autre à l'action des molécules pondébles.

En fait, l'expression $\frac{f}{mv}$, dans laquelle v est seul variable, peut être onsidérée comme constante dans l'immense majorité des cristaux, uisque les variations relatives de v sont toujours très faibles.

Si l'on porte sur OF une longueur ρ_0 telle que

$$\rho_0 = \frac{f}{mv},$$

la surface, dont les ρ_0 sont les rayons vecteurs, est un ellipsoïde que l'on peut appeler d'*absorption*.

Si l'on porte sur OV une longueur

$$\rho' = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \cos U}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}},$$

la surface qui a ρ' pour rayon vecteur est (V. page 16) un autre ellipsoïde que nous pourrons appeler *ellipsoïde inverse d'absorption*.

Nous pourrons d'ailleurs appliquer à cet ellipsoïde toutes les conséquences ordinaires que l'on déduit de la symétrie intérieure du milieu. L'ellipsoïde inverse d'absorption sera donc sphérique dans les cristaux cubiques et de révolution dans les cristaux uniaxes. Dans les cristaux qui ont un ou plusieurs axes de symétrie binaire, ces axes seront des axes de l'ellipsoïde.

Lorsque la direction des axes de l'ellipsoïde inverse d'absorption n'est pas déterminée par la symétrie, on peut conjecturer qu'elle est la même que celle des axes de l'ellipsoïde d'élasticité optique, puisqu'en somme les deux propriétés physiques de l'absorption et de la biréfringence sont dues à une même cause, mais cette conjecture aurait très grand besoin d'être vérifiée par l'expérience.

Lorsque la grandeur et la direction des axes de l'ellipsoïde inverse

d'absorption d'un cristal donné sont connues pour chaque λ, les phénomènes de l'absorption lumineuse propre à ce cristal sont entièrement connus.

Couleurs transmises par les diverses directions de vibrations. — Loupe dichroscopique d'Haidinger. — Pour les observations minéralogiques, on se contente en général, d'observations faites avec la loupe dichroscopique; elles ont pour but de connaître la sensation colorée produite sur l'œil par chacune des vibrations principales que peut transmettre normalement une lame donnée.

La loupe dichroscopique due à Haidinger (fig. 114) se compose essentiellement d'un simple rhomboèdre R de spath, donnant deux images d'une petite ouverture carrée *o* qu'on recouvre avec la lame à essayer *c*.

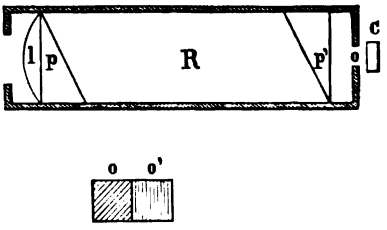


Fig. 114.

Aux deux extrémités du spath sont disposés deux prismes de verre *p* et *p'* dont les faces extérieures sont normales au faisceau lumineux, de manière à éviter la brisure du faisceau. Du côté de l'œil, une lentille *l* donne une image agrandie de l'orifice.

La longueur du spath et la grandeur de l'ouverture sont réglées de telle façon que les deux images de l'ouverture, *o* et *o'*, soient vues contiguës. L'image qui conserve la position centrale correspond à la vibration ordinaire dirigée perpendiculairement à la section principale du spath; l'image déviée est celle qui correspond à la vibration extraordinaire dirigée dans la section principale du spath.

Si l'on désigne par *s* et *s'* les deux sections principales de la lame, et si *s* est parallèle à la section principale du spath, l'image extraordinaire de l'ouverture est teinte de la couleur qui correspond à la vibration du cristal dirigée suivant *s*; l'image ordinaire est teinte de la couleur qui correspond à la vibration *s'*. La juxtaposition de ces deux teintes fait mieux juger de leur différence.

Lorsque les sections s et s' sont à 45° de la section principale du bath, les deux images ont la même teinte.

Avec un certain échantillon de cordiérite, par exemple, on observe :

Vibration	dirigée suivant l'axe cristallographique	*a*.	*Bleu foncé.*
—	—	*b*.	*Blanc bleuâtre.*
—	—	*c*.	*Blanc jaunâtre.*

Lorsqu'on regarde ce cristal de cordiérite à la lumière naturelle, et perpendiculairement à la base p, on reçoit les vibrations a et b et la teinte paraît bleue. Lorsqu'on l'observe à travers la face g^1, on reçoit les vibrations b et c et le cristal paraît blanc sale. A travers la face h^1, on reçoit les vibrations a et c, et le cristal paraît blanc bleuâtre.

Constatation du pléochroïsme dans les lames cristallisées, vues sous le microscope. — Un autre procédé, très employé pour constater le polychroïsme d'une lame cristalline consiste à la placer sur le porte-objet d'un microscope polarisant dont on a enlevé l'analyseur en conservant le polariseur. La lame cristalline n'est alors éclairée que par de la lumière vibrant rectilignement. Lorsque la vibration rectiligne du polariseur est dirigée suivant la section principale s de la lame, on ne perçoit que la couleur propre à la vibration dirigée suivant s. Lorsque la vibration rectiligne du polariseur est dirigée suivant l'autre section principale s' de la lame, c'est la couleur propre à la vibration dirigée suivant cette section que l'on observe.

En faisant tourner la lame sur le porte-objet, on la verra donc changer de teinte si elle est pléochroïque.

Ce procédé est très usité pour l'examen microscopique des lames minces découpées dans des roches. Il sert par exemple à distinguer l'amphibole, qui est très polychroïque, du pyroxène qui l'est fort peu. Suivant la règle de Babinet, qui est généralement exacte, c'est la vibration la plus lente à se propager qui prend la couleur la plus sombre.

Détermination précise de la valeur du coefficient d'absorption. Spectrophomètres de Glan et de Vierordt. — Pour déterminer le coefficient d'absorption α propre à une vibration de direction donnée se transmettant à travers une lame cristalline, il faut se servir de photomètres spéciaux. Nous ne décrirons que ceux de Glan et de Vierordt. Le photomètre de Glan est un appareil spectroscopique ordinaire dont la fente verticale est divisée en deux parties par une étroite bande horizontale

de laiton noirci. En arrière de la lentille du collimateur est un prisme de Wollaston[1], donnant ses deux images dans le plan même de la fente.

Le prisme donne ainsi deux images de cette fente respectivement polarisées à angle droit, l'une est $F_o f_o$ (fig. 116), l'autre $F_e f_e$; chacune de ces images est naturellement divisée en deux parties comme la fente elle-même. F_o et F_e sont les images de la demi-fente inférieure, f_o et f_e celles de la demi-fente supérieure. En disposant, soit de la largeur de la bande de laiton, soit de l'angle de duplication de prisme de Wollaston, on met exactement en contact, suivant une ligne horizontale, la partie supérieure de l'image F_o avec la partie inférieure de l'image f_e.

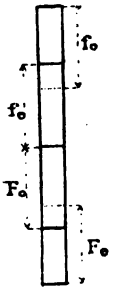


Fig. 116.

Le faisceau lumineux va tomber ensuite sur un prisme dispersif qui donne avec chacune des images F_e et f_e un spectre lumineux. Ces deux spectres sont tangents l'un à l'autre et disposés de manière que les raies du spectre solaire se prolongent de l'un dans l'autre.

On éclaire les deux demi-fentes par une même lumière et on recouvre l'une d'elles par la lame dont on veut connaître le coefficient d'absorption α. On interpose à cet effet, entre le wollaston et le prisme dispersif, un nicol pour lequel on peut connaître à chaque instant l'angle

1. Le prisme de Wollaston se compose de deux prismes de spath PMN et MNQ (fig. 115) collés ensemble.

L'arête MQ du prisme MNQ est parallèle à l'axe du spath; dans le prisme MNP, l'axe du spath est dirigé suivant la hauteur du prisme et se projette en P. Le faisceau AB entrant normalement à la face MQ se réfracte en arrivant sur la surface MN. La vibration extraordinaire parallèle à MQ est parallèle à l'arête P et par conséquent devient ordinaire en pénétrant dans le prisme MNP, où sa direction de propagation suit le chemin BO. Si α est l'angle QMN, δ' l'angle de BE et δ l'angle du faisceau émergent EE' avec la direction BA, on a

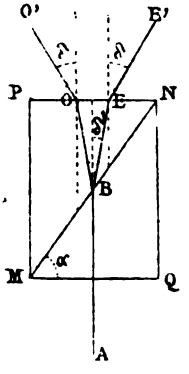


Fig. 115.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta')} = \frac{n_e}{n_o},$$

d'où l'on tire, en faisant $\cos\delta' = 1$ et $\sin\delta' = \delta'$,

$$\delta' = \frac{n_o - n_e}{n_e}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

On a d'ailleurs

$$\delta = n_e\,\delta' = (n_o - n_e)\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

La vibration ordinaire du faisceau BA éprouve une déviation de même grandeur, mais en sens contraire.

la section principale avec celle du wollaston. On tourne ce nicol qu'à ce que deux portions correspondantes et étroitement limitées ; deux spectres en contact aient la même intensité.

Si l'on appelle I l'intensité de la lumière d'une portion du spectre de , i celle de la même portion du spectre de f_e, a et a' les coefficients affaiblissement respectifs dus aux réfractions et aux absorptions, eut-être inégales, que subissent les deux faisceaux dans l'appareil, l'angle dont on a tourné le nicol, on a

$$Ia\cos^2\omega = ia'\sin^2\omega,$$

u

$$\frac{I}{i} = \frac{a'}{a}\operatorname{tg}^2\omega.$$

On peut déterminer le rapport $\frac{a'}{a}$ en laissant les deux demi-fentes nues ; on établit l'égalité des deux mêmes portions du spectre par un azimuth ω du nicol, et l'on a, I étant égal à i :

$$\frac{a'}{a} = \operatorname{cotg}^2\omega'.$$

Il est indispensable, pour l'exactitude de la comparaison, que les deux spectres F_o et f_e soient exactement en contact dans la portion que l'on examine. Or le contact rigoureux ne peut avoir lieu pour toute l'étendue du spectre, car l'angle de duplication du prisme de Wollaston n'est pas le même pour les diverses couleurs, à cause de la dispersion cristalline du spath. Pour le rouge (raie B), $n_o - n_e = 0{,}169$, pour le violet (raie H) $n_o - n_e = 0.185$; l'angle de duplication est donc plus grand pour le rouge, et les deux spectres ont une hauteur plus grande dans le violet que dans le rouge. S'ils sont en contact vers le milieu, ils se superposeront sur le bord dans le violet, et ne se toucheront pas dans le rouge. On produit le contact pour la portion du spectre que l'on veut examiner, soit en écartant ou rapprochant la fente de la lentille du collimateur, soit en se servant, pour séparer les deux fentes, d'une bande de laiton dont les deux bords sont légèrement convergents. En faisant mouvoir la lame, perpendiculairement à la fente, on en change la largeur, et par conséquent on augmente ou on diminue l'écartement des deux spectres F_o et f_e.

Pour bien apprécier l'égalité des deux plages contiguës, on dispose dans le plan focal de la lunette une fente qui ne laisse passer que les portions du spectre que l'on veut comparer.

Afin d'annuler l'erreur qui résulterait de ce que la direction du fais-

ceau émergeant du nicol analyseur ne coïncide pas avec l'axe de rotation, on fait deux observations en tournant le nicol de 180° et on prend la moyenne.

Pour juger de l'égalité des deux lumières, obtenue avec un azimut ω convenable de nicol, on peut employer un procédé plus précis que l'appréciation de l'œil. La lumière émise par les deux fentes et transmise par le collimateur est polarisée par un prisme de Foucault, puis reçue sur une lame de quartz qui donne deux rayons polarisés à angle droit et ayant une grande différence de marche. Le faisceau traverse ensuite, comme tout à l'heure, le wollaston et le nicol. Chacun des spectres F_o et f_e porte les cannelures de MM. Fizeau et Foucault, et les cannelures correspondantes sont complémentaires. Si l'on s'arrange pour que les spectres F_o et f_e soient, au moins partiellement, superposés, les cannelures disparaîtront lorsque les intensités seront *égales*.

Dans le spectrophotomètre de Vierordt, la fente du spectroscope est composée de deux parties, l'une d'ouverture constante, l'autre *d'ouverture* variable au moyen d'une vis micrométrique. On amène l'égalité du spectre de chacune des deux fentes en réglant l'ouverture *de la* dernière. Si la fente mobile est nue, la quantité de lumière transmise par la première est IS, I étant l'intensité de la lumière qui travers l'unité de surface de la lame et S la surface de la fente; la quantité de lumière transmise par la fente nue est *is*, et l'on a

$$\frac{I}{i} = \frac{s}{S}.$$

Le procédé n'est commode qu'autant que I et *i* sont peu différents, car autrement on serait conduit à avoir des fentes de longueurs très inégales et le spectre correspondant à la fente large serait très impur.

Voici quelques nombres déterminés par M. Pulfrich avec le spectrophotomètre de Glan[1].

Longueur d'onde λ	$\frac{\alpha}{2\pi}$ Vibration extraordinaire.	$\frac{\alpha}{2\pi}$ Vibration ordinaire.
	Tourmaline verte.	
0.6365	0.0616	0.224
0.6031	0.0351	0.223
0.5751	0.0293	0.223
0.5511	0.0322	0.223
0.5304	0.0343	0.223
	Tourmaline rouge.	
0.6777	0.592	3.256
0.6376	0.545	3.514
0.6033	0.613	3.589
0.5750	0.752	3.621
0.5509	0.848	3.654

1. *Zeitschrift für Kryst.* VI, 142 (1881).

Houppes des lames cristallines biaxes et colorées, taillées perpendiculairement à un axe optique.— Si l'on examine une lame cristalline colorée en la plaçant près de l'œil, de manière à recevoir des faisceaux provenant de directions très divergentes, chacun de ces faisceaux sera teint en général d'une couleur différente et l'on aura dans le champ de la vision une répartition régulière, plus ou moins apparente, de diverses teintes colorées. Les apparences sont surtout remarquables lorsque la lame est taillée perpendiculairement à l'axe optique d'un cristal biaxe. On voit alors deux houppes de couleur foncée, limitées par des espèces de branches d'hyperbole dont les sommets coïncident avec le pôle P (fig. 117) de la direction de l'axe optique, les tangentes aux sommets étant parallèles à la ligne qui joindrait ce pôle à celui de l'autre axe optique P'. C'est vers le sommet que la teinte est le plus foncée ; elle va ensuite en se dégradant.

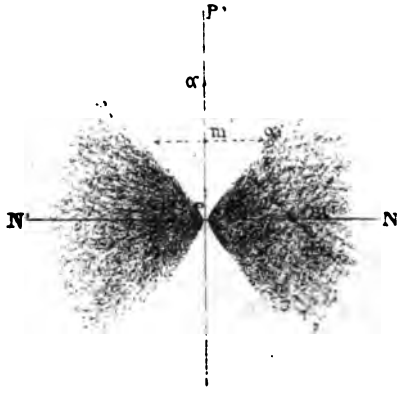


Fig. 117.

L'explication de ce phénomène est très simple. Considérons la direction du faisceau lumineux qui, partant du point situé à l'aplomb de P sur la face inférieure de la lame, vient rencontrer la face supérieure en un point m pris sur PP' et très voisin de P. Ce faisceau transmet des vibrations dirigées, les unes suivant PP', correspondant au coefficient d'absorption α ; les autres suivent une direction perpendiculaire et correspondant au coefficient α_1.

Le faisceau émergent au point m' pris sur une direction PN normale à PP' et très voisin de P, a ses vibrations dirigées sensiblement à 45° de PN.

Si les points m et m' sont suffisamment voisins de P, et par consé-

quent suffisamment proches l'un de l'autre, on peut regarder comme se confondant entre elles les deux sections elliptiques déterminées dans l'ellipsoïde inverse d'absorption par des plans respectivement perpendiculaires aux faisceaux émergeant en m et m'. Cette section elliptique a pour axes $\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}}$; l'équation en est donc :

$$\alpha x^2 + \alpha_1 y^2 = 1.$$

Les vibrations de m' sont à 45° sur les axes de cette ellipse; la longueur commune des rayons vecteurs qui leur correspondent étant $\frac{1}{\sqrt{\alpha'}}$, on a :

$$\alpha' = \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_1).$$

Cela posé, l'intensité du faisceau qui émerge en m est, l'épaisseur de la lame cristalline étant prise pour unité :

$$I = e^{-\alpha} + e^{-\alpha_1};$$

l'intensité du faisceau qui émerge en m' est :

$$I' = 2e^{-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}.$$

Or il est clair que I est toujours plus grand que I', car on a :

$$e^{-\alpha} + e^{-\alpha_1} - 2e^{-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}} = \left(e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\frac{\alpha_1}{2}}\right)^2$$

et par conséquent, le second membre étant toujours positif :

$$e^{-\alpha} + e^{-\alpha_1} > 2e^{-\frac{\alpha+\alpha_1}{2}}.$$

On aura donc suivant PP' et PQ deux parties claires, suivant PN et PN' deux parties sombres, se raccordant avec les premières de manière à former comme deux houppes sombres perpendiculaires à la ligne des pôles.

Il faut remarquer que la différence d'intensité des deux points m et m' est d'autant plus grande que les deux points sont plus voisins l'un de l'autre, et cette opposition dans l'intensité de deux points contigus rend le phénomène visible même avec des cristaux très peu colorés.

La théorie laisse indéterminée l'intensité de la lumière émergeant en P, puisque, suivant l'axe optique, il peut se propager des vibrations correspondant à toutes les directions perpendiculaires à cet axe. L'ob-

servation montre d'une manière très nette qu'en ce point l'absorption est en réalité la plus faible possible, c'est-à-dire qu'elle correspond à la propagation des deux vibrations dirigées suivant PP′ et PN. L'intensité va en décroissant d'une manière continue, à partir de P, suivant les deux directions PP′ et PQ. Dès qu'on s'écarte au contraire de P dans la direction perpendiculaire, on passe subitement de l'intensité maxima à l'intensité minima.

Lorsqu'on observe, non plus avec de la lumière monochromatique, mais avec de la lumière blanche, les houppes sombres sont encore dirigées perpendiculairement à la ligne des pôles des axes optiques; mais ces houppes sont colorées.

Lorsque la dispersion des axes optiques est forte, les houppes correspondant aux diverses couleurs ne se superposent plus et le bord de ces houppes peut être teint de couleurs diverses. C'est ce que l'on observe par exemple avec des lames d'axinite.

Lorsqu'on place en avant de la lame un polariseur dont la vibration est dirigée suivant PP′, les intensités respectives en m et m' sont :

$$I = e^{-\alpha}, \qquad I' = \frac{1}{2} e^{-\frac{\alpha + \alpha_1}{2}}.$$

Si la vibration du polariseur est dirigée suivant PN, I′ ne change pas, mais I devient :

$$I_1 = e^{-\alpha_1}.$$

Pour que les houppes soient visibles, il faut qu'il y ait une assez grande différence entre α et α_1. Supposons que α soit le plus grand et que la vibration du polariseur soit dirigée suivant PP′: I sera très petit, et l'on aura suivant la direction PO un minimum d'intensité; il pourra même être plus marqué que le minimum d'intensité qui continue à s observer le long de PN. Il se produit ainsi deux espèces de houppes perpendiculaires entre elles. α_1 est plus grand que α; ce phénomène se produit lorsque la vibration du polariseur est dirigée suivant PN.

M. Bertin, qui a observé le premier ces derniers phénomènes, n'a trouvé que l'andalousite rouge du Brésil pour laquelle on ait $\alpha_1 < \alpha$, c'est-à-dire pour laquelle le coefficient d'absorption correspondant à la vibration dirigée suivant l'axe d'élasticité optique moyen b soit plus petit que le coefficient d'absorption correspondant à la vibration, perpendiculaire à celle-là, qui se transmet suivant l'axe optique.

Lames uniaxes taillées perpendiculairement à l'axe.— Lorsque le cristal est uniaxe, l'ellipsoïde inverse d'absorption est de révolution.

Supposons un cristal uniaxe absorbant, pour lequel α_o est le coefficient d'absorption de la vibration ordinaire, et α_e celui de la vibration extraordinaire.

Conformément à la loi de Babinet, on aura en général $\alpha_o > \alpha_e$ dans les cristaux négatifs et $\alpha_o < \alpha_e$ dans les cristaux positifs.

Si l'on place près de l'œil une lame découpée, perpendiculairement à l'axe, dans un cristal uniaxe absorbant, l'intensité I du faisceau normal est

$$I = 2e^{-\alpha_o}.$$

Le faisceau incliné de ω sur la normale a pour intensité

$$I' = e^{-\alpha_o} + e^{-\alpha'},$$

α' étant donné par la formule

$$\alpha' = \alpha_e \sin^2\omega + \alpha_o \cos^2\omega;$$

α' sera en général plus petit que α_o pour les cristaux négatifs, et plus grand que α_e pour les cristaux positifs. On verra donc l'intensité de la lumière aller en croissant à partir du centre de l'image, avec les cristaux négatifs ; et aller en décroissant avec les cristaux positifs. C'est le phénomène signalé pour la première fois par M. Emile Bertrand.

Lorsqu'on met en avant ou en arrière de la lame un polariseur dont la direction de vibration soit PP′, on supprime suivant PP′ la vibration ordinaire et suivant la direction perpendiculaire PN la vibration extraordinaire. Lorsque le cristal est positif (toujours en admettant l'exactitude de la loi de Babinet), on aura donc la direction ON plus sombre que la direction OP, et il se produira une sorte de houppe dirigée suivant NN′. La houppe serait dirigée suivant PP′ avec un cristal négatif comme la tourmaline, la pennine ou la biotite.

Platinocyanure de magnésium. — Ces phénomènes ne sont sensibles qu'avec des substances pour lesquelles l'un des coefficients α_o ou α_e est extrêmement grand, c'est-à-dire qui absorbent presque complètement, même sous de très faibles épaisseurs, l'une ou l'autre espèce de vibrations.

La substance la plus remarquable sous ce rapport est peut-être le platinocyanure de magnésium ($MgCy^2 + PtCy^2 + 3aq$). Ce sel cristallise en cristaux carrés très nets, portant quelquefois des troncatures a^1 sur les angles, et montrant un clivage facile parallèle à la base.

Ces cristaux paraissent d'un beau rouge ; une lame de clivage très mince, examinée au spectroscope avec de la lumière traversant nor-

malement la lame, absorbe presque complètement les rayons jaunes et verts, laisse passer les rayons rouges et affaiblit beaucoup les rayons bleus et violets. Tel est donc le mode d'absorption de la vibration ordinaire. Quant à la vibration extraordinaire, elle ne laisse passer que le rouge, le coefficient d'absorption relatif au bleu est presque infini. Il en résulte que, pour le bleu, l'ellipsoïde inverse d'absorption se réduit presque à son équateur.

Dès que la direction de propagation fait un angle notable (supérieur à 2° d'après M. Lommel) avec l'axe optique, la vibration ordinaire seule continue à transmettre du bleu; la vibration extraordinaire n'en contient plus. Il en résulte que lorsqu'on tient près de l'œil une lame très mince de clivage, on voit au centre un petit espace circulaire où les deux vibrations perpendiculaires entre elles transmettent du bleu et qui paraît *rouge pourpre;* au delà du petit cercle, la vibration ordinaire seule continue à transmettre du bleu, et la teinte paraît rouge, en même temps qu'elle est plus sombre, puisque le bleu manque dans l'une des vibrations.

Lorsqu'on place un polariseur derrière la lame, on voit, sur fond pourpre, deux houppes rouges perpendiculaires à la vibration du polariseur. En regardant le ciel à travers une lame de platinocyanure de magnésium, on observe très bien, par l'existence et la direction des houppes rouges, l'état de la polarisation des rayons qui émergent des divers points de la voûte céleste.

Ces phénomènes ne sont pas visibles dès que la lame de clivage est un peu épaisse, parce qu'alors la vibration ordinaire elle-même arrête le bleu. Ils ne sont pas visibles avec la lumière d'une lampe ni même avec la lumière électrique, parce que les rayons bleus ne sont pas assez intenses dans ces lumières pour être transmis par la vibration ordinaire.

Lorsqu'une lame de clivage de platinocyanure de magnésium est placée sur le porte-objet du microscope polarisant à lumière convergente entre deux nicols croisés à angle droit, et que l'on éclaire avec la lumière bleue à peu près monochromatique obtenue en faisant passer le faisceau à travers une dissolution de sulfate de cuivre ammoniacal, on voit la croix noire sur fond bleu, mais les anneaux ne se produisent pas, puisqu'à une distance un peu notable du centre, les rayons ordinaires sont seuls transmis, et ne peuvent plus interférer avec les rayons extraordinaires supprimés.

En un point quelconque M de l'image (fig. 118), la vibration ordinaire,

qui seule est transmise, est perpendiculaire à OM. Lorsque la vibration de l'analyseur AA′ n'est plus perpendiculaire sur celle du polariseur PP′, la vibration ordinaire d'un point quelconque de AA′ ou de PP′ est supprimée par l'analyseur ou par le polariseur; on voit donc deux barres noires, l'une suivant AA′, l'autre suivant PP′, et si l'on fait tourner l'analyseur, le polariseur restant fixe, on voit la barre AA′

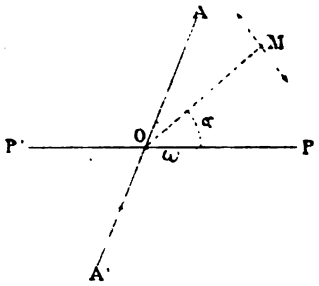


Fig. 118.

tourner avec l'analyseur. Si l'on appelle ω l'angle AOP, α l'angle MOP, l'intensité de la vibration ordinaire qui émerge en M est

$$I = \sin^2\alpha \sin^2(\omega - \alpha).$$

Suivant la bissectrice de l'angle aigu AOP, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\omega}{2}$, on a

$$I = \sin^4 \frac{\omega}{2}.$$

Suivant la bissectrice de l'angle obtus AOP′, c'est-à-dire pour $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{\omega}{2}$, on a

$$I' = \cos^4 \frac{\omega}{2}.$$

On aura donc $I < I'$, puisque ω est plus petit que 45°. Les secteurs aigus sont ainsi plus sombres que les secteurs obtus.

Lorsque AA′ est parallèle à PP′, on n'a plus qu'une barre noire à partir de laquelle la lumière va en croissant graduellement.

Avec de la lumière blanche, on verra ainsi, avec les nicols croisés, des anneaux et une croix noire sur fond rouge orangé. Avec les nicols inclinés, la partie comprise dans l'angle aigu POA prendra un rouge plus franc, tandis que la partie AOP′ se teindra davantage de bleu et passera au rouge pourpre.

Platinocyanure d'yttrium. — Le platinocyanure d'yttrium est biaxe avec un clivage perpendiculaire à la bissectrice aiguë positive, autour de laquelle l'angle des axes optiques dans l'air est de 27°5′, soit environ 17°7′ dans le cristal. Les propriétés d'absorption lumineuse sont très analogues à celles du platinocyanure de magnésium; l'ellipsoïde inverse d'absorption pour le bleu se réduit aussi à une surface lenticulaire très peu épaisse; la seule différence est que le contour de cette lentille n'est plus circulaire, mais elliptique.

Supposons qu'on observe dans la lumière bleue une lame de clivage, tenue devant l'œil, où C (fig. 119) est le pôle de la bissectrice aiguë, P et P′ les pôles des axes. Le point C donne deux vibrations lumineuses; les points P et P′ n'en donnent plus qu'une seule; il en est de même de tous les points de la ligne PP′ et de ceux de la ligne perpendiculaire BB′. Si l'on s'éloigne de P ou de P′ normalement à PP′, on aura, comme on l'a vu plus haut, le noir absolu. On verra donc, en somme, sur un fond noir, deux bandes lumineuses bleues qui seront respectivement parallèles à PP′ et à BB′.

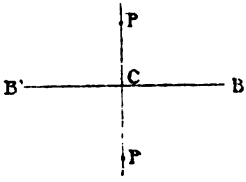


Fig. 119.

Avec un polariseur dont la vibration est dirigée suivant PP′, on éteint la bande PP′; avec un polariseur dont la vibration est dirigée suivant BB′, on éteint la bande BB′.

Si l'on opère avec la lumière blanche, les bandes lumineuses de tout à l'heure deviennent des bandes pourpres qui se détachent sur fond rouge.

Sous le microscope polarisant en lumière convergente, on verra en lumière blanche la partie intérieure ou extérieure des hyperboles se teindre de pourpre ou de rouge orangé lorsqu'on tournera l'analyseur par rapport au polariseur. Les faits sont analogues à ceux que l'on observe avec le platinocyanure de magnésium; ils s'expliquent de la même façon.

II. RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE. — COULEURS SUPERFICIELLES.

Réflexion de la lumière sur les corps transparents. — Les lois de la réflexion de la lumière à la surface des corps sont encore fort imparfaitement connues. Lorsque le corps est transparent comme le verre, les lois formulées par Fresnel, d'après des idées théoriques et

hypothétiques très originales, mais très discutables, sont suffisamment d'accord avec les phénomènes. On sait que, si un rayon, polarisé rectilignement, tombe sur une surface vitreuse sous l'incidence i, de manière que la vibration incidente, d'amplitude égale à I, fasse avec le plan d'incidence un angle égal à A, et si l'on appelle i et r les angles des rayons incident et réfracté avec la normale, R l'intensité du rayon réfléchi, T celle du rayon réfracté, A_r et A_t les angles que font avec le plan d'incidence les vibrations réfléchie et réfractée, on a

$$R = \frac{\sin^2(i-r)}{\sin^2(i+r)}\sin^2 A + \frac{\operatorname{tg}^2(i-r)}{\operatorname{tg}^2(i+r)}\cos^2 A,$$

$$T = I - R,$$

$$\operatorname{tg} A_r = -\operatorname{tg} A\,\frac{\cos(i-r)}{\cos(i+r)},$$

$$\operatorname{tg} A_t = \operatorname{tg} A\cos(i-r).$$

Pour les cristaux transparents, les mêmes formules s'appliquent à très peu près, et les différences ne deviennent notables que *pour les* cristaux, fort peu nombreux, qui sont exceptionnellement biréfringents comme le spath d'Islande. La réflexion cristalline a été l'objet de nombreux et importants travaux de la part de Brewster, Seebeck, Neumann, Mac Cullagh, Sénarmont, Cornu. Les théories proposées pour représenter les phénomènes reposent sur des hypothèses très hasardées, et ces phénomènes sont eux-mêmes si peu considérables que les observations les plus exactes ne suffisent guère à établir l'exactitude des formules. L'intérêt de la réflexion cristalline est donc à peu près nul pour le cristallographe, et nous nous dispenserons de l'étudier ici en détail.

Réflexion sur les métaux et les corps absorbants. — Pour les métaux qui sont à peu près complètement opaques, les lois de la réflexion sont très différentes de celles qui s'appliquent aux substances transparentes, cristallisées ou non. On peut supposer le rayon réfléchi divisé en deux composantes vibrant l'une parallèlement, l'autre perpendiculairement au plan d'incidence. La réflexion métallique donne une *avance* à la vibration qui se trouve dans le plan d'incidence, de sorte que la vibration réfléchie est, non plus rectiligne, mais elliptique. En même temps la quantité de lumière réfléchie ne suit plus les mêmes lois que pour les substances transparentes. Au lieu d'être nulle pour une incidence normale, elle est au contraire considérable, et décroît à

ıre que l'angle d'incidence croît, jusque vers 50° ou 60°, pour tre ensuite jusqu'à l'incidence rasante.

e pouvoir réfléchissant des métaux, pour une incidence donnée, male par exemple, n'est pas la même pour toutes les couleurs. La ıière réfléchie par les métaux est donc colorée, contrairement à ce ı a lieu pour les substances transparentes qui, même lorsqu'elles ıt colorées, réfléchissent de la lumière blanche. Ces particularités ıe présentent les métaux, de réfléchir beaucoup de lumière, même ırmalement, et de colorer les rayons réfléchis, produisent l'impres-on que les minéralogistes traduisent par le mot d'*éclat métallique*.

Mais il n'y a pas un saut brusque entre les substances transparentes t les métaux. En réalité les lois de Fresnel ne sont qu'approximative-ıent exactes, même pour le verre, et l'on constate que cette matière ıussi bien que les autres substances transparentes, imprime une avance notable aux vibrations perpendiculaires au plan d'incidence, et réfléchit, dans une proportion différente de celle qu'indique la formule de Fresnel, les vibrations parallèles ou perpendiculaires au plan d'in-cidence.

Parmi les substances transparentes, il en est quelques-unes qui laissant plus ou moins passer certaines longueurs d'onde, en arrêtent d'autresc omplètement. Lorsqu'on place ces substances, même réduites en lames très minces, devant la fente d'un spectroscope, le spectre manque entièrement d'une ou de plusieurs couleurs, et montre une ou plusieurs bandes noires qui sont dites bandes d'*absorption*. Telle est, par exemple, la fuchsine, qui absorbe complètement le vert.

Or, on a constaté que ces corps jouissent en quelque sorte de la réflexion métallique pour les vibrations qu'ils ne transmettent pas. Il réfléchissent donc la lumière en la colorant, et la teinte qu'ils lui communiquent est très différente de celle que prend un faisceau lumi-neux après les avoir traversés. Ces corps sont dits avoir une *couleur superficielle* ou *métallique*.

Couleurs superficielles. — Lois de Haidinger. — Les lois qui permettraient de prévoir la nature de ces couleurs superficielles sont bien loin d'être connues avec quelque détail. On peut dire cependant d'une manière générale, avec Haidinger, que la lumière qui est la plus réflé-chie est celle qui est la moins transmise. Les deux propriétés de la réflexion et de la transmission sont donc en quelque sorte complémen-taires, quoiqu'il ne faille pas prendre ce mot au pied de la lettre.

Ainsi une dissolution de permanganate de potasse absorbe énergique-

ment certaines longueurs d'onde. Les cristaux de permanganate paraissent opaques pour toutes les couleurs, parce qu'on ne peut pas se procurer de lames assez minces pour n'imposer au faisceau lumineux que la traversée d'un nombre de molécules aussi petit que celui auquel on arrive en diluant celles-ci dans un liquide. Or, Stokes[1] a observé que la lumière réfléchie sur une face parallèle à l'axe du prisme, est colorée et manque précisément des couleurs que laisse passer la dissolution. La loi générale s'applique donc, et la vibration la plus réfléchie est celle qui est la plus absorbée.

Couleurs superficielles du platinocyanure de magnésium et de quelques autres substances. — Une des plus remarquables substances cristallisées à couleurs superficielles est le platinocyanure de magnésium, dont nous avons déjà étudié les curieuses propriétés absorbantes.

Si l'on examine par réflexion un prisme carré de cette matière qui, on le sait, est rouge par transmission et par diffusion, on observe les faits suivants :

Quand la réflexion a lieu sur *une face du prisme* :

a. Le plan d'incidence étant perpendiculaire à l'axe, on voit un éclat métallique et une couleur vert d'herbe sous une incidence presque normale, devenant ensuite, à mesure que l'incidence est plus rasante, vert jaune, jaune, brun tombac, bronzé, enfin sans couleur. La loupe dichroscopique permet de reconnaître que la vibration parallèle à l'axe est d'abord verte, puis devient sans couleur, tandis que la vibration normale à l'axe (c'est-à-dire parallèle à la vibration ordinaire du cristal), est d'abord sans couleur et devient ensuite d'un beau bleu.

b. Le *plan d'incidence étant parallèle à l'axe*, la couleur réfléchie, d'abord vert d'herbe, devient successivement vert émeraude, puis bleue, et enfin sans couleur. La loupe dichroscopique montre encore que la vibration parallèle à l'axe est d'abord verte, puis vert bleu, puis bleue, puis sans couleur, tandis que la vibration perpendiculaire reste sans couleur ou de la couleur rouge du cristal.

Les faces h^1 se comportent exactement comme les faces m.

Les faces a^1, lorsque le plan d'incidence contient l'axe du prisme, montrent la vibration extraordinaire contenue dans le plan d'incidence bleu azur, et la vibration ordinaire sans couleur. Lorsque le plan d'incidence est transversal, la vibration extraordinaire est encore bleue, mais la vibration ordinaire est blanc un peu bleuâtre.

1. *Phil. mag.* (4), XLI, p. 393 (1853).

Enfin les faces *p*, rouges sous l'incidence normale, donnent une cou-ur bleue, vibrant dans le plan d'incidence, lorsque l'angle est celui e la polarisation maximum par réflexion.

Il résulte en somme de ces observations de Haidinger[1] que, sous incidence normale, la vibration réfléchie parallèle à la vibration xtraordinaire, qui est la plus absorbée, donne seule une couleur super-icielle ; la couleur est vert d'herbe quand cette vibration est parallèle à l'axe optique. Lorsque la vibration extraordinaire est inclinée sur l'axe, la couleur réfléchie normalement incline vers le bleu. Il en est de même lorsque l'incidence, au lieu d'être normale, devient oblique.

Le *platinocyanure d'yttrium* se comporte à peu près comme celui de magnésium.

Parmi les autres substances cristallisées qui montrent une couleur superficielle, on peut citer :

l'*indigotine*, dont la couleur est rouge de cuivre par réflexion, dans tous les azimuts et pour toutes les directions de vibrations (Haid.) ;

la *murexide*, qui est rouge grenat par transmission, et d'un beau vert doré par réflexion ;

le *sulfate d'iodoquinine* ou sel d'*Hérapath*, qui est blanc verdâtre pour les vibrations transmises perpendiculairement à l'axe, rouge très sombre pour les vibrations extraordinaires transmises parallèlement à l'axe, et qui donne une couleur superficielle vert d'herbe vibrant parallèlement à l'axe ;

l'*hydroquinone*, qui est bleu violet sombre pour les vibrations perpendiculaires à l'axe, bleu violet très sombre pour les vibrations parallèles, et dont la couleur superficielle vibrant parallèlement à l'axe est brun tombac ;

le *picrate de potasse*, qui cristallise en aiguilles quadratiques, d'un brun jaune, par transmission, pour les vibrations perpendiculaires à l'axe, d'un brun rouge plus sombre pour les vibrations parallèles, et qui est bleu par réflexion pour les vibrations parallèles ;

le *chrysammate de potasse*, étudié par Brewster[2], qui cristallise en petites tables rhombiques, et transmet de la lumière rouge jaunâtre, qui se décompose en deux faisceaux polarisés à angle droit, l'un rouge carmin, l'autre jaune pâle. La lumière naturelle réfléchie est jaune d'or vierge pour l'incidence normale, et bleu pâle pour de très grandes incidences ; cette lumière se divise en deux faisceaux, l'un vibrant perpendiculai-

1. Pogg. *Ann.* 71, p. 321 (1847).
2. *Phil. Mag.* (3), 29, p. 331 (1846).

rement au plan d'incidence, qui est bleu blanc pâle pour toutes les incidences, et l'autre vibrant dans le plan d'incidence, qui est jaune d'or pour les petites incidences, et bleu pour les fortes incidences.

Anneaux d'interférence observés dans les substances cristallisées colorées sans polariseur ni analyseur. — Toutes les substances que nous venons de passer en revue absorbent complètement, au moins, pour certaines directions de vibrations, une partie plus ou moins considérable du spectre, et c'est à cette absorption complète de certaines radiations que sont dues la réflexion métallique pour ces radiations et la couleur superficielle. Mais il bien vraisemblable qu'une absorption incomplète de certaines vibrations doit produire des faits plus ou moins analogues, quoique naturellement moins intenses, à ceux que produit une absorption complète. On ne sait encore que fort peu de choses sur ce sujet, mais une observation faite par M. Bertin est de nature à donner quelques indications.

Lorsqu'on place devant l'œil une lame cristalline bien colorée, taillée perpendiculairement à un axe optique, outre les houppes dont nous avons parlé dans la première partie de ce chapitre, on voit autour de l'axe les mêmes anneaux d'interférence que l'on observe si nettement lorsque la lame est placée entre un polariseur et un analyseur. Ces anneaux sont d'ailleurs peu nombreux et on en voit seulement la *partie* qui traverse les houppes sombres; mais ils deviennent très nets et très visibles lorsqu'on place une tourmaline, soit en avant, soit en arrière de la lame.

Comme les anneaux d'interférence ne peuvent se produire que lorsque la lumière est polarisée à l'entrée et à la sortie de la lame cristalline, il faut nécessairement que la surface même de la lame absorbante soit à elle seule un polariseur, et c'est évidemment la réfraction à la surface qui doit produire ce phénomène. On sait en effet que la réfraction polarise partiellement la lumière de manière que l'amplitude de la vibration contenue dans le plan d'incidence soit la plus grande. Toutefois les formules de Fresnel ne donnent pour les incidences peu éloignées de la normale, comme celles dont il s'agit ici, qu'un écart très faible entre l'amplitude des deux vibrations principales du rayon réfléchi ou du rayon réfracté; et en fait on ne voit ainsi, à l'œil nu, sans polariseur ni analyseur, les anneaux d'interférence, que lorsque le cristal est absorbant.

Le phénomène signalé par M. Bertin me semble donc devoir être

nsidéré comme la preuve que, dans des substances très absorbantes pour certaines couleurs, le pouvoir réfléchissant relatif à ces couurs, est très notablement accru.

On s'explique alors la production des anneaux d'interférence.

Reportons-nous à la figure 117 de la page 361; considérons le ıisceau qui émerge en m' et qui est contenu dans un plan passant par e pôle P et normal à la ligne des pôles PP'. Représentons par 2 la lumière incidente, par A^2 et A'^2 les intensités de la lumière réfléchie suivant qu'elle vibre perpendiculairement ou parallèlement au plan d'incidence. On a toujours $A^2 > A'^2$, mais la différence est très faible si le cristal n'est pas absorbant. Les quantités de lumière réfractée sont respectivement $1 - A^2$, et $1 - A'^2$; il y a donc dans le faisceau réfracté une quantité de lumière naturelle égale à $2(1 - A^2)$ et une quantité de lumière vibrant dans le plan d'incidence égale à $A^2 - A'^2$. Si A est petit, $2(1 - A^2)$ est grand et le rapport $\frac{A^2 - A'^2}{2(1 - A^2)}$ est trop petit pour que les phénomènes d'interférence soient visibles. Si au contraire le cristal devient très absorbant et si le pouvoir réflecteur augmente en conséquence, $1 - A^2$ diminuera et le rapport $\frac{A^2 - A'^2}{2(1 - A^2)}$ pourra augmenter de manière que la lumière vibrant en excès dans le plan d'incidence puisse produire des effets sensibles.

A la sortie de la lame cristalline un fait analogue se produit et la lumière vibre en excès dans le plan d'incidence. Les phénomènes se passent donc comme si le faisceau émergeant en m' était placé entre un polariseur et un analyseur dont les vibrations seraient parallèles à Pm', c'est-à-dire à 45° des vibrations principales transmises par le cristal. Les phénomènes d'interférence peuvent donc se manifester.

Ils ne se manifestent pas au contraire pour le faisceau émergent en m, car les vibrations du polariseur et de l'analyseur fictifs sont parallèles ou perpendiculaires à celles que transmet le cristal.

Les phénomènes sont naturellement rendus plus nets lorsqu'on dispose, soit devant, soit derrière la lame, un appareil de polarisation dont les vibrations sont parallèles ou perpendiculaires à PP'.

III. FLUORESCENCE.

Définition de la fluorescence. Loi de Stokes. — On sait que certains corps, après avoir été soumis à l'action de la lumière, peuvent en

rayonner ensuite pendant un temps plus ou moins long. C'est ce qu'on appelle la *phosphorescence*. On sait aussi que certains corps, pendant qu'ils sont frappés par la lumière, diffusent, à leur surface, une certaine quantité de lumière. Ce phénomène, qui ne se prolonge pas un temps appréciable après que l'action de la lumière a cessé, est ce qu'on appelle la *fluorescence*. Ces deux phénomènes, qui ont entre eux beaucoup d'analogies, sont régis par une loi générale qui est la *loi de Stokes*, en vertu de laquelle ce sont les vibrations absorbées qui sont restituées par la fluorescence ou la phosphorescence. Cette restitution est accompagnée d'une transformation qui a toujours pour résultat d'augmenter la durée de la vibration, et par conséquent de diminuer la réfrangibilité. C'est ainsi que le spectre chimique invisible reçu sur une surface fluorescente, liquide ou solide, comme les dissolutions d'aniline ou le verre d'urane, devient visible par diffusion superficielle, parce que les vibrations chimiques se transforment en vibrations lumineuses de plus longue durée. Nous ne nous occuperons que de celles des substances fluorescentes qui sont cristallisées. De ce nombre sont les platinocyanures, et cela est naturel, puisque l'absorption est intimement liée à la fluorescence.

Fluorescence du platinocyanure de magnésium. — Le platinocyanure de magnésium ne donne dans la lumière blanche qu'une fluorescence faible; mais celle-ci devient nette quand on filtre la lumière solaire par un verre bleu ou violet; la couleur superficielle verte disparaît alors et l'on observe une fluorescence jaune rouge.

Lorsqu'on observe spécialement la fluorescence de la face *m* du prisme carré, et qu'on l'analyse par un nicol, elle paraît jaune orangé quand la vibration est parallèle à la hauteur, rouge écarlate dans le cas contraire.

La base *p*, éclairée par un faisceau violet non polarisé et normal, donne une fluorescence rouge écarlate dont la nuance ne change pas quand on fait tourner le cristal autour de son axe. Si le faisceau incident est polarisé, la fluorescence n'est pas modifiée. Si, le faisceau incident restant polarisé avec une vibration rectiligne *horizontale*, on lui donne une incidence croissante, la fluorescence n'est pas non plus modifiée. Mais si la vibration rectiligne du faisceau est inclinée sur la base, la teinte de la fluorescence se transforme, à mesure que l'incidence croît, en s'avançant vers le jaune.

On voit en somme que ces observations sont bien d'accord avec la loi de Stokes qui établit une relation entre la vibration absorbée et celle

ıi est restituée par fluorescence. Dans les cristaux de platinocyanure : magnésium, c'est la vibration extraordinaire qui absorbe le bleu, est-à-dire les vibrations les plus réfrangibles; aussi restitue-t-elle par uorescence les vibrations dont la réfrangibilité s'avance jusqu'à celle .u jaune. La vibration ordinaire, au contraire, qui n'absorbe que le vert, ıe donne par fluorescence que des vibrations qui ne dépassent pas le ·ouge.

CHAPITRE XII

PROCÉDÉS PROPRES A OBSERVER ET A MESURER LES PROPRIÉTÉS BIRÉFRINGENTES DES CRISTAUX.

L'observation de la biréfringence des cristaux joue actuellement un rôle considérable dans leur étude. On trouve là en effet des propriétés très caractéristiques, faciles à observer, même sur des fragments très petits et dépourvus de forme extérieure géométrique. C'est en outre le moyen le plus approprié à l'étude des groupements intérieurs, si curieux et si intéressants, que la forme de la surface dissimule le plus souvent à l'observateur.

L'étude d'une substance cristallisée n'est donc plus considérée comme complète lorsqu'on en a déterminé les propriétés cristallographiques: on juge encore nécessaire d'en observer les propriétés optiques. Celles-ci se résument en général, comme on le sait, dans un certain ellipsoïde, variable avec chaque couleur. Il faut donc déterminer cet ellipsoïde pour une ou plusieurs longueurs d'onde. C'est cette détermination importante dont nous allons nous occuper dans ce chapitre.

Moyens d'obtenir des lames cristallines à faces parallèles. — La plupart des observations se font sur des lames à faces parallèles. Ces lames doivent avoir une épaisseur constante, une orientation cristallographique bien déterminée, et il est nécessaire qu'elles portent une ou plusieurs lignes dont l'orientation cristallographique soit également connue. Enfin elles doivent être assez minces pour montrer dans la lumière blanche des couleurs de polarisation dont l'uniformité est un garant de l'homogénéité du cristal et de l'uniformité d'épaisseur. L'emploi des lames épaisses est fertile en erreurs, car il dissimule en général l'effet produit par les groupements cristallins, sur lesquels

nous reviendrons avec détail dans une autre partie de cet ouvrage, mais dont nous pouvons signaler dès à présent la très grande fréquence.

On peut, lorsque cela est possible, se servir de lames de clivage. Le plus souvent, on est oblige de tailler artificiellement la lame dans une direction connue. Le cas le plus simple est celui où le plan de la lame doit être parallèle à une face du cristal. On commence par coller le cristal sur une lame de verre en l'appliquant par cette face cristalline. La substance dont on se sert pour effectuer le collage est assez fréquemment le baume du Canada. Cette résine liquide a la propriété de durcir par le refroidissement lorsqu'elle a été chauffée. Il suffit de mettre une goutte de baume sur la lame de verre puis de la chauffer à une douce chaleur, en ayant soin de ne pas pousser la température trop loin, ce qui aurait le double inconvénient de décomposer la résine, qui dégagerait alors des bulles de gaz restant en partie emprisonnées dans le liquide, et de rendre le baume trop sec et trop cassant lorsqu'il serait refroidi. Le liquide étant encore chaud, on y plonge le cristal, et on laisse refroidir.

Il vaut mieux en général se servir du baume qui a été déjà rendu solide par l'application de la chaleur. On peut le préparer soi-même, ou se le procurer, chez les opticiens, sous forme d'une boule adhérant à l'extrémité d'une baguette de verre. Il suffit alors de chauffer en même temps la lame de verre et le baume; lorsque la lame est assez chaude, en la frottant avec le baume on y dépose une couche liquide d'une épaisseur suffisante.

Le baume du Canada a l'avantage d'être parfaitement transparent, mais il a l'inconvénient d'être cassant, ce qui peut entraîner la perte du cristal pendant l'opération de la taille. On préfère donc le plus souvent réserver le baume pour le collage définitif de la lame taillée et fixer le cristal, pour procéder à la taille, par une matière un peu moins transparente, mais plus élastique, et résistant mieux aux secousses que le cristal doit subir pendant le travail. On se sert à cet effet d'un mastic obtenu en faisant fondre ensemble du baume et de la cire. Les proportions du mélange peuvent d'ailleurs varier beaucoup ; en augmentant la proportion de cire on diminue la transparence, mais on abaisse le point de fusion et on augmente l'élasticité.

Le cristal étant ainsi fixé par la face à laquelle la lame doit être parallèle, on l'use sur un disque de fonte ou de cuivre sur lequel on dépose de la poudre d'émeri humectée d'eau. On peut user en promenant le cristal sur le disque immobile; il est préférable de se servir

d'un tour d'opticien au moyen duquel on donne un mouvement de rotation au disque, la main et le cristal restant immobiles. L'habileté de l'opérateur consiste à user le cristal bien également de manière à produire une face artificielle exactement parallèle à la face naturelle sur laquelle le cristal repose. Pour guider le travail, on peut fixer de part et d'autre du cristal des fragments de verre à faces parallèles et d'égale épaisseur. Ces fragments s'usent en même temps que le cristal; ils donnent une surface de frottement plus large et qu'il est plus aisé de maintenir dans une position identique pendant l'opération.

Lorsque la face artificielle a été poussée assez loin dans l'intérieur du cristal, on la polit en employant successivement des émeris de plus en plus fins. On termine le polissage en substituant au disque en laiton un petit disque sur lequel on a collé du velours; on humecte ce velours en y répandant soit du rouge d'Angleterre, soit une poudre d'oxyde d'étain que les opticiens nomment la *potée d'étain*.

Après ce travail qui donne une face plane et polie ayant l'orientation voulue, on chauffe la lame de verre pour faire fondre la résine, on retourne le cristal et on le colle en le faisant reposer sur la face artificielle, puis on l'use de nouveau en faisant disparaître la face naturelle qui a servi à l'orientation. On peut ainsi se procurer une lame aussi mince qu'on le veut et découpée dans une région quelconque de la masse cristalline, soit au centre, soit près du bord.

Lorsque le cristal doit être taillé parallèlement à un plan qui ne se rencontre pas dans la surface cristalline, l'opération est beaucoup plus délicate. Il faut alors fixer le cristal sur le support de verre, en l'assujettissant par des fragments de verre, de manière que la face artificielle à créer soit parallèle au plan du support. On y arrive par des tâtonnements, et au besoin on s'assure de l'exactitude de l'orientation en mesurant au goniomètre l'angle que fait le plan du support avec deux faces cristallines. Pour rendre ces tâtonnements plus aisés, il est bon de se servir d'un mastic qui reste assez longtemps plastique, ce qu'on obtient en augmentant la quantité de cire mélangée de baume.

Quand on a ainsi fabriqué une face artificielle, on peut s'assurer, par des mesures goniométriques, qu'elle a bien la direction voulue, et au besoin on la corrige en appuyant plus ou moins sur un des côtés du support pendant l'usure. La face artificielle étant obtenue et l'orientation en étant vérifiée, on achève comme avec une face naturelle.

Lorsqu'on a affaire à de gros cristaux ou que l'on veut ménager la matière, on commence à préparer les faces de la lame en sciant le cris-

tal soit avec une scie mince si le cristal est tendre, soit avec un fil de fer tendu sur une sorte d'archet et que l'on arrose avec un liquide contenant de l'émeri en suspension. Si le cristal est assez volumineux, on le colle sur un support fixe horizontal de manière que le plan du trait de scie soit vertical; on dirige le fil qui sert de scie par deux rainures placées en regard l'une de l'autre et convenablement orientées par rapport au cristal.

Pour des cristaux plus petits, on réussit bien en fixant le cristal entre les deux parties d'un bouchon coupé suivant un plan diamétral. On oriente le cristal de manière qu'il fasse saillie à un bout et que le plan du trait de scie soit parallèle à celui qui termine les deux moitiés du bouchon et qui sert à diriger l'instrument.

M. Émile Bertrand, auquel on doit un grand nombre de recherches très intéressantes sur des substances cristallines presque microscopiques, se sert, pour les tailler, du procédé suivant.

Il dépose sur une lame de verre une goutte d'un mastic formé en fondant du baume et de la cire. Pendant que ce mastic est encore pâteux, il y fait adhérer le petit cristal à observer, qui est saisi par une pince délicate. On oriente le cristal suivant la direction qui paraît convenable et on ne l'abandonne qu'au moment où le mastic s'est entièrement solidifié. Cela fait, et pour consolider le cristal, on dépose tout autour, au moyen d'une pointe chaude, de la poix qui fond à une température bien inférieure à celle de la fusion du mastic. Le cristal étant complètement noyé dans la poix, on attend que celle-ci soit bien refroidie; elle prend alors une dureté assez grande pour pouvoir être usée à la meule. On use ensuite à la fois la poix et le cristal de manière à tailler dans celui-ci une face artificielle de direction convenable.

Lorsqu'on juge que l'usure est poussée assez loin, il faut retourner le cristal pour tailler une seconde face. A cet effet, on prend une seconde lame de verre sur laquelle on dépose une goutte de baume du Canada, et qu'on applique sur la face déjà taillée. On laisse refroidir, et on décolle la première lame de verre en la chauffant avec précaution; comme le cristal y adhère par l'intermédiaire d'une substance plus fusible que ne l'est le baume, on arrive assez aisément à faire cette opération sans décoller la seconde lame.

M. Bertrand est parvenu ainsi à observer les propriétés optiques sur des cristaux presque capillaires taillés perpendiculairement à leur longueur. Mais pour accomplir ces tours de force, il faut acquérir préalablement l'habileté que possède ce savant minéralogiste.

Lorsque la lame a été travaillée, il convient, surtout si elle est mince, de la fixer sur une lame de verre. La lame étant décollée et séparée du support qui a servi au polissage, on la nettoie en la lavant avec un pinceau humecté de benzine, puis on la fixe sur une lame de verre bien propre au moyen d'une goutte de baume. Si la face supérieure de la lame cristalline n'est pas très bien polie, on y supplée en la recouvrant d'une de ces lames de verre très minces dont on se sert dans les observations microscopiques et qui sont connues sous le nom de *couvre-objets*. On fait adhérer cette lame au moyen du baume.

Si le cristal est soluble dans l'eau, on se sert, pendant le travail, d'huile ou de benzine. Si, en même temps, ce qui arrive pour presque tous les cristaux artificiels, la substance est très tendre, on peut préparer la face à tailler avec un canif ou une petite scie plate; on use sur une lame de verre dépoli, avec de l'émeri très fin ou sans émeri. Le polissage est généralement difficile à obtenir; si le rouge d'Angleterre ou la potée d'étain ne conviennent pas, on se sert de papier ou de velours.

Beaucoup de substances, notamment la plupart des hydrates, s'altèrent sous l'influence de la chaleur nécessaire pour fondre les mastics ordinaires. Pour les fixer on peut recourir, si cela est possible, à une dissolution de gomme; on peut encore se servir de plâtre ou d'une dissolution de baume dans le chloroforme qui durcit par l'évaporation. Si aucun de ces moyens ne réussit, il faut tenir le cristal à la main ou le fixer dans un bouchon de liège.

I. — PROCÉDÉS PROPRES A DÉTERMINER LES SECTIONS PRINCIPALES D'UNE LAME CRISTALLINE.

Principe de l'observation. — Supposons qu'on ait à sa disposition une lame cristalline d'une épaisseur convenable et d'une orientation connue par rapport aux axes cristallographiques, et voyons quelles sont les observations que l'on peut faire sur cette lame en vue d'arriver à déterminer l'orientation et les dimensions de l'ellipsoïde optique.

La première et la plus importante est celle de l'orientation des sections principales, c'est-à-dire des axes de l'ellipse que le plan de la lame intercepte dans l'ellipsoïde inverse.

Pour cette observation il est nécessaire que la lame montre une ou plusieurs lignes dont l'orientation cristallographique soit connue. Ce seront, par exemple, les directions des fissures provoquées dans la lame par des clivages, ou ceux des bords de cette lame, qui sont déterminés

par l'intersection de la surface avec une face cristalline connue. C'est à ces lignes de repère qu'on rapporte l'orientation des sections principales.

Le principe de l'observation est le suivant : on place la lame sur une plaque tournante, entre un polariseur et un analyseur croisés à angle droit et dont on connaît les directions de vibration. Lorsqu'en tournant la lame on l'amène à l'extinction complète, les sections principales en sont respectivement parallèles aux deux vibrations du polariseur et de l'analyseur. La lame étant dans cette position d'extinction, l'angle dont il faut la faire tourner pour amener la ligne cristallographique, prise pour ligne de repère, à être parallèle à la vibration du polariseur, par exemple, est l'angle que fait une des sections principales avec cette ligne de repère.

Microscope polarisant de M. Émile Bertrand. — On peut se servir d'un microscope polarisant ordinaire dont le porte-objet doit être disposé d'une façon particulière. La disposition la plus commode est celle qui est due à M. Bertrand et représentée figure 120. Un nicol E est placé au-dessous du porte-objet; un autre nicol A coiffe l'oculaire. Celui-ci porte au foyer un réticule formé de deux fils à angle droit. Le porte-objet est formé d'un limbe gradué tournant en regard d'un vernier fixe[1]. Le limbe tournant supporte un chariot qui, au moyen de deux vis V et V', peut recevoir deux mouvements rectangulaires entre eux et, par construction, respectivement parallèles aux directions 0° et 90° du limbe. On peut fixer au bâti le limbe tournant et donner à celui-ci de petits mouvements au moyen d'une vis de rappel T.

Deux petites vis v et v' permettent de donner à l'objectif deux mouvements rectangulaires et d'en amener ainsi l'axe optique à coïncider avec l'axe de rotation du limbe. On s'assure que cette condition est remplie en constatant que la rotation du limbe laisse un point de l'image en contact avec le croisement des fils du réticule.

On voit sur la figure qu'au-dessus de l'objectif, le tube du microscope est évidé par une large fente dont les ouvertures sont perpendiculaires à la ligne zéro du vernier. Dans cette fente passe une coulisse F fixée à un tube mobile. Ce tube qui glisse dans celui du microscope est mis en mouvement par une vis P agissant sur une crémaillère. La

1. Il vaudrait mieux que le limbe divisé fût fixe et le vernier porté par la platine tournante. La lecture se ferait toujours commodément, tandis qu'avec la disposition figurée, elle est incommode avec certaines orientations du limbe encombré par le chariot, les vis V, V', etc.

coulisse F porte deux orifices circulaires qui peuvent être mis successivement dans l'axe de l'appareil. L'un de ces orifices est vide et il est placé dans l'axe lorsque le microscope sert à observer dans la lumière

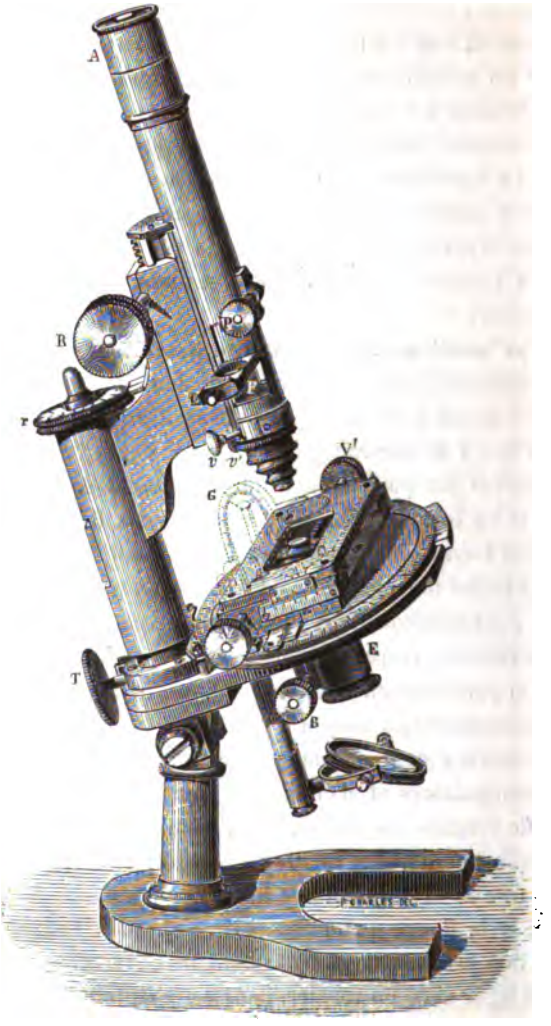


Fig. 120. — Microscope de M. Em. Bertrand.

parallèle. Lorsqu'on veut observer les phénomènes que montre la lumière convergente, on pousse la coulisse de manière à mettre dans l'axe l'orifice muni de la lentille. Nous reviendrons plus tard sur l'utilité de cette disposition.

Au-dessous de la coulisse, même lorsqu'elle est descendue au point le plus bas de sa course, la fente reste vide et permet d'introduire des lames diverses, telles que des prismes de quarz, des lames sensibles, quart d'onde, etc.

Microscope de M. Nachet. — M. Nachet construit aussi pour les besoins de la cristallographie un microscope qui est représenté figure 121. Il est surtout remarquable en ce que l'oculaire T est fixé à la pièce P, laquelle est reliée elle-même au bâti de l'appareil; il est ainsi immobile. Il en est de même du polariseur. Au contraire, le limbe du porte-objet est relié par la pièce P′ avec un tube MT′ dans lequel entre celui de l'oculaire. Tout ce système peut recevoir un mouvement de rotation autour de l'axe de l'oculaire.

Grâce à cette disposition, l'oculaire reste fixe tandis que l'objet et l'objectif sont entraînés par le même mouvement de rotation. Lorsqu'on tourne l'appareil, les choses se comportent donc comme si l'oculaire seul recevait un mouvement de rotation. Or, si l'axe de l'oculaire ne coïncide pas exactement avec l'axe de rotation, le déplacement qui en résulte dans la position de l'image par rapport au réticule est beaucoup moindre que celui qui résulterait d'un défaut de centrage de l'objectif laissé immobile en regard de l'objet animé d'un mouvement de rotation. Dans ce cas, en effet, lorsqu'on emploie un grossissement quelque peu considérable, il est presque impossible d'arriver à régler l'appareil d'une façon tellement précise que la rotation de la platine ne fasse pas disparaître l'objet hors du champ.

Dans les anciens appareils de M. Nachet, l'analyseur était placé à l'extrémité inférieure du tube fixe qui porte l'oculaire; cette disposition a quelquefois son utilité, mais elle est peu commode dans la plupart des observations minéralogiques où l'analyseur doit pouvoir être retiré à chaque instant.

L'appareil que représente la figure ne peut pas servir à observer dans la lumière convergente. M. Nachet a ajouté récemment à ses instruments une disposition analogue à celle de M. Bertrand.

Réglage du microscope. — Avant toute observation, il faut ajuster convenablement son microscope. Nous supposerons, dans ce qui suit, qu'on ait entre les mains le microscope Bertrand.

Il faut d'abord placer l'un des fils du réticule parallèle à la direction zéro du vernier fixe. A cet effet, on commence par amener le zéro du limbe à coïncider avec celui du vernier, et on maintient le limbe dans cette position en serrant la vis de pression. On place ensuite sur le porte-objet une

lame de verre, et l'on met au point un objet quelconque tel qu'un petit grain de poussière, que l'on amène, en déplaçant convenablement le chariot porte-objet, à être en contact avec le croisement des fils du réticule. On donne alors au chariot, en agissant sur la vis convenable, un mou-

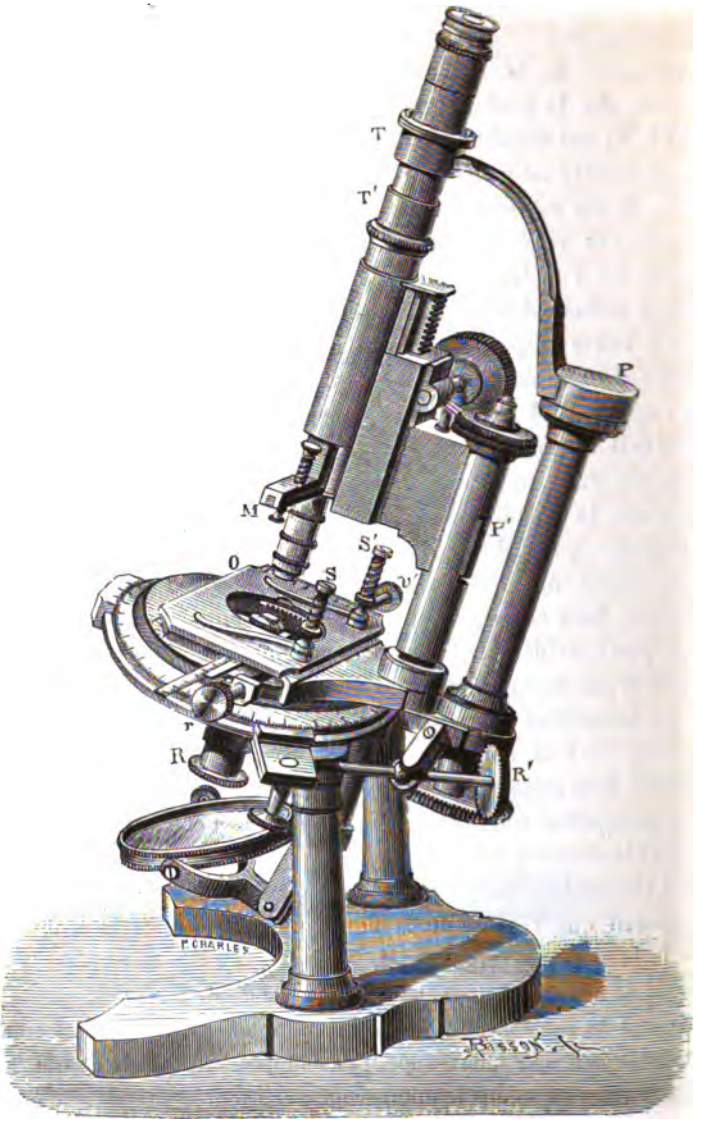


Fig. 121. — Microscope de M. Nachet.

ıent qui, par construction, est parallèle à la ligne zéro du limbe et vernier.

Si le fil du réticule était parallèle à cette direction, l'image du grain poussière se mouvrait sans le quitter. On fait tourner l'oculaire dans tube jusqu'à ce que cette condition soit réalisée. Pour qu'on puisse fixer dans cette position, l'oculaire porte à sa partie supérieure une ıgue dont un appendice entre dans une encoche pratiquée dans le be du microscope. La bague est ainsi fixée, mais l'oculaire peut ırner dans la bague jusqu'à ce qu'une petite vis de pression rende : mouvement impossible. Cette disposition a l'avantage que, le réglage péré et la vis de pression serrée, on peut enlever l'oculaire et le emettre, grâce à la saillie de la bague, exactement dans la position ɹu'il doit occuper.

Il faut maintenant placer le polariseur de manière que la vibration en soit parallèle à la ligne zéro du vernier ou à la direction perpendiculaire. Le procédé le plus simple, sinon le plus précis, consiste à placer sur le porte-objet une petite lame de tourmaline dont le bord est bien parallèle à la direction de son axe optique. On fait coïncider le bord de la lame avec la ligne zéro du réticule, et on tourne le polariseur jusqu'à ce que la lame de tourmaline ait atteint son extinction maxima. La vibration du polariseur est alors perpendiculaire à l'axe de la tourmaline et par conséquent à la direction zéro du vernier.

On obtient plus d'exactitude en employant le procédé suivant indiqué par M. L. Laurent. On prend une lame cristalline dont la section principale est nettement déterminée, par exemple une lame de quarz parallèle à l'axe dont le bord est parallèle à cette section. On place la lame sur le porte-objet de manière que le bord en soit exactement parallèle au fil du réticule et par conséquent à la direction zéro du vernier.

Le polariseur, la lame et l'analyseur étant placés d'une façon quelconque, l'intensité I de la lumière qui émerge après avoir traversé la lame, est (page 157)

$$I = \sin^2(\alpha + \beta) - \sin 2\beta \sin^2 \pi \frac{v - e}{\lambda},$$

β étant l'angle que forment les vibrations du polariseur et de l'analyseur, α l'angle que la vibration du polariseur fait avec la section principale de la lame.

L'intensité I' de la lumière qui émerge sans avoir traversé la lame est

$$I' = \sin^2(\alpha + \beta).$$

Les intensités I et I′ seront donc toujours différentes, sauf dans le cas où $\alpha = 0$, et $\beta = 0$. Dans le cas où $\alpha = 0$, cette égalité subsistera lorsqu'on tournera l'analyseur d'une façon quelconque.

On a donc ainsi le moyen de s'assurer du moment où, en tournant le polariseur, on l'a amené à avoir sa vibration parallèle à la section principale de la lame et par conséquent aussi à la direction zéro du vernier.

Le procédé est très sensible, parce que les deux plages dont on doit constater l'égalité d'intensité sont juxtaposées suivant une ligne qui est sans épaisseur si la lame a été bien travaillée.

Pour que la différence entre I et I′ soit aussi grande que possible, lorsque α n'est pas nul, il faut que $\sin^2 \pi \frac{o - e}{\lambda}$ soit égal à 1, c'est-à-dire que le retard engendré par la lame soit égal à une demi-onde ou plus généralement à un nombre impair de demi-onde.

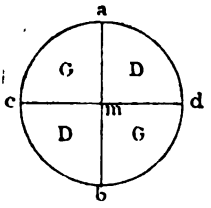


Fig. 122.

On peut encore, avec M. Bertrand, employer le procédé suivant qui donne une assez grande précision. On substitue à l'oculaire qui porte le réticule, un autre oculaire au foyer duquel on a placé quatre lames de quarz d'égale épaisseur, se raccordant suivant deux diamètres rectangulaires, et disposées de telle sorte que deux lames adjacentes sont de rotation contraire (fig. 122). On dispose l'oculaire de manière que, *ab*, par exemple, soit parallèle à la direction zéro du vernier. On superpose ensuite à l'oculaire un prisme de Rochon[1], et on le tourne jusqu'à

1. Le prisme de Rochon est formé de deux prismes de quarz ABC et BCD (fig. 124) collés suivant les faces hypoténuses. BCD est taillé de manière que BD est parallèle à l'axe du quarz, tandis que, dans ABC, AB est parallèle à cet axe. Un rayon MN entrant normalement à CD donne deux vibrations ordinaires ; arrivée en N, la vibration perpendiculaire à CD reste ordinaire et se propage, sans être déviée, suivant NP prolongement de MN. Mais la vibration vibrant parallèlement à CD devient extraordinaire après avoir passé N, et se dévie en faisant avec la normale un angle a donné par la formule

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{n_e}{n_o},$$

α étant l'angle BCD.

Si l'on appelle u le petit angle QNP, on aura sensiblement

$$u = \frac{n_e - n_o}{n_o} \sin \alpha,$$

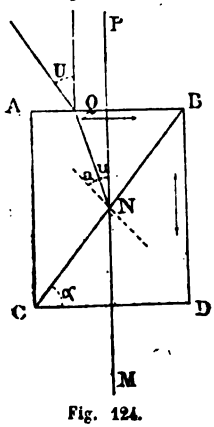


Fig. 124.

et si U est l'angle RQP formé avec l'axe de l'appareil par le rayon extraordinaire

ce qu'on ne voie plus qu'une image de la ligne *ab*. On voit alors deux images de la lame placée dans l'oculaire; l'une *abcd* (fig. 123) est l'image ordinaire, elle vibre perpendiculairement à *ab*; l'autre *a'b'c'd'* vibre parallèlement à *ab*. La partie *mc m'c'* de l'image contient la superposition de l'image ordinaire d'un cristal gauche et de l'image extraordinaire d'un cristal droit. La portion *mm' dd'* est au contraire formée par la superposition de l'image ordinaire d'un quarz gauche et de l'image extraordinaire d'un quarz droit. Ces deux plages n'ont donc la même teinte que lorsque la vibration du polariseur est parallèle ou perpendiculaire à *ab*.

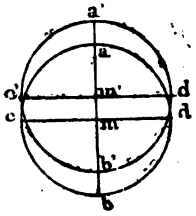


Fig. 123.

Le demi-croissant *aa'c'* est formé par l'image extraordinaire d'une lame gauche ; le demi-croissant *aa'dd'* est formé par l'image extraordinaire d'une lame droite. Ces deux demi-croissants ne sont de la même teinte que lorsque le polariseur est parallèle ou perpendiculaire à *ab*. Il en est de même pour les deux demi-croissants inférieurs.

On contrôle l'observation en la répétant après avoir tourné de 90° le prisme de Rochon, ce qui amène *cd* à ne donner qu'une seule image.

Le polariseur étant réglé, on en rend fixe l'orientation par un procédé analogue à celui qui a servi à rendre fixe celle du réticule.

On règle alors l'analyseur. On peut se contenter de le tourner jusqu'à ce que l'obscurité soit faite, le polariseur étant en place. Ce procédé est peu précis, à cause de la difficulté qu'on éprouve à juger avec exactitude du moment où le maximum d'obscurité est obtenu. Il vaut mieux placer sur le porte-objet la lame *demi-onde* qui a servi à régler le polariseur par le procédé Laurent et l'orienter de manière que le bord en soit parallèle au fil de réticule. On déplace alors le polariseur, en l'abaissant de manière à faire sortir de son encoche la saillie qui

émergeant dans l'air, on aura, aussi sensiblement

$$U = n_e\, u = \frac{n_e}{n_o}(n_e - n_o) \sin \alpha$$

ou, $\frac{n_e}{n_o}$ étant peu différent de 1,

$$U = (n_e - n_o) \sin \alpha.$$

On voit qu'un point M donne deux images polarisées à angle droit et situées dans le plan principal de l'appareil qui est normal aux faces d'entrée et de sortie et comprend la ligne de plus grande pente du plan BC. La vibration de l'image non déviée est perpendiculaire à ce plan principal ; celle de l'image déviée lui est parallèle.

en fixe l'orientation, puis on règle l'analyseur comme on a réglé le polariseur, en jugeant de l'égalité de teinte des deux plages. On place ainsi la vibration de l'analyseur soit parallèle, soit perpendiculaire à celle du polariseur, mais on fait aisément le choix entre ces deux solutions.

On peut encore placer sur le porte-objet une bilame formée de deux lames de quarz accolées, d'égale épaisseur, l'une droite, l'autre gauche. Le polariseur étant en place, l'analyseur lui sera perpendiculaire lorsque la teinte des deux lames sera exactement la même.

On peut se servir, pour le même objet, de l'oculaire de M. Bertrand contenant les quatre lames de quarz qui devront être amenées à la même teinte.

On peut aussi placer sur le porte-objet la bilame de Bravais (pages 176 et 177), formée de deux lames cristallines adjacentes dont les axes sont croisés à angle droit. Les deux parties de la lame ne sont de la même teinte que lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés à angle droit.

Il est commode, pour cette observation et pour beaucoup d'autres, de fixer une bilame semblable dans un oculaire spécial, ou encore de se servir d'un oculaire fendu latéralement, à la hauteur où se place le réticule. On peut passer dans cette fente, au moment voulu, soit la bilame de Bravais, soit une bilame de quarz, etc.

L'analyseur, après avoir été réglé, est fixé dans sa position par le même procédé que celui qui sert à fixer l'oculaire et le polariseur.

On peut vérifier l'exactitude du réglage du réticule, du polariseur et de l'analyseur, en plaçant sur le porte-objet une lame cristalline dont la section principale soit nettement indiquée par la forme même. On se sert avec avantage, pour cet objet, d'un petit cristal de *mésotype*. La mésotype est un minéral du groupe des zéolites, qui appartient au système orthorhombique et cristallise en petits prismes presque carrés très allongés dans le sens de l'un des axes binaires. Un de ces petits cristaux placés sur le porte-objet s'éteint lorsque la longueur du prisme est parallèle à l'une des vibrations du polariseur ou de l'analyseur. On place un de ces prismes sur le porte-objet, et il doit s'éteindre lorsque la longueur est parallèle à l'un des fils du réticule.

Avec un semblable cristal, on peut au reste, en tournant à la fois le polarisateur et l'analyseur, et après quelques tâtonnements, arriver à régler leur position, en se dispensant ainsi de l'opération, un peu longue, que nous venons de décrire.

Comme on ne juge pas très bien du moment où l'extinction maxima de la mésotype est obtenue, on peut observer avec l'oculaire à quatre lames de quarz. On place la mésotype de manière que son image soit à cheval sur celle des quatre lames. Le cristal ne paraît d'une couleur uniforme qui lorsque le polariseur et l'analyseur sont croisés à angle droit.

On peut, plus simplement, placer sur le porte-objet une bilame de quarz ; on pose la lame cristalline à cheval sur les deux quarz de rotation contraire. On tourne le porte-objet jusqu'à ce que les parties des deux quarz que recouvre la lame soient de même teinte.

On arriverait encore au même but en se servant de l'oculaire à bilame de gypse.

Détermination de l'azimuth des sections principales. — L'appareil étant réglé, il n'y a rien de plus aisé que de déterminer la direction des sections principales d'une lame. On place celle-ci sur le porte-objet ; on fait tourner le limbe, et on déplace le chariot jusqu'à ce que le fil du réticule coïncide avec la ligne cristallographique prise comme repère, on lit la division du limbe qui correspond au zéro du vernier ; puis on tourne le limbe jusqu'à ce que la lame s'éteigne et on fait une nouvelle lecture ; la différence des deux lectures donne l'angle d'une des sections principales avec la ligne de repère.

Nous avons déjà dit qu'on ne pouvait apprécier très exactement l'instant où le maximum d'obscurité de la lame est obtenu. On peut augmenter l'exactitude de l'observation en se servant d'un oculaire contenant soit les 4 lames de quarz de M. Bertrand, soit plus simplement une bilame de quarz, ou une bilame de Bravais. La lame cristalline étant placée sur le porte-objet, on en voit l'image, dans le plan du réticule, se superposer à celle de la bilame qui y est placée. On s'arrange pour que la lame cristalline soit à cheval sur les parties de la bilame et on tourne le porte-objet jusqu'à ce que la lame cristalline ait exactement la même teinte dans toutes ses parties.

On peut encore se servir d'un analyseur spécial. Le nicol qui le forme est scié en long suivant le plan de symétrie qui passe par la diagonale inclinée *ea* (fig. 125) ; on use ensuite le plan des faces de sciage obliquement et d'une quantité exactement égale, de sorte qu'après les avoir recollées, les sections principales de chacune des moitiés du nicol forment un angle de 3° environ l'une avec l'autre. Avec un semblable analyseur, superposé au polariseur, on voit deux portions du champ présentant des intensités différentes ; les intensités deviennent égales

entre elles lorsque le plan médian de l'analyseur est perpendiculaire à la vibration du nicol. Si l'on interpose une lame cristalline, l'égalité d'intensité des deux plages est détruite dans toute la partie qu'occupe la lame et elle n'est rétablie que lorsque l'une des sections principales de la lame est parallèle à la vibration du polariseur.

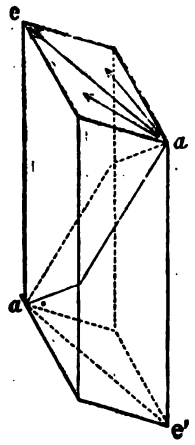


Fig. 125.

Quel que soit le mode d'observation, il faut toujours faire deux lectures diamétralement opposées pour détruire l'erreur d'exentricité. On peut d'ailleurs contrôler l'exactitude en observant successivement les directions des deux sections principales qui doivent être perpendiculaires l'une sur l'autre.

Après avoir fait une première observation, il faut, si l'on veut accroître l'exactitude, en faire une seconde avec la lame retournée sens dessus dessous, et prendre la moyenne des deux observations. On élimine ainsi du même coup les erreurs qui proviennent, soit de ce que le fil du réticule n'est pas exactement parallèle à la ligne zéro, soit de ce que la vibration du polariseur n'est rigoureusement parallèle ni à la direction zéro, ni au fil du réticule.

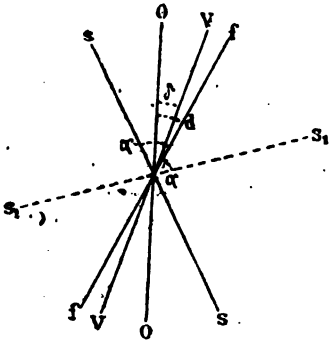


Fig. 126.

Soit en effet OO (fig. 126) la ligne zéro, VV la vibration du polariseur faisant avec OO un angle δ, *ff* le fil du réticule faisant avec OO un angle *d*. On met en coïncidence avec *ff* la direction cristallographique choisie, et la section principale est dirigée suivant *ss* faisant avec *ff* un angle α; on amène d'abord *ss* en VV et on mesure l'angle $\alpha - d + \delta$.

On retourne la lame sens dessus dessous, en ramenant la direction cristallographique à coïncider avec *ff*, ce qui revient à faire tourner la lame de 180° autour de *ff*; *ss* vient en $s_1 s_1$, et en le ramenant en coïncidence avec VV, on mesure l'angle $\alpha + d - \delta$. La moyenne est égale à α.

Toutes ces observations se font ordinairement avec la lumière blanche; mais, dans certains cas, il est nécessaire d'opérer avec de la lumière monochromatique.

On peut simplement placer sur l'oculaire du microscope un verre coloré ne laissant passer que des rayons qui sont sensiblement de la même couleur. Le verre rouge coloré par l'oxyde de cuivre est le plus propre à cet emploi, il donne une lumière dont la longueur d'onde moyenne est environ $\lambda_r = 0^{mm},000\ 628$. On peut aussi se servir de verres verts; on se sert encore de verres bleus colorés par le cobalt, malheureusement ils sont très loin d'être monochromatiques. On peut les remplacer avantageusement en plaçant devant le microscope une petite cuve en verre remplie d'une dissolution de sulfate de cuivre ammoniacal.

Mais il vaut beaucoup mieux éclairer le microscope par une flamme n'émettant que des rayons d'une seule longueur d'onde. Il suffit de placer dans la flamme d'un bec Bunsen un petit panier à fils de platine dans lequel on place soit du chlorure de sodium, soit du chlorure de lithium, soit du chlorure de thallium.

Le sodium donne une lumière jaune dont la longueur d'onde est $0^{mm},000589$. En réalité elle émet de la lumière qui comprend deux longueur d'onde distinctes, mais très voisines, dont l'une est $0^{mm},0005825$ et l'autre $0^{mm},0005889$.

Le lithium donne une lumière rouge dont la longueur d'onde est $0^{mm},0006707$, et le thallium une lumière verte dont la longueur d'onde est $0^{mm},0005349$.

Stauroscope. — Pour déterminer les sections principales d'une lame, on se sert fréquemment, surtout en Allemagne, d'un instrument spécial, nommé *stauroscope*, Cet appareil se compose d'un polariseur recouvert par une plaque de cuivre horizontale percée d'un orifice. La lame cristalline se place sur ce porte-objet qui peut tourner dans son plan d'angles mesurés par une graduation spéciale et qui est surmonté par un analyseur au-dessous et très près duquel est disposée une lame de calcite perpendiculaire à l'axe.

Lorsque la lame cristalline n'est pas placée sur le porte-objet, l'appareil se comporte comme une pince à tourmaline, et le polariseur et l'analyseur étant croisés à angle droit, on voit les anneaux et la croix noire que produit la lame de calcite.

Si l'on place la lame sur le porte-objet au-dessus de l'orifice, la croix noire est en général disloquée, et ne reprend sa forme première que lorsque l'une des sections principales de la lame est parallèle à l'une des vibrations du polariseur ou de l'analyseur.

Au lieu d'une seule lame de calcite, il est préférable d'en super-

poser deux légèrement inclinées sur l'axe et en sens contraire. Les figures d'interférence sont assez complexes; la croix n'existe plus, mais elle est remplacée par une raie noire située dans le plan des axes des deux lames. La partie centrale de cette bande tourne par rapport aux parties extrêmes, lorsque les sections principales de la lame cristalline ne coïncident pas avec les vibrations du nicol.

Cet instrument n'est ni plus commode, ni plus exact que le microscope polarisant, qui a d'ailleurs le grand avantage de servir en outre à la plupart des observations que l'on peut faire sur une lame cristalline.

La position des axes optiques déduite de l'observation des sections principales de diverses lames. — La détermination de l'orientation des sections principales sur des lames convenablement choisies peut toujours suffire, au moins en principe, pour fixer l'orientation des axes de l'ellipsoïde et pour donner la grandeur de l'écartement des axes optiques, c'est-à-dire, en un mot, pour fixer la position des axes optiques. On sait, en effet, que l'orientation des sections principales sur un plan quelconque peut être obtenue par une construction très simple, lorsque la position des axes optiques est connue.

Il y a trois cas à distinguer, suivant que le cristal, au point de vue de la symétrie, est ter-binaire, binaire ou asymétrique. Nous n'avons pas, bien entendu, à nous occuper des cristaux uniaxes pour lesquels la cristallographie donne immédiatement la direction de l'axe optique.

1° *Cristal orthorhombique.* — Supposons d'abord le cristal ter-binaire. La direction des axes de l'ellipsoïde est, pour toutes les couleurs, donnée par la cristallographie géométrique, puisque ces axes sont ceux mêmes de symétrie. On peut trouver la position des axes optiques en taillant trois lames successivement perpendiculaires aux trois axes de symétrie. La lame perpendiculaire à l'axe moyen b d'élasticité optique ne montre ordinairement ni courbes noires ni courbes colorées sous le microscope à lumière convergente éclairé par de la lumière blanche, mais elle en montre de très nettes lorsque l'on emploie la lumière monochromatique.

Les lames perpendiculaires aux axes extrêmes de l'ellipsoïde a et c, montrent en lumière convergente les phénomènes que nous avons décrits dans un autre chapitre; ils permettent de mesurer directement l'angle des axes optiques, par un des procédés dont nous parlerons plus loin, en même temps que d'observer le sens et la grandeur de la dispersion cristalline.

On peut jusqu'à un certain point suppléer à ces observations en dé-

inant, sur une lame, oblique aux trois axes de symétrie, la direc- des sections principales. On peut alors calculer les angles que font ections principales avec les trois axes a, b, c, de l'ellipsoïde dont rection est connue, et en déduire l'écartement angulaire des axes ques.

ient $m'\,n'\,p'$ les cosinus des angles que fait avec ces axes une des deux directions de vibration;

$m''\,n''\,p''$ les cosinus des angles que fait l'autre direction avec les mêmes axes;

u, v, w les cosinus des angles que fait avec les axes la normale à la lame;

r' et r'' les inverses des rayons de l'ellipsoïde inverse correspondant à chacune des deux directions de vibration.

Reportons-nous à la page 109 où nous trouverons les équations

$$\frac{m'}{r'}(a^2 - r'^2) = -u.\mathrm{A}'_1 a'_1,$$

$$\frac{n'}{r'}(b^2 - r'^2) = -v.\mathrm{A}'_1 a'_1,$$

$$\frac{p'}{r'}(c^2 - r'^2) = -w.\mathrm{A}'_1 a'_1.$$

Pour la vibration perpendiculaire, on a de même

$$\frac{m''}{r''}(a^2 - r''^2) = -u.\mathrm{A}''_1 a''_1,$$

$$\frac{n''}{r''}(b^2 - r''^2) = -v.\mathrm{A}''_1 a''_1,$$

$$\frac{p''}{r''}(c^2 - r''^2) = -w.\mathrm{A}''_1 a''_1.$$

On tire aisément de ces relations

$$m'm''\frac{(a^2 - r'^2)(a^2 - r''^2)}{u^2} = n'n''\frac{(b^2 - r'^2)(b^2 - r''^2)}{v^2} = p'p''\frac{(c^2 - r'^2)(c^2 - r''^2)}{w^2}$$

Le produit $(a^2 - r'^2)(a^2 - r''^2)$ est toujours positif, car les deux facteurs sont positifs; le produit $(c^2 - r'^2)(c^2 - r''^2)$ est aussi positif parce que les deux facteurs sont négatifs; seul le produit $(b^2 - r'^2)(b^2 - r''^2)$ est négatif, car si $b > r'$ on a $b < r''$ et réciproquement. Des trois pro-

duits $m'm''$, $n'n''$, $p'p''$, les deux extrêmes sont donc toujours de même signe, et le moyen de signe contraire à celui des deux autres.

L'équation de la surface des vitesses normales donne

$$\frac{u^2}{a^2-r'^2}+\frac{v^2}{b^2-r'^2}+\frac{w^2}{c^2-r'^2}=0.$$

En y faisant $w^2=1-u^2-v^2$, on en tire

$$\frac{u^2(c^2-a^2)}{a^2-r'^2}+\frac{v^2(c^2-b^2)}{b^2-r'^2}+1=0.$$

On aurait de même

$$\frac{u^2(c^2-a^2)}{a^2-r''^2}+\frac{v^2(c^2-b^2)}{b^2-r''^2}+1=0.$$

Et en retranchant membre à membre ces deux équations

$$\frac{u^2}{(c^2-b^2)(a^2-r'^2)(a^2-r''^2)}=-\frac{v^2}{(c^2-a^2)(b^2-r'^2)(b^2-r''^2)},$$

on aurait de même

$$\frac{u^2}{(b^2-b^2)(a^2-r'^2)(a^2-r''^2)}=-\frac{w^2}{(b^2-a^2)(c-r'^2)(c^2-r''^2)},$$

et par conséquent

$$\frac{u^2}{(b^2-r'^2)(a^2-r'^2)(a^2-r''^2)}=-\frac{w^2}{(a^2-c^2)(b^2-r'^2)(b^2-r''^2)}$$
$$=\frac{w^2}{(a^2-b^2)(c^2-r'^2)(c^2-v''^2)}.$$

Substituant ces valeurs dans les expressions en $m'm''$, $n'n''$ et $p'p'$, il vient enfin

$$\frac{m'm''}{b^2-c^2}=-\frac{n'n''}{a^2-c^2}=\frac{p'p''}{a^2-b^2}.$$

Ces deux équations n'en font qu'une en réalité, car on peut tirer l'une d'entre elles de l'autre par les relations

$$m'm''+n'n''+p'p''=0$$

et

$$b^2-c^2-(a^2-c^2)+a^2-b^2=0.$$

Si l'on connaît les directions des axes et celles des sections principales d'un plan quelconque, on pourra calculer les angles de ces sections principales avec les axes et, par conséquent, les cosinus m', n', p',

m'', n'', p'', ainsi que les produits $m'm''$, etc. Celui de ces deux produits dont le signe est contraire au signe des deux autres correspond à l'axe moyen b dont la position est ainsi déterminée.

Si l'on appelle V_m l'angle que fait un des axes optiques avec l'axe auquel se rapportent les cosinus m' et m'', on a

$$\operatorname{tg}^2 V_m = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} = \frac{m'm''}{p'p''}.$$

De même si V_p est l'angle fait par un axe optique avec l'axe auquel se rapportent les cosinus p' et p'', on a

$$\operatorname{tg}^2 V_p = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} = \frac{p'p''}{m'm''}.$$

On pourra voir quel est des deux axes celui qui correspond à la bissectrice aiguë, mais on ne peut pas savoir lequel des deux correspond à l'axe maximum a ou à l'axe minimum c. On résoudrait d'ailleurs aisément cette question en observant une lame parallèle au plan des axes optiques, lequel est connu par ce qui précède, et déterminant quelle est, des deux vibrations transmises par cette lame, celle qui se propage le plus lentement; elle est parallèle à c, l'autre l'est à a.

2° *Cristal clinorhombique.* — Supposons maintenant que le cristal est clinorhombique. L'axe de symétrie que détermine la cristallographie est, pour toutes les couleurs, un axe de l'ellipsoïde. Les directions des deux autres axes sont aisément déterminées en taillant une lame parallèle au plan de symétrie g^1, et observant les deux sections principales de cette lame qui sont les deux directions cherchées.

Les trois directions des axes étant connues, l'observation des sections principales d'une lame oblique par rapport aux trois axes suffit à faire connaître la direction de l'axe moyen et la grandeur de l'angle vrai des axes.

Pour montrer comment on peut conduire les calculs, nous allons appliquer la théorie au cas de l'amphibole trémolite, minéral qui se présente sous la forme de cristaux allongés suivant l'arête mm [001], avec des clivages faciles parallèles aux faces m (110), lesquelles sont inclinées les unes sur les autres d'un angle égal à 124°,11′.

L'observation d'une lame parallèle à g^1 (010) montre que l'un des axes fait avec h^1g^1 un angle égal à + 75°.

Une lame de clivage parallèle à m montre que, des deux sections principales, l'une fait avec l'arête mg^1 un angle égal à + 77°,8.

Soit, sur la surface d'une sphère (fig. 127), x, y, z les pôles des axes d'élasticité, le diamètre hh' étant parallèle à l'arête mg^{I} et le diamètre xx' étant parallèle à l'axe de symétrie. Sur un grand cercle parallèle à la face m, c'est-à-dire passant par hh' et faisant avec le plan de symétrie hzh' un angle égal à 68°,6, les points s' et s'' distants entre eux de 90° seront les pôles des sections principales si s'' fait avec le grand cercle perpendiculaire à hh' un angle à 77°,8. Il est alors très aisé de calculer les cosinus ou plutôt les log. des cosinus des angles que font s' et s'' avec x, y et z. En appelant m', m'' les cosinus des angles de s' et s'' avec x; n', n'' ceux des angles avec y; p', p'' ceux des angles avec z, on constate que les produits $n'n''$, $p'p''$ sont négatifs, le produit $m'm''$ étant positif. On en conclut que l'axe de symétrie xx' est l'axe moyen d'élasticité optique, le plan des axes optiques coïncidant avec le plan de symétrie g^{I}.

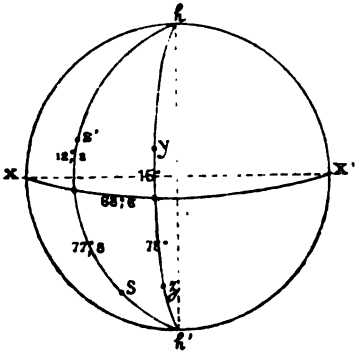


Fig. 127.

On a ainsi, appelant V l'angle que fait un axe optique avec Oy,

$$\mathrm{tg}^2\,\mathrm{V} = \frac{n'n''}{p'p''}.$$

Or on a trouvé

$$\log n'n'' = \bar{2},8941$$

et

$$\log p'p'' = \bar{2},9208;$$

on a donc

$$\log \mathrm{tg}^2\,\mathrm{V} = \bar{1},9733,$$

d'où

$$\mathrm{V} = 44^\circ,1.$$

La direction Oy est donc celle de la bissectrice aiguë, et les axes optiques, situés dans le plan g^1, sont écartés de 88°,2. C'est, en effet, à peu près ce que donne l'observation directe.

3° *Cristal triclinique.* — Quant aux cristaux tricliniques, l'observation des sections principales sur quatre lames d'une orientation cristallographique connue, suffit bien à donner l'orientation de l'ellipsoïde et

la position des axes optiques, et l'on peut théoriquement mettre le problème en équation.

On doit supposer connus les cosinus des angles que font les sections principales des quatre lames avec trois axes coordonnés rectangulaires. Pour la lame 1, ces cosinus seront

$$(m'_1 n'_1 p'_1) \quad (m''_1 n''_1 p''_1).$$

On prendra pour inconnues les cosinus des angles que font, avec les axes coordonnés, les axes de l'ellipsoïde : ces cosinus

$$(\mathrm{MNP}), \quad (\mathrm{M'N'P'}), \quad (\mathrm{M''N''P''}),$$

sont liés entre eux par 6 relations qui ne laissent que 3 quantités inconnues.

On forme alors, en fonction de ces inconnues, les cosinus des angles que font avec les axes de l'ellipsoïde les sections principales d'une lame, et l'on a, en vertu des relations de la page 305

$$\frac{(\mathrm{M}m_1 + \mathrm{N}n_1 + \mathrm{P}p_1)(\mathrm{M}m'_1 + \mathrm{N}n'_1 + \mathrm{P}p'_1)}{(\mathrm{M}''m_1 + \mathrm{N}''n_1 + \mathrm{P}''p_1)(\mathrm{M}''m'_1 + \mathrm{N}''n'_1 + \mathrm{P}''p'_1)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2},$$

et trois équations analogues pour chacune des lames 2, 3 et 4. On a ainsi quatre équations déterminant les 4 inconnues qui sont : $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$ et les 3 données fixant les 9 cosinus (MNP) (M'N'P') (M''N''P'').

Mais la complexité des calculs qu'entraînerait la résolution de ces équations enlève toute valeur à ce procédé.

On en est donc réduit à des tâtonnements. On cherche, par l'observation de diverses lames, à en trouver une où l'on puisse voir, en lumière convergente, les lemniscates et les hyperboles noires formées autour d'une bissectrice. Ces lemniscates seront plus ou moins excentrées, mais elles n'en feront pas moins connaître la direction dans laquelle il faut chercher la bissectrice, et par conséquent l'orientation qu'il faut donner à la surface d'une nouvelle lame pour que celle-ci montre des courbes moins excentrées. On arrive ainsi, après un certain nombre de tâtonnements, à obtenir une lame assez près d'être normale à la bissectrice pour qu'on puisse, par les moyens que nous ferons connaître plus loin, déterminer la position exacte de la bissectrice, et l'orientation des deux plans principaux qui se croisent suivant cette bissectrice.

L'orientation de l'ellipsoïde est alors complètement fixée. La mesure de l'angle des axes, celle du retard de la lame pour un faisceau nor-

mal, et enfin celle de son épaisseur achèvent de déterminer d'une façon complète les propriétés biréfringentes de la substance.

Lorsqu'on a à effectuer cet ensemble d'opérations toujours fort délicat, il importe, lors de la taille de la lame perpendiculaire, ou à peu près perpendiculaire à la bissectrice, de conserver quelques-unes des faces cristallographiquement connues, de manière à repérer, par des mesures goniométriques, la face de la lame par rapport aux axes cristallographiques.

Observation du signe de la lame. — Une lame cristalline étant donnée, et les directions des vibrations principales étant connues, il est très utile de déterminer laquelle des deux vibrations se propage le plus lentement. C'est ce qu'on appelle observer le signe de la lame.

On sait qu'à cet effet la lame étant placée entre deux nicols croisés à angle droit, on superpose une lame cristalline de signe connu dont les vibrations principales sont parallèles à celles de la lame.

Pour cette observation et pour d'autres analogues, le microscope de M. Bertrand porte, au-dessus de l'objectif, une ouverture par laquelle on peut introduire une lame de mica fixée sur une lame de verre. Les nicols ayant leurs sections principales parallèles ou perpendiculaires à l'orifice, et la lame cristalline placée sur le porte-objet ayant ses vibrations à 45° des sections des nicols, il suffit que la lame de mica ait ses sections principales à 45° de sa longueur. On marque sur le verre la direction du plan des axes du mica, qui est celle de la vibration la plus lente. Lorsque l'introduction du mica fait monter la teinte de la lame cristalline, la vibration la plus lente de celle-ci est parallèle à la ligne des axes du mica, et inversement.

Lorsque la teinte de la lame est d'ordre élevé, il faut prendre un mica très mince, dont le retard corresponde à un quart d'onde par exemple. Lorsque la teinte de la lame est très faible, on prend pour le mica un retard assez élevé, correspondant par exemple à la teinte sensible. C'est alors la variation de teinte du mica que l'on observe.

II. — MESURE DES DIFFÉRENCES DES INDICES PRINCIPAUX D'UNE LAME CRISTALLINE.

On peut se proposer de mesurer les différences des indices correspondant aux deux vibrations principales que transmet normalement une lame donnée. Si n et n' sont ces indices relatifs à une certaine longueur d'onde λ, on a

$$r = (n - n')\varepsilon,$$

r étant le retard introduit par la lame entre les deux vibrations principales et ε l'épaisseur. Pour connaître $n-n'$, on doit mesurer successivement le retard r, et l'épaisseur ε.

Appréciation du retard par l'examen de la teinte de polarisation. — Lorsque la substance n'est pas colorée et que la dispersion cristalline n'est pas très considérable, on peut apprécier le retard par la seule inspection de la couleur de polarisation qu'elle prend sous le microscope polarisant entre deux nicols croisés. En comparant cette couleur à celles de l'échelle de Newton que nous avons donnée page 165, on obtient le retard correspondant à peu près à la longueur d'onde du jaune moyen. Ce procédé n'est pas très précis; l'approximation qu'il permet d'atteindre dépend d'ailleurs de la nature de la couleur observée et peut varier de 1/10 à 1/50 de la valeur cherchée. La plus grande difficulté, qui est de savoir à quel ordre appartient la couleur que l'on a sous les yeux, peut être résolue assez aisément en se servant d'une lame prismatique de quarz taillée de manière que l'axe du quarz soit dans le plan de la lame. On la superpose à la lame cristalline, la vibration la plus lente du quarz coïncidant avec la vibration la plus rapide de la lame, et on enfonce graduellement la lame prismatique de manière que l'épaisseur de cette lame superposée à la lame cristalline aille en croissant.

Au commencement, l'épaisseur de la lame prismatique étant presque nulle, la teinte de la lame est peu modifiée; puis elle baisse de plus en plus à mesure que l'on enfonce la lame prismatique jusqu'à devenir grise ou noire. On voit ainsi défiler sous ses yeux toute la série des teintes de l'échelle comprises entre celle qui est propre à la lame, et celle qui correspondrait à un retard nul; si, dans ce défilé, une couleur analogue à celle de la lame reparaît deux fois, la couleur de la lame est du troisième ordre; si elle ne reparaît qu'une seule fois, la couleur de la lame est du deuxième ordre, etc.

Malgré son peu de précision, ce procédé rend de grands services parce qu'il est d'un emploi très facile et qu'il permet d'apprécier à simple vue les légères variations qu'introduisent dans la biréfringence de la lame diverses circonstances, telles que l'inégalité d'épaisseur, l'action de la chaleur, etc.

Emploi du compensateur à franges ou de Babinet. — On peut atteindre une exactitude beaucoup plus grande en se servant des appareils appelés *compensateurs*. Il y en a de deux sortes, les compensateurs à franges et les compensateurs à teintes plates.

Nous avons indiqué (page 178) le principe du compensateur à franges qui se compose de deux prismes de quarz de même angle superposés de manière que les sections principales soient croisées, et que la tête du coin de l'une corresponde au tranchant du biseau de l'autre. Une des lames est immobile, l'autre est mobile et on en mesure le mouvement au moyen d'une vis micrométrique.

On place l'appareil au foyer d'un oculaire spécial que l'on peut à volonté substituer à l'oculaire ordinaire du microscope. On commence d'abord par le tarer. A cet effet, l'oculaire étant surmonté d'un nicol croisé à angle droit sur le polariseur, on éclaire le microscope par de la lumière monochromatique, celle du sodium par exemple. Le compensateur montre une série de franges noires équidistantes; on fait tourner la vis micrométrique et on note le déplacement d qu'il a fallu donner au prisme mobile pour amener successivement sous le fil central du réticule deux franges voisines. Ce déplacement d correspond à une longueur d'onde $\lambda_D = 0^{mm},000\,589$.

Le microscope étant éclairé par de la lumière blanche et le compensateur placé au zéro, c'est-à-dire disposé de manière que la frange noire centrale coïncide avec le fil du réticule, on place une lame cristalline sur le porte-objet. Si les vibrations principales de la lame sont parallèles à celles des nicols, l'addition de la lame n'introduit aucun retard dans le faisceau, et la frange incolore du compensateur ne bouge pas. Si on tourne la lame de 45°, la frange incolore vient se placer soit à droite soit à gauche du réticule, suivant le rapport qui existe entre le signe de la lame cristalline et celui de la lame prismatique inférieure du compensateur. Lorsqu'on a fait une observation sur une lame cristalline de signe connu, le sens du déplacement de la frange indique le signe de la lame cristalline qui a produit ce déplacement.

Supposons que la lame cristalline placée dans une certaine position rejette la frange à droite; lorsqu'on la tournera de 90°, on en aura changé le signe par rapport à celui du compensateur et la frange est rejetée à gauche.

Lorsqu'on veut mesurer le retard de la lame, on la place dans la première position et l'on mesure le déplacement qu'il faut donner à la lame prismatique mobile pour ramener la frange noire au centre; on fait sur l'échelle une lecture l. On tourne alors de 90° le porte-objet et la lame cristalline, la frange est rejetée à gauche, et pour la ramener au centre, il faut déplacer le prisme mobile de manière à faire

une lecture l'. La quantité $\frac{l'-l}{d}\lambda_D$ est le retard engendré par la lame.

On est toujours obligé d'observer d'abord avec la lumière blanche. C'est seulement en effet avec cette lumière que la frange qui correspond à la compensation exacte entre la bissectrice de l'appareil et celle de la lame, se distingue de toutes les autres. Mais si la dispersion cristalline est faible, la frange qui, dans une lumière monochromatique, correspond à la compensation, occupe une position très voisine de celle de la frange centrale dans la lumière blanche. La position de celle-ci étant déterminée, on substitue la lumière monochromatique, et la position de la frange noire pour laquelle il y a compensation se trouve fixée sans ambiguité. On achève alors la mesure et on obtient la différence des indices correspondant à une longueur d'onde connue.

L'exactitude que l'on peut atteindre est évidemment plus grande lorsque la biréfringence est faible, parce que, pour un même retard, l'épaisseur est plus grande. Lorsque la biréfringence est exceptionnellement considérable, comme cela a lieu pour la calcite par exemple, le procédé est défectueux, et il vaut mieux recourir à la méthode du prisme.

Influence de la dispersion cristalline. — Nous avons supposé que la dispersion cristalline était nulle ou sensiblement nulle; lorsqu'il n'en est plus ainsi, l'observation avec la lumière blanche cesse d'être rigoureuse, et il est nécessaire d'étudier l'influence de cet élément perturbateur. Nous prendrons pour guide le mémoire[1] que M. Cornu a publié sur cette question.

Si l'on appelle n et n' les deux indices de la lame d'épaisseur ε; si l'on appelle E l'épaisseur de la lame de quartz traversée dans une certaine section du compensateur, c'est-à-dire la différence des épaisseurs des deux lames de quarz croisées qui se superposent dans cette section, N et N' les indices principaux du quarz, l'intensité I de la partie de l'image correspondant à cette section de compensateur est (v. p. 174)

$$I = \sin^2\pi\left(\varepsilon\frac{n-n'}{\lambda} + E\frac{N-N'}{\lambda}\right),$$

ou, en prenant, pour abréger,

$$\varphi = \varepsilon\frac{n-n'}{\lambda} + E\frac{N-N'}{\lambda},$$

$$I = \sin^2\pi\frac{\varphi}{\lambda}.$$

1. *C. R.* 95-809 (1881) et *J. de phys.* (2), I, 293 (1882).

Supposons d'abord qu'entre le polariseur et l'analyseur, toujours supposés croisés à angle droit, nous interposions le compensateur seul, ce qui revient à supposer $\varepsilon = 0$, nous aurons

$$\varphi = E\,\frac{N - N'}{\lambda}.$$

Si l'on appelle x la distance d'un point de l'image au centre, on a d'ailleurs, p étant une constante,

$$x = pE,$$

si l'on suppose qu'au centre de l'image les prismes de quarz superposés sont de même épaisseur, ce qui donne $E = 0$ pour $x = 0$.

Pour des valeurs de E donnant

$$E\,\frac{N - N'}{\lambda} = \ldots\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

on a

$$\varphi = \ldots\ -3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ \ldots,$$

et par conséquent autant de franges noires que séparent des longueurs égales à $\frac{p\lambda}{N - N'}$. Entre ces minima de I sont comprises des bandes d'intensité maxima qui bissèquent les espaces compris entre les bandes minima et correspondent à

$$E\,\frac{N - N'}{\lambda} = \ldots\ -\frac{3}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \ldots.$$

Supposons que nous nous servions de lumière blanche, les minima d'intensité correspondent aux minima d'intensité de celle des radiations qui a, dans le spectre solaire, l'intensité maxima. On admet que cette radiation est jaune et a pour longueur d'onde $[\lambda_j = 0,^{mm}000,550]$ environ. Mais les franges minima, qui, avec une lumière rigoureusement monochromatique, sont toutes semblables entre elles, ne le sont plus du tout dans le cas de la lumière blanche. La frange qui correspond alors à $\varphi = 0$, ou

$$E\,\frac{N - N'}{\lambda_j} = 0,$$

correspond à $E = 0$, et est par conséquent une frange d'intensité nulle pour toutes les longueurs d'onde, quelles qu'elles soient. Cette frange

st donc encore d'intensité nulle et par conséquent complètement noire, vec la lumière blanche.

Quant aux autres franges données par l'équation générale, elles ne ont plus noires, car si elles ne sont plus éclairées par les radiations λ_j, elles le sont par toutes les autres. On peut voir en outre que ces franges ne sont pas achromatiques, mais colorées. En effet, pour qu'il y ait achromatisme en un point de l'image correspondant à l'épaisseur E, il faut que I varie sensiblement d'une manière proportionnelle à λ. Cela exige que la courbe dont l'ordonnée serait I et l'abscisse λ, s'approche autant que possible d'être une droite. Pour cela il faut que $\frac{d^2I}{d\lambda_j^2}$ soit nul ou sensiblement nul.

Or nous avons

$$I = \sin^2 \pi \frac{\varphi}{\lambda_j},$$

$$\frac{dI}{d\lambda} = 2\pi \left(d\frac{\varphi}{\lambda}\right)_j \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda_j},$$

$$\frac{d^2I}{d\lambda^2} = 2\pi d^2 \left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)_j \sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda_j} + 4\pi \left(d\frac{\varphi}{\lambda}\right)_j^2 \cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda_j}.$$

Lorsque $\frac{\varphi}{\lambda_j}$ est égal à un nombre entier, $\sin 2\pi \frac{\varphi}{\lambda_j} = 0$, $\cos 2\pi \frac{\varphi}{\lambda_j} = 1$, et pour que $\frac{d^2I}{d\lambda_j^2} = 0$, il faut, et il suffit qu'on ait

$$\left(d\frac{\varphi}{\lambda}\right)_j = 0,$$

ou, dans le cas actuel

$$-E\frac{n-n'}{\lambda_j} + E\frac{d(n-n')}{d\lambda} = 0.$$

Puisque E est la seule variable de cette équation, il est clair que celle-ci ne peut être satisfaite que pour $E = 0$.

La frange centrale seule est donc achromatique. Il est clair d'ailleurs que I gardant la même valeur pour $+E$ et $-E$, la coloration est symétrique de part et d'autre de cette frange centrale achromatique.

Si, au lieu de supposer les nicols croisés, nous les supposions parallèles, on aurait

$$I = \cos^2 \pi \frac{\varphi}{\lambda},$$

la frange centrale serait encore achromatique dans la lumière blanche, mais au lieu d'être noire, elle serait blanche.

Considérons maintenant le cas où l'on ajoute une lame cristalline, dont les sections principales sont parallèles à celles du quartz. Nous aurons encore, avec les radiations λ_j, des franges noires équidistantes, qui, avec la lumière blanche, seront encore des lignes d'intensité lumineuse minima; mais il s'agit de savoir si, parmi ces franges, il y en aura quelqu'une d'achromatique, et, le cas échéant, laquelle le sera.

La condition d'achromatisme est toujours

$$d^2\left(\frac{\varphi}{\lambda}\right)_j \sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda_j} + 4\pi\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_j^2 \cos 2\pi\frac{\varphi}{\lambda_j} = 0.$$

Cette condition exige

$$\sin 2\pi\frac{\varphi}{\lambda_j} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_j = 0.$$

La première de ces équations est satisfaite pour les franges *minima* et les franges maxima de la radiation monochromatique λ_j. Si, pour une de ces franges, on a $\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_j = 0$, elle sera la frange achromatique cherchée. Cette frange achromatique sera blanche si elle correspond à une frange maxima; noire, si elle correspond à une frange minima. Dans l'un et l'autre cas, la coloration sera sensiblement symétrique de part et d'autre de cette frange achromatique qu'on peut appeler *encore* la frange centrale.

Si, pour aucune des franges minima ou maxima de λ_j, *on n'a* $\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)_j = 0$, il n'y a plus, à proprement parler, de frange achromatique, mais celle des franges minima ou maxima qui se rapprochera *le plus* de la position pour laquelle on aurait $\left(\frac{d\lambda}{d\varphi}\right)_j = 0$, sera sensiblement achromatique; elle sera gris blanc si elle correspond à son maximum, gris noir si elle correspond à un minimum. Dans l'un et l'autre cas, la coloration de part et d'autre de la frange, qu'on pourrait *appeler pseudo-achromatique*, sera dyssymétrique.

On peut admettre que la dispersion est représentée par une *formule* de la forme $A + \frac{B}{\lambda^3}$.

Nous pouvons donc poser

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}, \qquad n' = a' + \frac{b'}{\lambda^2}, \qquad N = A + \frac{B}{\lambda^2}, \qquad N' = A' + \frac{B'}{\lambda^2}.$$

et la condition d'achromatisme, $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$, devient

$$\varepsilon\,(a - a') + E(A - A') + \frac{3\varepsilon}{\lambda^2}(b - b') + \frac{3E}{\lambda^2}(B - B') = 0,$$

équation dans laquelle il faut donner à λ la valeur $\lambda_j = 550$ millionièmes de millimètre. On en déduit

$$E = -\varepsilon \frac{a - a' + 3\frac{b - b'}{\lambda^2}}{A - A' + 3\frac{B - B'}{\lambda^2}}.$$

ou sensiblement, en négligeant les quantités du second ordre en $b -$ et $B - B'$, qui sont presque toujours petits par rapport à $a - a'$ et $A - A'$,

$$E = -\varepsilon \frac{a - a'}{A - A'}\left[1 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{b - b'}{a - a'} - \frac{B - A'}{A - B'}\right)\right].$$

L'épaisseur du quartz qui correspond à la frange noire pour laquelle $\varphi = 0$ avec les radiations λ_j, est donnée par la relation

$$E_1 = -\varepsilon \frac{a - a'}{A - A'}\left[1 + \frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{b - b'}{a - a'} - \frac{B - B'}{A - A'}\right)\right].$$

La distance d comprise entre la frange pour laquelle $\varphi = 0$ et le point pour lequel on a $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$, est donc

$$d = p(E - E_1) = -p\varepsilon \frac{a - a'}{A - A'}\left[1 + \frac{2}{\lambda^2}\left(\frac{b - b'}{a - a'} - \frac{B - B'}{A \quad A'}\right)\right].$$

La distance f qui est comprise entre deux franges noires de la lumière monochromatique λ_j est d'ailleurs égale à

$$f = \frac{p\lambda}{A - A' + \frac{B - B'}{\lambda^2}}.$$

On a donc, toutes réductions faites, et conservant le même système d'approximation

$$\frac{d}{f} = 2\frac{\varepsilon(a-a')}{\lambda}\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{b-b'}{a-a'} - \frac{B-B'}{A-A'}\right).$$

La quantité $\frac{\varepsilon(a-a')}{\lambda}$ est voisine de $\frac{\varepsilon(n-n')}{\lambda}$, et est à peu près égale au nombre N de franges comprises entre le point pour lequel $E=0$, et celui pour lequel $\varphi=0$; c'est le nombre de franges dont se déplacerait la frange achromatique, par l'introduction de la lame cristalline, si l'on ne tenait pas compte de la dispersion.

En partant des données de M. Mascart, on trouve, pour le quarz

$$\frac{B-B'}{\lambda^2(A-A')} = 0.52.$$

Il est assez difficile, faute de données suffisantes, de calculer $\frac{b-b'}{\lambda^2(a-a')}$ pour un nombre un peu grand de substances cristallines. Dans le plus grand nombre de cas, cette quantité, que l'on peut considérer comme une mesure de la dispersion cristalline, est petite. Pour un certain nombre de substances cependant, et particulièrement pour celles qui ont une faible biréfringence, c'est-à-dire pour lesquelles $a-a'$ est petit, cette quantité peut prendre une valeur notable. Voici quelques nombres qui donneront une idée de ces variations.

	$\frac{b-b'}{\lambda^2(a-a')}$	
Gypse	0.014	(V. Lang).
Topaze	0.032	(Rudberg).
Calcite.	0.05	(Mascart).
Barytine.	0.12	(Heusser).
Apatite	0.15	id.
Émétique de potasse	0.16	(Topsoë et Chr.)

Supposons que nous ayons affaire à une lame d'émétique de potasse pour laquelle la dispersion cristalline est très considérable. Nous aurons

$$\frac{d}{f} = 0{,}28\,N.$$

Si l'on imagine que l'on fasse croître graduellement l'épaisseur de

la lame à partir de zéro, la frange achromatique restera gris noir et corrrespondra à $\varphi = 0$, tant que le point pour lequel $\frac{d\varphi}{d\lambda} = 0$ sera plus voisin de cette frange que de la frange maxima voisine, c'est-à-dire tant que $\frac{d}{f}$ sera plus petit que $\frac{1}{4}$. Lorsque $\frac{d}{f} > \frac{1}{4}$, c'est-à-dire lorsque le retard N de la lame évalué en nombres de franges sera plus grand que $\frac{1}{4 \times 0.28} = 0,9$, la frange achromatique deviendra gris blanc et correspondra à la frange maxima $\varphi = \frac{1}{2}$. La frange achromatique restera telle jusqu'à ce que $\frac{d}{f} = \frac{3}{4}$, ou $N = 2,7$. Jusque-là nous n'avons aucune incertitude pour désigner la place qu'occupe la frange correspondant à $\varphi = 0$. Si l'épaisseur de la lame augmente, la frange achromatique devient noire et correspond à $\varphi = 1$. L'ambiguité commence alors, car nous ignorerons si la frange achromatique correspond à $\varphi = 0$ ou à $\varphi = 1$.

On voit donc qu'avec presque toutes les substances cristallines, si on prend une lame assez mince pour que le retard, évalué en nombr de franges, ne dépasse pas 2, on pourra être assuré de ne pas commettre d'erreur dans la fixation de la frange qui correspond à $\varphi = 0$. Dans le plus grand nombre de cas, on peut sans inconvénient dépasser beaucoup ce retard. On voit d'ailleurs que c'est pour les substances les moins biréfringentes que l'influence de la dispersion cristalline est la plus considérable. Or pour ces substances, l'épaisseur qui donne une frange est déjà assez considérable et suffit à l'exactitude de la mesure.

Emploi du compensateur à teintes plates ou de Bravais. — On peut substituer au compensateur à franges, le compensateur à teintes plates.

Il se compose de deux lames parallélipipédiques de quarz superposées, dont l'une est fixe et l'autre mobile. Chacune d'elles est formée de deux biseaux de quarz dont les axes sont croisés et qui sont collés au baume. Les biseaux B et B' (fig. 128) des deux lames, qui glissent l'une sur l'autre, ont les axes parallèles. On voit aisément sur la figure que, dans toutes les positions relatives des deux lames, l'épaisseur totale

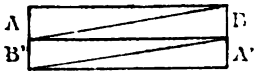


Fig. 128.

du quarz dont les axes ont l'orientation de B et B′ reste la même. L'épaisseur du quarz dont les axes ont l'orientation parallèle de A et A′ varie au contraire, avec le déplacement de la lame mobile, et est d'ailleurs constante dans toute la partie où les lames se superposent. Lorsque les deux lames se recouvrent complètement, l'épaisseur totale ε_a du quarz dont les axes ont l'orientation de A est égale à l'épaisseur constante ε_b du quarz dont les axes ont l'orientation de B. Le compensateur ne modifie pas alors la teinte d'une lame cristalline à laquelle il est superposé. Si l'on fait mouvoir la lame de quarz mobile, ε_a diminue, ε_b reste constant, et le compensateur engendre un certain retard proportionnel au déplacement. Si ce retard est de sens contraire à celui de la lame cristalline, il arrive un certain moment où le retard de cette dernière lame est annulé, et où la teinte devient gris noir. Le chemin parcouru par la lame mobile de quarz pour obtenir ce résultat donne le retard correspondant à la lame cristalline si l'on a déterminé une fois pour toutes le retard engendré par un déplacement connu.

Le compensateur à teintes plates est d'un emploi commode lorsqu'il s'agit d'étudier une lame cristalline composée de plages très petites et optiquement différentes. Mais il est assez difficile de saisir avec précision le moment où le retard du compensateur équivaut à celui de la lame cristalline c'est-à-dire celui où le maximum d'obscurité est obtenu. On peut, avec Bravais, remédier à cet inconvénient en plaçant au-dessus du compensateur la lame polariscopique qui a été décrite page 176. On peut avec précision, amener les deux portions de cette lame à avoir la même teinte si l'on emploie la lumière blanche, ou le même degré d'éclairement si l'on emploie la lumière homogène. Malheureusement cet artifice n'est pas d'un emploi très commode lorsqu'on a à faire à une lame composée de plages très petites et de nature différente.

Emploi du spectre cannelé de Fizeau et Foucault. — Supposons un faisceau de lumière blanche traversant normalement une lame cristalline placée entre deux nicols croisés, dont les vibrations sont à 45° des sections principales de la lame. Si le retard r_λ de la lame correspondant à la longueur d'onde λ est tel que l'on ait $r_\lambda = n\lambda$, n étant entier, le faisceau émergent manquera de la lumière dont la longueur d'onde est λ. Si l'on analyse le faisceau émergent en le recevant sur un spectroscope, le spectre montrera à la place que devait occuper cette lumière une raie noire allant en s'estompant de

part et d'autre. Appelons r_λ le retard correspondant aux rayons rouges extrêmes, $r_{\lambda'}$, celui qui correspond aux rayons violets extrêmes, on aura

$$\frac{r_\lambda}{\lambda} = N + i, \qquad \frac{r_{\lambda'}}{\lambda'} = N' + i',$$

N et N' étant des nombres entiers, i et i' étant fractionnaires. La fraction $\frac{r}{\lambda}$ croissant d'une manière continue depuis λ jusqu'à λ', il y aura un nombre égal à $N' - N + 1$, de valeurs de λ pour lesquelles $\frac{r}{\lambda}$ sera un nombre entier. On verra donc le spectre sillonné par $N' - N + 1$ bandes sombres. C'est le phénomène connu sous le nom de spectre cannelé de Fizeau et Foucault.

On peut observer ce spectre de bien des manières différentes. Il suffit, par exemple, de remplacer l'oculaire du microscope par un spectroscope à vision directe en plaçant l'analyseur soit au-dessus du spectroscope, soit au-dessus de l'objectif.

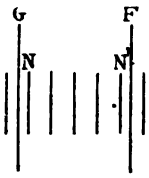


Fig. 129.

On peut connaître l'ordre d'une bande donnée, à condition qu'on puisse repérer le spectre par rapport à un spectre connu, par exemple celui d'un tube de Geisler à hydrogène qui donne les raies C, F. Supposons en effet qu'entre ces raies on observe 5 bandes (fig. 129). La première correspondant au nombre entier N, l'autre au nombre $N' = N + 4$, on aura

$$\frac{r_\lambda}{\lambda} = N - i, \qquad \frac{r_{\lambda'}}{\lambda'} = N + 4 + i',$$

i et i' étant des nombres fractionnaires que l'on peut évaluer ; λ et λ' étant les longueurs d'onde respectives de C et F. On peut, au moins dans une première approximation, supposer l'égalité de r_λ et $r_{\lambda'}$, ce qui donne

$$\lambda(N - i) = \lambda'(N + 4 + i'),$$

d'où l'on tire

$$N = \frac{4\lambda' + i'\lambda' - i\lambda}{\lambda - \lambda'}.$$

On prendra pour N le nombre entier le plus voisin de la valeur du

deuxième membre. Ayant N, on aura

$$r_\lambda = \lambda(N - i), \qquad r_{\lambda'} = \lambda'(N + 4 + i').$$

Le procédé est surtout avantageux pour constater les variations qu'une cause physique, la chaleur par exemple, peut apporter dans la double réfraction et par conséquent dans les retards r_λ d'une même lame. A cet effet la lame cristalline est plongée dans une étuve dont on accroît très lentement la température.

Pour une température t, on observe la coïncidence entre la bande noire de rang N et la raie D; pour une température $t + \Delta t$, c'est la bande $N + 1$ qui vient en coïncidence avec la raie D; on en conclut que la variation du retard correspondant à cette raie est égal à λ,

$$\frac{\Delta r_\lambda}{\Delta t} = \lambda.$$

Ce procédé a été appliqué par M. Dufet a l'étude des variations que subit la double réfraction du gypse sous l'influence de la chaleur.

1. MESURE DE L'ÉPAISSEUR DE LA LAME

Le retard que produit une lame est égal à son épaisseur multipliée par la différence des indices propres à chacune des vibrations principales. On ne peut donc déduire du retard la valeur de cette différence qu'après avoir mesuré l'épaisseur de la lame.

On peut faire cette mesure au sphéromètre. La disposition de cet instrument est trop connue pour qu'il soit utile de la décrire ici.

On peut encore avec avantage, surtout pour les lames minces, employer le procédé suivant. On colle ensemble, sur la même lame de verre, de part et d'autre de la lame cristalline inconnue, un ou plusieurs fragments d'une substance connue, telles que des clivages de barytine, des clivages de calcite, ou de petites lames de quarz bien parallèles à l'axe. On use toutes ces lames ensemble de manière que l'épaisseur soit la même ou très sensiblement la même pour toutes. On juge fort bien si cette condition est remplie, car les deux lames de même nature entre lesquelles la substance inconnue est placée doivent alors avoir la même teinte de polarisation.

L'épaisseur des lames connues peut être déduite de la mesure du

retard qu'elles produisent, et cette épaisseur est la même que celle de la lame inconnue.

Enfin un troisième procédé consiste à placer la lame sur le porte-objet du microscope, de manière qu'elle présente sa tranche à l'objectif. La lame peut être maintenue dans une position exactement verticale en la pinçant entre deux cubes bien dressés. La tranche de la lame étant ainsi vue dans le microscope et mise au point, on en mesure l'épaisseur en substituant à l'oculaire ordinaire un oculaire au réticule duquel est placé un fil immobile et un autre fil exactement parallèle, mais fixé à un cadre mobile auquel on peut imprimer des déplacements exactement mesurés par une vis micrométrique. En se servant d'un millimètre divisé en centièmes que l'on place sur le porte-objet, on commence par déterminer le déplacement qu'il faut donner au réticule mobile pour qu'il parcoure l'image d'un millimètre. Soit d ce déplacement.

On met successivement en coïncidence avec le fil mobile les deux bords de la tranche de la lame et on lit le déplacement D qu'il a fallu donner au fil ; le rapport $\frac{D}{d}$ est l'épaisseur de la lame en millimètres.

Ce procédé est d'un emploi très facile ; malheureusement il exige que les bords de la lame soient assez bien dressés ; de plus il ne permet de mesurer que l'épaisseur des bords de la lame qui est généralement un peu plus faible que l'épaisseur centrale moyenne.

2. OBSERVATION DES MODIFICATIONS QU'APPORTE LA CHALEUR DANS LA BIRÉFRINGENCE

Il est souvent intéressant d'observer les modifications que la chaleur introduit dans la valeur des constantes optiques.

Le procédé le plus simple pour se livrer à des observations de ce genre, est de se servir d'un microscope ordinaire, à faible grossissement, de manière à pouvoir placer la lame cristalline assez loin de l'objectif et du polariseur. On se sert comme porte-objet d'une bande métallique percée d'une ouverture correspondant à la ligne de visée. Au-dessus de cette ouverture on place une plaque de verre sur laquelle repose la lame cristalline. La bande métallique portée par une pince spéciale est chauffée, par des lampes ou des becs de gaz, à ses deux extrémités qui doivent être suffisamment écartées de l'axe de l'appareil. On peut ainsi porter aisément le cristal à une température supérieure à 400°.

On ne peut pas mesurer la température de la lame ; on ne peut que constater les variations qui se produisent dans la biréfringence, à mesure que la température s'élève. On peut d'ailleurs apprécier assez exactement ces variations, en observant les changements qu'elles amènent dans la teinte de polarisation, et en rapportant ces changements à l'échelle de Newton.

On peut encore suspendre la lame cristalline au centre d'une étuve. Celle-ci est formée par un vase parallélipipédique, plat et allongé, qui est percé sur les deux parois de deux orifices placés en regard et fermés par des lames de verre. L'axe du microscope est horizontal ; l'étuve est placée entre le polariseur et l'objectif, de manière que la lame cristalline soit verticale. Les extrémités de l'étuve dépassent latéralement et sont chauffées par des lampes ou des becs à gaz. Des thermomètres disposés dans l'étuve de manière que les boules en soient aussi voisines que possible de la lame, peuvent donner quelque idée de la température de celle-ci. Mais on ne peut compter sur aucune exactitude dans la mesure de cet élément ; les thermomètres, placés entre la lame et la source de chaleur, sont toujours très notablement plus chauds que celle-ci, même lorsque les températures sont stationnaires.

Un procédé plus exact consiste à plonger la lame dans un liquide qui n'agisse pas chimiquement sur elle et qu'on puisse porter à des températures élevées. On peut se servir de paraffine qui fond à 79° et dont on peut porter la température jusque vers 200°. On peut encore recourir à un mélange en parties égales d'azotate de potasse et d'azotate de soude qui fond vers 150° et peut être porté à une température très élevée.

Le liquide est placé dans un tube métallique, percé, à une certaine hauteur, de deux orifices placés en regard et fermés par des lames de verre. On y plonge la boule d'un thermomètre à air ou à mercure et la lame cristalline, qui doit être au niveau des ouvertures. Le tube est chauffé à la partie inférieure par un bec de gaz ; il est placé entre le polariseur et l'objectif d'un microscope à axe horizontal. En agitant le thermomètre, ou mieux en se servant d'un agitateur spécial, on rend bien uniforme la température du liquide que le chauffage par le bas tend d'ailleurs à régulariser.

III. — MESURE DE L'ÉCARTEMENT ANGULAIRE DES AXES OPTIQUES

La connaissance de l'écartement des axes optiques donne directement le rapport des indices du cristal. On sait en effet que, si 2V est cet

écartement (supposé toujours plus petit que 180°), on a, lorsque le cristal est positif, c étant la bissectrice aiguë,

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2} = \frac{n_c^2}{n_a^2}\,\frac{n_b^2 - n_a^2}{n_c^2 - n_b^2},$$

ou sensiblement dans la plupart des cas

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{n_b - n_a}{n_c - n_b}.$$

Lorsque le cristal est négatif, a étant la bissectrice aiguë,

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} = \frac{n_a^2}{n_c^2}\cdot\frac{n_c^2 - n_b^2}{n_b^2 - n_a^2},$$

ou sensiblement

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{n_c - n_b}{n_b - n_a}.$$

Comme moyen mnémonique on peut se rappeler que le numérateur et le dénominateur étant les différences entre un des indices extrêmes et l'indice moyen, le numérateur est toujours le retard correspondant à la propagation normale à travers une lame perpendiculaire à la bissectrice aiguë.

Si l'on a taillé dans le cristal une lame normale à la bissectrice aiguë, un rayon se propageant suivant la direction d'un axe optique avec la vitesse b, fait, dans l'intérieur de la lame, un angle V avec la normale. Il émerge suivant une direction qui fait avec cette normale un angle E déterminé par la relation

$$\frac{\sin E}{\sin V} = \frac{n_b}{n},$$

n étant l'indice du milieu qui baigne la face de sortie.

Les faisceaux parallèles aux directions des deux axes optiques émergent donc en faisant entre eux un angle égal à 2 E. Cet angle est l'écartement angulaire des axes optiques vus dans le milieu considéré.

Théorie de la formation de l'image. — Avant de décrire les principaux procédés employés pour mesurer 2E, nous reviendrons, pour l'approfondir un peu plus, sur la formation de l'image des phénomènes d'interférence que produit la lumière convergente.

Nous supposons une lame cristalline placée au-dessus d'un éclaireur qui envoie sur la lame des rayons polarisés rectilignement et très divergents. Cet éclaireur est formé par une série de lentilles dont la distance

focale va en diminuant, qui reçoivent le faisceau parallèle en le rendant aussi divergent que possible. L'éclaireur se termine par une lentille hémisphérique E (fig. 130) sur la partie plane de laquelle on applique directement, ou par un intermédiaire aussi peu épais que possible, la lame cristalline. Il est important, pour que la lame reçoive des rayons aussi divergents que possible, de faciliter l'émergence des rayons hors de l'éclaireur, en interposant entre cet éclaireur et la lame un liquide très réfringent : on se contente en général de prendre de l'eau : il suffit d'en déposer une goutte sur l'éclaireur, on substitue avec avantage de la benzine à l'eau.

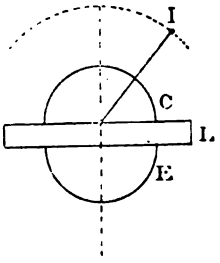


Fig. 130.

Au-dessus de la lame L et le plus près possible de cette lame doit être placée une autre lentille hémisphérique C, à très court foyer et dont la face plane est tournée vers la lame. On facilite l'entrée, dans la lentille, des rayons très inclinés en interposant encore un liquide entre la lame et le collecteur C.

Un faisceau de rayons parallèles, ayant traversé la lame en faisant un angle i avec la normale, traverse le liquide et pénètre dans la lentille sous un angle r tel que $\sin r = \frac{n_b}{n} \sin i$, n_b étant l'indice moyen de la lame et n celui du verre de la lentille. Ce faisceau vient former son image en un certain point I situé sur le rayon de la lentille qui fait un angle r avec la normale à la base de l'hémisphère, et à une distance du centre égale à $\frac{R}{n-1}$, ou pour un verre d'indice $n = 1,5$, à une distance égale à 2R, R étant le rayon de la lentille. L'image des courbes d'interférence viendra donc se former (les rayons émergents étant supposés polarisés par un analyseur) sur une sphère concentrique à celle de la lentille. Si l'on suppose que le faisceau considéré est celui qui traverse la lame parallèlement à l'un des axes optiques, l'angle r est celui que fait, avec la normale à la lame, l'axe optique *vu dans le verre*. Si la normale coïncide avec la bissectrice aiguë, on aura

$$\sin r = \frac{n_b}{n} \sin V.$$

La distance qui sépare de la normale l'image I est égale à

$$\frac{R}{n-1} \sin r = \frac{R}{n-1} \cdot \frac{n_b}{n} \sin V.$$

Pour observer cette image d'interférence, il faut la regarder, avec l'intermédiaire d'un analyseur, soit avec les yeux, soit plutôt avec une loupe ou un autre instrument grossissant, car l'image est en général très petite. La nouvelle image, réelle ou virtuelle, que l'on obtiendra ainsi, sera toujours dans un rapport déterminé avec celle que produit la lentille immédiatement superposée à la lame, de telle sorte que la distance qui sépare de l'axe de l'appareil la nouvelle image du point I est égale à $k \sin r$, k étant un certain nombre qui est constant avec le système optique employé. Il faut seulement remarquer que l'image donnée par la lentille hémisphérique étant sphérique, il faudra en général déplacer le système optique employé à la regarder, pour mettre successivement au point le centre et les bords de l'image[1].

Il est clair d'ailleurs qu'au lieu de placer sur la lame une simple lentille hémisphérique on peut superposer à cette dernière une ou deux autres lentilles convergentes destinées à reprendre l'image de la première.

Il résulte de ce qui précède que, pour produire une image des courbes d'interférence, il suffit de placer la lame entre un éclaireur précédé d'un polariseur et une lentille hémisphérique, puis de regarder l'image avec un système optique quelconque accompagné d'un analyseur.

Appareil Schneider. — Pour mesurer l'angle des axes, on pourrait faire tourner le système optique oculaire autour de l'image, en ayant soin que la rotation se fasse autour d'un axe passant par le centre de la lentille hémisphérique et perpendiculaire au plan des axes. L'angle dont on aurait fait tourner le système optique pour amener successivement en contact chacun des pôles des axes avec le croisement d'un réticule serait l'angle des axes vus dans le verre de la lentille hémisphérique.

On peut, au contraire, maintenir fixe le système oculaire et faire tourner autour d'un axe passant par le centre de la lentille hémisphérique et perpendiculaire au plan des axes, le système de l'éclaireur de la lame et de la lentille hémisphérique.

Comme on serait alors obligé de faire tourner le miroir qui ramène

1. Lorsqu'une lame cristallisée est noyée dans du baume, il se forme quelquefois dans le liquide qui surmonte la lame des bulles hémisphériques qui se remplissent d'air. Ces bulles jouent le rôle d'une lentille divergente et, lorsque la lame est placée sur un éclaireur convergent, donnent une image virtuelle très nette des courbes d'interférence, qu'on peut observer en les regardant avec un microscope ordinaire. Ce phénomène curieux a été signalé par M. Émile Bertrand.

la lumière sur l'éclaireur et dont il serait incommode de changer ainsi la position par rapport à la source lumineuse, on peut composer l'éclaireur de deux parties, l'une fixe comprenant le miroir, le polariseur et une partie des lentilles, l'autre comprenant seulement la lentille hémisphérique fixée à la lame cristalline et tournant avec elle. La lame cristalline est ainsi serrée entre deux lentilles hémisphériques. Tel est le système qui a été indiqué par M. W. G. Adams en 1875 et qui a été réalisé, par un constructeur de Vienne, M. E. Schneider[1].

Appropriation du microscope Bertrand à l'étude des phénomènes produits par la lumière convergente. — L'un des procédés les plus commodes pour observer dans des lames étroites et minces les phénomènes de polarisation qui se produisent autour des axes optiques, et même de mesurer l'écartement angulaire de ceux-ci, est de les observer avec un microscope ordinaire convenablement transformé.

La première transformation qu'il faut faire subir nécessairement au microscope, est de placer au-dessus du polariseur un éclaireur très convergent que l'on peut approcher aussi près que l'on veut de la lame qui repose sur le porte-objet.

Cette condition indispensable réalisée, on a proposé divers procédés pour rendre le microscope apte à l'observation des axes optiques.

On peut munir cet appareil d'un objectif à fort grossissement, descendre le tube jusqu'à ce que l'objectif pose sur le cristal et regarder l'image après avoir enlevé l'oculaire. Ce procédé est mauvais, car l'image est très petite si le champ est grand, et on la regarde de très loin.

Il vaut beaucoup mieux, après avoir placé sur la lame cristalline un jeu de lentilles à fort grossissement, regarder l'image avec le microscope lui-même muni d'un objectif à très faible grossissement. On peut ainsi avoir de bonnes images, avec un champ d'une étendue satisfaisant. Les images, il est vrai, ne sont pas centrées, mais on peut les centrer en faisant mouvoir le porte-objet qui entraîne à la fois la lame et le système de lentilles qu'elle supporte.

Le procédé de M. Emile Bertrand, qui est jusqu'à présent le meilleur, revient au précédent. Le jeu de lentilles, au lieu d'être simplement posé sur la lame, est fixé au tube du microscope; c'est un objectif à très fort grossissement que l'on fixe comme à l'ordinaire et qu'on amène

1. *Carl's Repertorium für Experimental-Physik*, XV (1879). — Becke. *Tschermak's Min. und Petr. Mitth.* 1879, 2-430.
Proceedings of the Roy. Soc, XXVI, p. 586 (1877).

n contact avec la lame en abaissant tout l'appareil. L'image des ourbes d'interférence se forme derrière cette lentille et on la regarde vec un microscope dont le véritable objectif est alors une lentille chromatique que l'on dispose dans le tube de l'appareil. Cette lentille est portée par une languette à coulisse I (fig. 120), dans laquelle est aussi ménagé un simple orifice circulaire. Lorsqu'on veut se servir du microscope à la manière ordinaire, on pousse la languette de manière à mettre l'orifice en regard du tube; lorsqu'on veut observer dans la lumière convergente, c'est la lentille qui est amenée dans l'axe du tube. La languette est d'ailleurs portée par un petit chariot qui glisse dans le tube et que l'on fait mouvoir, au moyen d'une pignon et d'une crémaillère pour amener l'image à être vue nettement dans le plan du réticule de l'oculaire.

Il est nécessaire, pour l'observation, que l'axe de l'objectif qui repose sur la lame cristalline coïncide avec l'axe de l'appareil marqué par le croisement des fils du réticule. On y arrive en manœuvrant les deux vis v et v' dont nous avons déjà plus haut indiqué l'emploi.

L'instrument de M. Bertrand est précieux surtout parce que, en raison du faible diamètre de la lentille collecteur, et de l'étendue relativement petite du diamètre de l'éclaireur, les rayons utilisés dans la formation de l'image ne traversent qu'une plage très restreinte de la lame. On peut ainsi, dans une lame cristalline très hétérogène, étudier successivement les courbes d'interférences que donne chacune des plages distinctes qui la composent.

La même propriété de l'instrument le rend propre à l'observation des courbes d'interférence sur des lamelles vraiment microscopiques.

Lorsqu'on observe des lames composées de plages multiples, il est nécessaire de savoir à chaque instant quelle est la plage qui vient se placer sous l'axe du microscope et qui est elle-même invisible lorsqu'on observe les figures d'interférence. On y arrive très aisément en soulevant légèrement l'appareil, ce qui place la lame un peu au-dessous du foyer de la lentille. La lame vient former une image réelle au-dessus de cette lentille, et on peut regarder cette image en élevant convenablement, par la manœuvre de la coulisse qui la porte, la lentille achromatique additionnelle.

Si les lames cristallines sont suffisamment minces, le champ du microscope de M. Bertrand est égal ou même supérieur à celui des meilleurs appareils à lumière convergente. Avec des lames de moins de 1^{mm} d'épaisseur, et en employant l'objectif à immersion de M. Verick, le

champ est suffisant pour montrer avec beaucoup de netteté les axes de la topaze dont l'écartement vrai est de 69°,2, et l'écartement dans le verre (d'indice 1,5) de 75°,6.

Mais le champ diminue beaucoup lorsque les lames prennent une épaisseur notable. Il est aisé d'en voir la raison. La première lentille de l'objectif, placée directement sur la lame, est en effet à très petit rayon et par conséquent sa largeur est très faible, 1mm à 1mm,5 environ. Or, supposons que *ab* soit le diamètre de l'éclaireur, *a'b'* celui de la lentille inférieure de l'objectif, ε l'épaisseur de la lame. Il est clair que les seuls rayons, provenant de l'éclaireur, qui pourront entrer dans la lentille supérieure, seront compris dans l'intérieur d'un cône dont le sommet *s* est compris entre *ab* et *a'b'* à une distance de *ab* égale à $E.\frac{ab}{ab+a'b'}$. Le demi-champ, c'est-à-dire la tangente de l'angle que fait le rayon le plus incliné avec l'axe de l'appareil, est donc $\frac{ab+a'b}{2E'}$. On voit que le champ croît à mesure que *ab* ou *a'b'* croissent, et que E décroît. Pour les lames épaisses, il faut donc que *ab* et *a'b'* soient aussi grands que possible, si l'on veut conserver un champ suffisant.

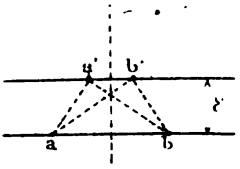


Fig. 131.

On peut, avec l'appareil Bertrand, observer tous les phénomènes de dispersion cristalline dont nous avons déjà parlé plus haut. Il ne faut pas oublier d'ailleurs que les phénomènes d'interférence que montre l'appareil sont, non pas les phénomènes vrais, mais les phénomènes *vus dans le verre*. La symétrie de la dispersion cristalline n'est pas modifiée par cette circonstance, mais la nature même de cette dispersion, et la loi suivant laquelle elle varie avec la longueur d'onde, peuvent au contraire en être assez profondément altérées, parce que la loi de dispersion du verre vient alors se superposer à celle de la dispersion du cristal. Il peut arriver que dans un cristal rhombique, par exemple, l'on ait $\rho > v$ dans le microscope tandis qu'en réalité l'angle vrai des axes rouges est plus petit que l'angle vrai des axes bleus.

Mesure de l'écartement des axes optiques vus dans le microscope Bertrand. — Lorsque les axes sont visibles dans le champ du microscope de M. Bertrand, on peut en mesurer l'écartement d'une manière très simple. Il suffit de remplacer l'oculaire ordinaire par

l'oculaire muni d'une réticule à fil mobile et que nous avons décrit plus haut.

On centre l'objectif, on tourne le réticule de manière à faire coïncider la ligne des axes avec le fil immobile, et on mesure le déplacement D qu'il faut donner au fil mobile pour la faire coïncider successivement avec chacun des axes. Si E est le demi-angle des axes vus dans le verre de l'objectif, et E celui des axes vus dans l'air, on a

$$\frac{D}{2} = k' \sin E_v = k \sin E.$$

k' étant un certain facteur qui est constant lorsque le système optique reste identique à lui-même, il suffit donc de déterminer k une fois pour toutes, en faisant la mesure sur une lame pour laquelle E est connu. Cette détermination faite, l'observation de D fait connaître E pour une lame quelconque.

On peut aussi, comme le fait M. Bertrand, placer simplement dans l'oculaire un micromètre divisé en parties égales qui permet de faire la mesure de D avec moins d'approximation, mais plus rapidement et par une simple lecture.

On peut encore se contenter de dessiner sur une feuille de papier, à l'aide d'une chambre claire, la position des deux axes optiques. On mesure D sur le dessin. Il faut avoir soin, bien entendu, que le papier soit toujours à la même distance de la chambre claire.

Quel que soit le procédé de mesure de D, il est nécessaire, avant de faire l'observation, de mettre bien au point les pôles des deux axes, en manœuvrant convenablement la coulisse qui porte la lentille auxiliaire. Ce n'est qu'à ce prix que la mesure peut être considérée comme rigoureuse.

Lorsque la bissectrice n'est pas exactement normale à la lame, on en est averti par ce fait que le centre du réticule ne coïncide pas avec le milieu de la distance des pôles. Ceci n'est exact, bien entendu, que si l'on a centré l'objectif avec grand soin.

Lorsque les pôles des axes ne sont pas visibles, la mesure micrométrique est impossible. M. Bertrand y supplée en fixant sur la platine du microscope une petite cuve C en laiton (fig. 132 et 133) dont le fond est formé par une plaque de verre.

On remplit la cuve d'un liquide tel que l'huile ; la lame, plongée dans ce liquide, est portée par une tige au moyen de laquelle on peut lui imprimer un mouvement de rotation. La rotation est mesurée sur un

petit limbe divisé G. On mesure ainsi l'écartement des axes absolument

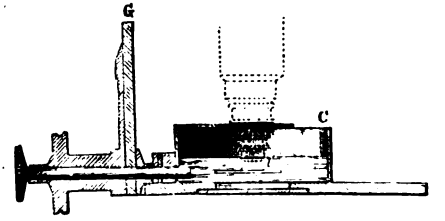


Fig. 132.

de la même manière qu'avec les microscopes polarisants ordinaires à lumière convergente dont nous allons parler maintenant.

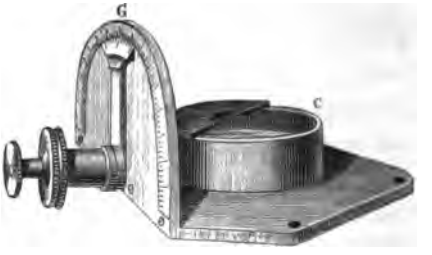


Fig. 133.

Mesure de l'écartement angulaire des axes optiques au moyen du microscope à lumière convergente. — Le microscope à lumière convergente, dont nous avons déjà donné la description (fig. 59 et 60, p. 189 et 190), se compose, on le sait, d'un système de lentilles éclaireur qui précède la lame, et d'un système de lentilles, improprement appelé microscope, qui est, en définitive, une lunette disposée pour la vue à l'infini, avec un champ très considérable. L'éclaireur est précédé d'un polariseur; l'oculaire de l'appareil est suivi d'un analyseur. L'anneau oculaire est assez éloigné de l'oculaire pour qu'on puisse laisser au-dessous de l'analyseur un espace vide assez large dans lequel on peut introduire soit une lame quart d'onde pour déterminer le signe des cristaux uniaxes (page 259), soit un prisme de quartz pour déterminer le signe des cristaux biaxes. Ce dernier signe peut encore être déterminé en faisant tourner dans l'espace vide, autour d'une ligne horizontale, une lame de quartz perpendiculaire à l'axe optique, comme nous l'expliquerons plus loin.

Au milieu du système optique, à l'endroit où se forme l'image recueillie ensuite par l'oculaire, est un réticule.

On peut mettre au point le réticule et l'image en déplaçant l'oculaire, qui est fixé à un tube mobile dans le tube fixe de l'appareil. On ne peut pas déplacer le réticule, bien que l'image ne se forme pas toujours dans le même plan, suivant qu'on a affaire à des courbes voisines ou à des courbes très éloignées du centre ; c'est un des défauts de cet appareil, qu'il serait d'ailleurs aisé de corriger.

Lorsqu'on veut disposer l'appareil pour la mesure de l'écartement

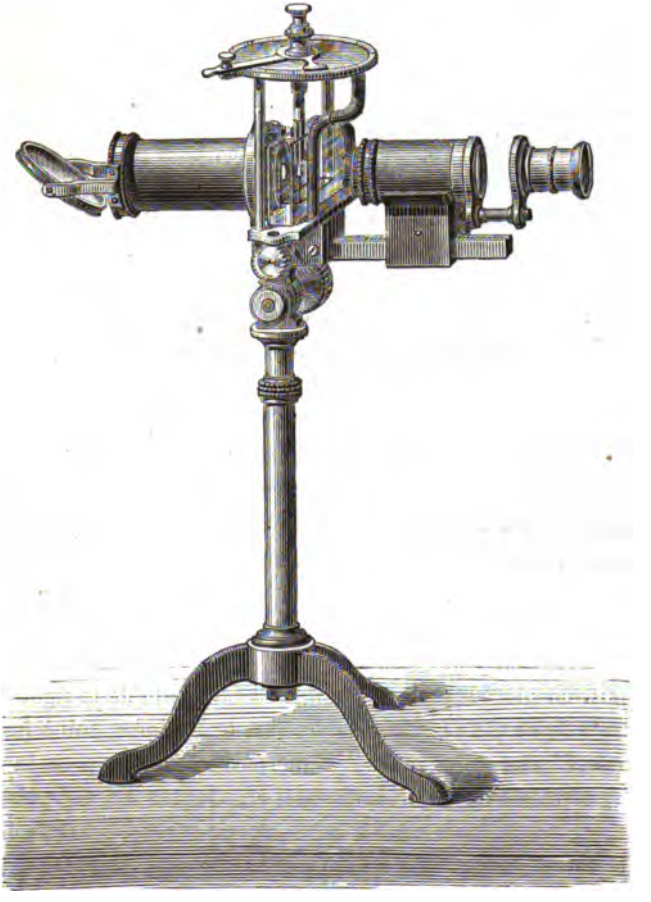


Fig. 134.

angulaire des axes optiques, on en dispose l'axe horizontalement comme le représente la figure 134. La lame cristalline doit alors être

verticale, et on la fixe, soit avec une pince, soit avec un peu de cire molle à l'extrémité d'une tige verticale; cette tige peut tourner au centre d'un limbe horizontal auquel elle est suspendue ; elle porte une alidade qui marque sur le limbe l'angle dont elle tourne. Cet ensemble du limbe et de la tige se fixe, au moyen d'une vis, sur la pièce horizontale qui porte l'éclaireur et le microscope. La tige qui porte la lame cristalline est rapprochée de l'éclaireur autant que possible; on ne laisse que l'intervalle juste suffisant pour que la lame, dans son mouvement de rotation, ne vienne pas rencontrer l'éclaireur.

La lame cristalline est ainsi placée nécessairement à une distance de la dernière lentille de l'éclaireur plus grande que lorsque l'appareil est vertical. Comme il convient que le foyer des rayons émergeant de l'éclaireur soit contenu dans la face antérieure de la lame cristalline, il faut allonger ce foyer lorsque la lame s'écarte ; c'est pourquoi la lentille supérieure de l'éclaireur est en général mobile et peut s'enlever lorsque l'axe de l'appareil est placé horizontalement.

La lame doit être fixée à la tige tournante de manière que le plan des axes optiques soit perpendiculaire à cette tige qui représente l'axe de rotation. Il convient d'ailleurs que les pôles des axes optiques soient les sommets des hyperboles noires, et comme cette condition n'est remplie que lorsque le plan des axes est à 45° des vibrations des nicols, il faut que ces deux vibrations, perpendiculaires l'une à l'autre, soient inclinées de 45° sur l'horizon. On commence donc par faire en sorte que cette condition soit remplie. L'analyseur doit à cet effet porter une marque, tracée une fois pour toutes, de manière qu'il puisse être immédiatement placé dans la position convenable. On s'assure d'ailleurs que cette position a été obtenue en voyant si, lorsque la ligne des axes d'une plaque a été placée en coïncidence avec le fil horizontal du réticule, les hyperboles ont bien leur sommet sur cette ligne.

Cela fait, on place la lame cristalline à l'extrémité de la tige, de manière que la ligne des axes, préalablement déterminée, soit à peu près horizontale. L'examen des courbes d'interférence et des hyperboles noires montre si cette condition a été obtenue, et, dans le cas contraire, quel déplacement il faut faire subir à la lame pour se rapprocher du but. Le champ ayant été beaucoup diminué par la plus grande distance laissée entre la lame et l'éclaireur, il faut faire tourner la tige qui porte la lame, afin d'amener successivement dans le champ les diverses parties de l'image.

Si la lame est simplement fixée par de la cire molle, c'est à la main

t par de légers mouvements imprimés à la lame qu'on règle la position de celle-ci. Avec quelque habitude, on arrive assez rapidement à obtenir que, dans le mouvement de rotation de la tige, les pôles des axes optiques restent sur le fil horizontal du réticule. L'appareil est alors réglé pour la mesure.

Au lieu de fixer la lame L avec de la cire, on peut la fixer dans une pince P (fig. 155), qui est reliée à l'axe de rotation d'une façon particulière. Elle se termine à la partie supérieure par deux calottes sphériques C,C' parallèles entre elles, et entre lesquelles est pincée une autre calotte de même forme D reliée à l'axe B. Grâce à un jeu laissé à cet effet, la calotte D peut glisser dans l'espèce de glissière sphérique qui la maintient, de sorte qu'en appuyant sur la tige P, on peut lui donner, par rapport à l'axe fixe B, une légère inclinaison dans un plan quelconque. Si la surface sphérique de la glissière a son centre à peu près en L, les mouvements ainsi produits ne changent pas la position du centre de la lame et ne modifient que l'orientation de celle-ci.

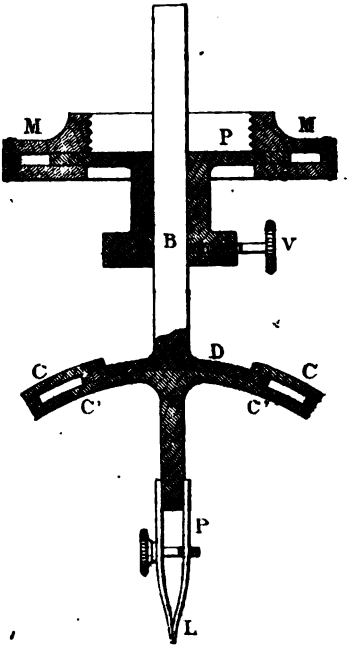


Fig. 155.

Pour pouvoir déplacer le centre de la lame, la tige B est reliée à l'axe de rotation par l'intermédiaire d'une glissière semblable MM, mais à surface plane, de sorte qu'en appuyant sur B on donne à la lame un mouvement de translation sans rotation.

La lame étant convenablement placée, il suffit, pour faire la mesure, d'amener successivement chacun des pôles des axes en contact avec le point de croisement du réticule ; l'angle dont on a tourné l'axe, pour passer de la première position à la seconde, est l'angle 2E cherché.

En vertu de la dispersion cristalline, l'écartement des axes est fonction de la longueur d'onde. On peut se contenter d'observer successivement l'écartement avec un verre rouge et avec un verre bleu. Le verre

rouge est sensiblement monochromatique, le verre bleu ne l'est malheureusement jamais.

Pour des mesures exactes il faut éclairer le microscope successivement avec différentes lumières monochromatiques.

On peut encore, comme l'a proposé M. V. von Lang, placer un spectroscope derrière l'éclaireur, et de telle sorte que l'image du spectre soit vue nettement dans le plan du réticule. Il suffit pour cela de former le spectre réel au foyer de l'éclaireur, car le spectre est alors dans la même condition que s'il venait de l'infini, et le système optique qui surmonte la lame cristalline est précisément disposé pour voir les rayons venant de l'infini. On tourne le spectre de telle sorte qu'une raie soit en coïncidence avec le fil du réticule, et on fait, à la manière ordinaire, la mesure de l'angle des axes, en amenant successivement l'image de chaque axe en coïncidence avec le fil du réticule. Il est clair que l'axe est éclairé, au moment de cette coïncidence, par la lumière qui correspond à la raie considérée, et que par conséquent l'écartement mesuré correspond à la longueur d'onde de cette raie.

Il est presque inutile de remarquer que, lorsqu'on a déterminé l'angle des axes 2E vu dans un certain milieu, et correspondant à diverses longueurs d'onde λ, il faut, pour en déduire les valeurs de l'angle vrai 2V correspondant aux mêmes longueurs d'onde, connaître les indices du milieu et les indices du cristal correspondant à ces longueurs d'onde. La loi de la dispersion pour le milieu et le cristal peut d'ailleurs être très notablement différente.

Pour que l'observation soit possible, il faut qu'un rayon puisse entrer dans la lame de manière à prendre la direction de l'axe optique. Or on a

$$\sin E = \frac{n_b}{n} \sin V,$$

E étant l'angle d'émergence ou, ce qui est la même chose, l'angle d'incidence du rayon dirigé suivant l'axe optique. La condition à remplir est donc

$$\frac{n_b}{n} \sin V < 1.$$

Lorsque $n = 1$, c'est-à-dire lorsqu'on opère dans l'air, la condition cesse d'être remplie lorsque V devient un peu grand. Supposons par exemple $n_b = 1{,}6$, les axes optiques cesseront d'être visibles lorsque

$$\sin V > \frac{1}{1{,}6} \quad \text{ou} \quad V > 38^\circ \text{ environ.}$$

Pour remédier à cet inconvénient il faut augmenter n, ce qui se fait en plongeant la lame dans un liquide.

Le liquide est placé dans une petite cuve en verre ABCD (fig. 136) dont les parois AB,CD, sont très minces et bien planes. On la dispose sous l'axe de rotation du goniomètre, comme on peut le voir dans la fig. 134, et c'est contre elle que viennent buter les lentilles de l'éclaireur et du collecteur. La lame cristalline tourne ainsi dans le liquide. Les parois de la cuve ne sont écartées que juste autant qu'il faut pour que la lame cristalline puisse tourner librement et sans obstacle.

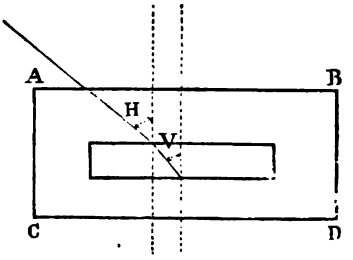


Fig. 136.

Si H est l'angle que fait avec la normale, à sa sortie dans le milieu liquide, le rayon se propageant dans la lame suivant l'un des axes optiques, ce rayon, après sa sortie de la cuve dans l'air, fait avec la normale le même angle E que ferait le rayon émergeant directement de la lame dans l'air. Mais la cuve restant immobile, et la lame ayant tourné d'un angle égal à H, le rayon traverse normalement, et sans se dévier, la paroi de la cuve en venant faire son image au point de croisement des fils du réticule. En mettant successivement en coïncidence, avec ce point de croisement, les sommets de l'hyperbole, on mesure donc bien l'angle 2H des axes vus dans le liquide.

Les principaux liquides dont on peut se servir sont : l'eau, le sulfure de carbone, la benzine, la naphtaline monobromée. Voici les indices de ces liquides pour les principales raies du spectre.

	Temp.	A	B	C	D	E	F	G	H
Eau	15°	1.3284	1.3300	1.3307	1.3324	1.3347	1.3366	1.3402	1.3431
Benzine.	10,5	1.4879	1.4915	1.4931	1.4975	1.5056	1.5089	1.5202	1.5305
	39	1.4703			1.8793				1 5108
Sulfure de carbone .	11	1.6242	1.6207	1.6140	1.6333	1.6465	1.6584	1.6856	1.7090
Naphtaline monobromée					1.6626				

L'eau a un indice peu élevé; elle dissout un assez grand nombre de sels artificiels. La benzine a l'inconvénient de dissoudre les matières avec lesquelles les lames cristallines sont ordinairement collées. Le même inconvénient se présente pour le sulfure de carbone dont

l'odeur est d'ailleurs extrêmement désagréable. La naphtaline monobromée, qui ne bout qu'à 277°, a une odeur moins désagréable, mais elle dissout aussi les résines, quoiqu'en proportion moins considérable que ne le fait le sulfure de carbone.

Le liquide dont on se sert le plus habituellement est l'huile d'olillette. Les indices de cette matière étant peu fixes, il faut, pour les mesures précises, déterminer directement les indices du liquide dont on se sert. Voici, comme exemple, les indices de l'huile employée par M. Des Cloizeaux

Rouge	1.466
Jaune.	1.468
Vert	1.4705
Bleu	1.478

entre 15° et 25°.

Les indices des liquides varient beaucoup avec la température, comme on peut le voir par la comparaison des indices de la benzine à 10°,5 et à 39°. Il faut donc, si l'on veut opérer avec rigueur, déterminer la loi de variation des indices du liquide avec la température. Il vaut mieux, pour se mettre à l'abri de toutes les causes d'erreur qui peuvent provenir en outre de l'altération du liquide, comprendre l'observation faite sur la lame inconnue, entre deux observations, aussi rapprochées que possible, faites sur une lame cristalline toujours identique et choisie parmi celles qui n'éprouvent, sous l'influence de la chaleur, qu'une variation très faible dans l'écartement des axes optiques.

Influence de la chaleur sur l'écartement angulaire des axes. — Il est intéressant de suivre les variations que la chaleur apporte dans l'écartement angulaire des axes optiques. M. Des Cloizeaux, qui a fait beaucoup d'observations sur ce sujet intéressant, se sert à cet effet d'une étuve (fig. 137) que l'on dispose entre le polariseur et l'objectif du microscope à lumière convergente, ainsi que le représente la figure 138.

L'étuve se compose d'un vase parallélipipédique plat et allongé percé de deux orifices circulaires en regard l'un de l'autre, et entre lesquels se trouve suspendue la lame. Cette lame est portée par le support ordinaire tournant au centre d'un limbe divisé. Deux thermomètres, dont les boules sont placées aussi près que possible de la lame cristalline, indiquent la température, mais avec une exactitude fort médiocre.

Angle vrai des axes déduit de l'observation de deux lames perpendiculaires aux deux bissectrices. — Lorsqu'on a mesuré l'angle

les vus dans un certain milieu, on ne peut en déduire l'angle les axes, qui est la donnée réellement importante, que lorsque connaît le rapport de l'indice moyen du cristal à celui du u.

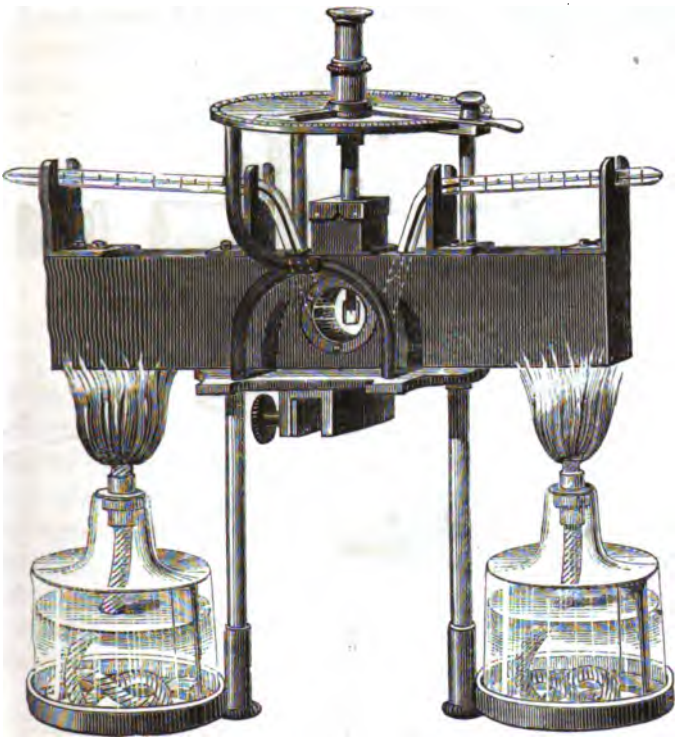


Fig. 157.

On peut cependant suppléer à la connaissance de l'indice du cristal en mesurant l'angle apparent des axes successivement autour de la bissectrice aiguë et autour de la bissectrice obtuse. Supposons qu'on ait ainsi mesuré l'angle $2E_a$ avec une lame taillée perpendiculairement à la bissectrice aiguë, et l'angle $2E_o$ avec une lame taillée perpendiculairement à la bissectrice obtuse.

On a

$$\sin E_a = \frac{n_b}{n} \sin V$$

$$E \sin_o = \frac{n_b}{u} \cos V,$$

et par conséquent

$$\operatorname{tg} V = \frac{\sin E_a}{\sin E_o}.$$

Malheureusement il est souvent difficile, quelquefois même impossible, de mesurer l'angle E_o lorsque n_b est trop grand et V trop petit.

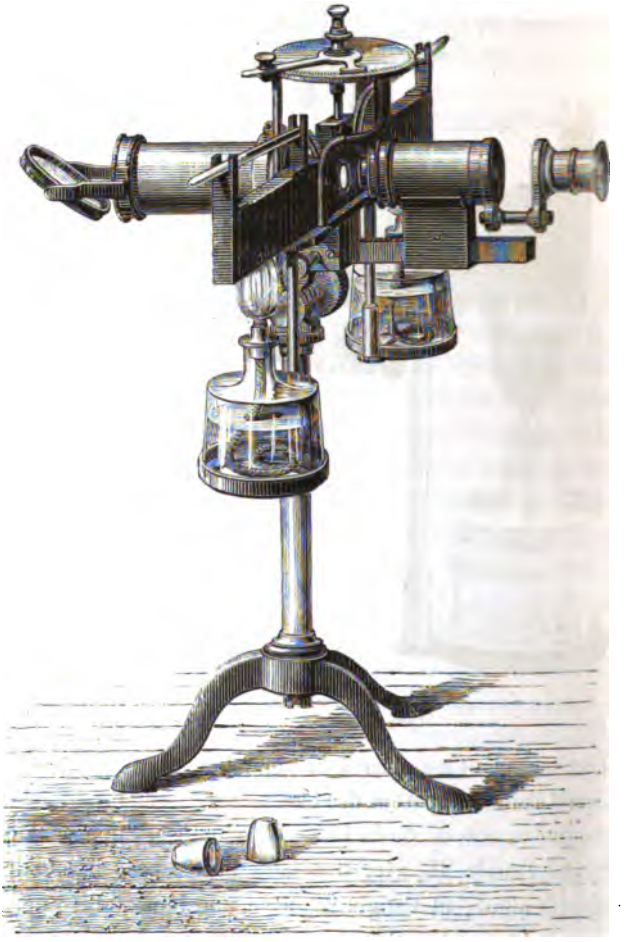


Fig. 158.

Discussion des causes d'erreur dans la mesure de l'écartement angulaire des axes. — L'exactitude de la mesure de l'écartement des axes suppose :

1° Que la lame est perpendiculaire à la bissectrice ;

2° Que la lame est disposée parallèlement à l'axe de rotation ;

3° Que l'axe de rotation est perpendiculaire à l'axe du microscope.

La première condition relative à la forme de la lame ne s'applique qu'à la face par laquelle émergent les rayons. La face de la lame tournée vers l'éclaireur peut d'ailleurs être quelconque. Soit N (fig. 139)

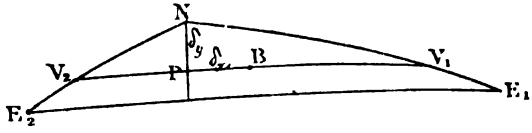


Fig. 139

la trace, sur la surface d'une sphère, de la normale à la face de sortie; V_1 et V_2 les traces sur la même sphère, des directions des axes. Le rayon qui, dans l'intérieur de la lame, a suivi la direction de l'axe V_1 se réfracte à la sortie, et la direction du rayon émergent comprise dans le plan du grand cercle NV_1 vient rencontrer la sphère en E_1. De même, la direction du rayon qui a suivi la direction de l'axe optique V_2 émerge en E_2. Nous poserons, pour simplifier l'écriture, $V_1 = NV_1$ et $E_1 = NE_1$, et de même $V_2 = NV_2$, $E_2 = NE_2$. Nous avons

$$\frac{\sin E_1}{\sin V_1} = \frac{\sin E_2}{\sin V_2} = \frac{n_b}{n} = K.$$

Soit B la trace de la bissectrice de l'angle des axes, et NP le plan mené par la normale à la face, perpendiculairement au plan des axes. Les angles très petits $BP = \delta_x$, que fait la bissectrice avec le plan NP, et $NP = \delta_y$, que la normale à la face fait avec le plan des axes, définissent l'imperfection de la face cristalline.

Nous allons chercher l'expression de l'angle $V_1 V'_1$ en fonction de K, V, δ_x et δ_y, en nous restreignant aux termes du second degré en δ_x et δ_y. Cette expression ne peut évidemment pas changer de valeur lorsqu'on change simplement le signe de δ_x, ou celui de δ_y ; elle ne contient donc que des termes du second ordre en δ_x et δ_y, à l'exclusion de termes en $\delta_x\,\delta_y$. On pourra donc obtenir les divers termes de cette expression en supposant successivement $\delta_x = 0$ et $\delta_y = 0$, ce qui simplifie notablement le problème.

L'angle E est l'angle théorique donné par la formule.

Supposons d'abord $\delta_y = 0$; le plan des axes passe par la normale, mais la bissectrice est inclinée de δ_x sur cette normale.

Nous avons

$$\sin E_1 = \frac{n_b}{n} \sin(V + \delta_x), \qquad \sin E_2 = \frac{n_b}{n} \sin(V - \delta_x).$$

La mesure nous donne $E_1 + E_2$, et l'erreur consiste à substituer $\frac{E_1 + E_2}{2}$ à l'angle E qui serait égal à

$$\sin E = \frac{n_b}{n} \sin V.$$

Il faut trouver la valeur de l'erreur qui est ainsi commise.

En développant les valeurs de sin E_1 et de sin E_2, dans lesquelles nous remplaçons sin δ_x par δ_x et cos δ_x par $1 - \frac{\delta_x^2}{2}$, nous avons

$$\sin E_1 = \frac{n_b}{n}\left(\sin V + \delta_x \cos V - \frac{\delta_x^2}{2} \sin V\right)$$

$$\sin E_2 = \frac{n_b}{n}\left(\sin V - \delta_x \cos V - \frac{\delta_x^2}{2} \sin V\right).$$

Ajoutant membre à membre, nous aurons

$$\sin E_1 + \sin E_2 = 2\cos\frac{E_1 - E_2}{2} \sin\frac{E_1 + E_2}{2} = 2\frac{n_b}{n}\sin V\left(1 - \frac{\delta_x^2}{2}\right) = 2\sin E\left(1 - \frac{\delta_x^2}{2}\right).$$

En posant $E_1 - E_2 = d$ et traitant d comme un petit angle, il viendra, en se bornant toujours aux termes en d^2 et δ_x^2

$$\frac{\sin\frac{E_1 + E_2}{2} - \sin E}{\sin E} = \frac{d^2}{8} - \frac{\delta_x^2}{2}.$$

On a d'ailleurs

$$\sin E_1 - \sin E_2 = 2\sin\frac{E_1 - E_2}{2}\cos\frac{E_1 + E_2}{2} = 2\frac{n_b}{n}\delta_x \cos V,$$

d'où l'on tire

$$d = E_1 - E_2 = 2\frac{n_b}{n}\delta_x \frac{\cos V}{\cos E} = 2\delta_x \frac{\operatorname{tg} E}{\operatorname{tg} V}$$

en se bornant au terme du premier ordre qui suffit ici puisqu'on n'a besoin que du carré de d.

On a donc

$$\sin\frac{E_1+E_2}{2}-\sin E=2\sin\frac{E_1+E_2-2E}{4}\cos\frac{E_1+E_2+2E}{4}=\frac{1}{2}\delta_x^2\sin E\left(-1+\frac{\operatorname{tg}^2 E}{\operatorname{tg}^2 V}\right),$$

et enfin

$$E_1+E_2-2E=\delta_x^2\operatorname{tg}E\left(\frac{\operatorname{tg}^2 E}{\operatorname{tg}^2 V}-1\right).$$

L'erreur commise est de l'ordre du carré de δ_x. Elle est positive lorsque $\operatorname{tg}E>\operatorname{tg}V$, c'est-à-dire lorsque le milieu extérieur est moins réfringent que le cristal ; elle serait négative dans le cas contraire. L'erreur s'annulerait si le milieu extérieur avait le même indice que le cristal, ce qui est d'ailleurs évident. Il y aura donc intérêt à faire la mesure dans un milieu dont l'indice s'approche autant que possible de celui du cristal.

Pour donner une idée de la grandeur de l'erreur que l'on commet ainsi, on peut appliquer la formule au pyroxène, pour lequel, d'après M. Des Cloizeaux, on a dans l'air $E=55^\circ 47'$ avec $V=29^\circ 29'$.

Si la plaque employée pour la mesure fait un angle de 1° avec le plan perpendiculaire à la bissectrice, l'erreur commise sur $2E$ est égale à $10'$ environ. Elle serait de $40'$ si l'angle était de 2°. On voit que cette erreur, qu'il est assez difficile d'éviter complètement, peut n'être pas négligeable.

Supposons enfin $\delta_x=0$; le plan NB est perpendiculaire sur le plan des axes, NV_1 et NV_2 sont égaux entre eux, et NB′ est perpendiculaire sur E_1E_2. On a, dans le triangle $NB'E_1$

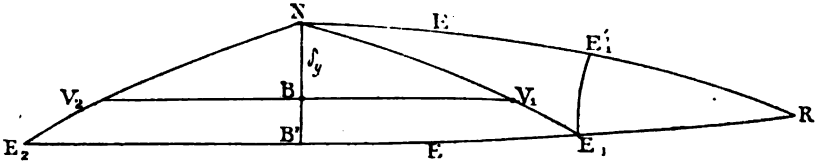


Fig. 110.

$$\frac{\sin B'E_1}{\sin B}=\sin NE_1;$$

dans le triangle rectangle NBV_1

$$\frac{\sin BE_1}{\sin B}=\sin NV_1=\frac{\sin V}{\sin B}.$$

On en déduit

$$\frac{\sin B'E_1}{\sin V}=\frac{\sin NE_1}{\sin NV_1}=\frac{n_b}{n}.$$

L'angle $B'E_1$ est donc le même que celui que l'on obtiendrait si δ_y était nul, c'est-à-dire qu'il est égal à E. L'angle $E_1 E_2$ est égal à E.

L'influence de δ_y est donc nulle, au second ordre près, lorsque on mesure l'angle formé par les axes apparents, ce qui exige que l'on amène le plan de ces axes, c'est-à-dire le plan $E_1 E_2$, à être perpendiculaire à l'axe de rotation, ou à coïncider avec le fil du réticule.

Lorsqu'on laisse l'axe de rotation dans le plan de la lame, on mesure alors non plus $E_1 E_2$, mais la projection de cet axe sur un plan $E'_1 E'_2$ perpendiculaire à l'axe de rotation.

Le plan apparent des axes fait alors l'angle $NB' = \delta'_y$ avec la normale à l'axe de rotation. Dans le triangle NBV_1, on a

$$\cos V \sin \delta_y = \sin NV_1 \cos N,$$

et, dans le triangle $NB'E_1$,

$$\frac{\cos E \sin \delta'_y}{\cos V \sin \delta_y} = \frac{\sin E}{\sin V},$$

ou

$$\delta'_y = \delta_y \frac{\operatorname{tg} E}{\operatorname{tg} V}.$$

Si l'on prolonge E_1E_2 et $E'_1E'_2$ jusqu'à leur rencontre en R, on a, dans le triangle $RE_1E'_1$,

$$\operatorname{tg} E' = \frac{\operatorname{tg} E_1}{\cos \delta'_y}$$

en appelant E' l'angle NE'_1 qui est la moitié de l'angle mesuré.

Les conditions que doit remplir l'appareil, se réduisent à une seule, c'est que l'axe de la lunette soit perpendiculaire à l'axe de rotation. Les instruments dont on se sert habituellement ne permettent pas de modifier la position relative de ces deux axes ; on s'en remet au *constructeur* du soin de la régler. Pour s'assurer si le réglage est satisfaisant, on peut se servir d'une lame cristalline ; on la fixe au *bout de* la pince, de manière que l'un des axes soit en coïncidence avec le croisement des fils des réticules ; on tourne de 180° ; si l'axe émergeant de l'autre face de la lame vient se placer sur le croisement des fils, l'appareil est bien construit. Cela suppose, il est vrai, que les deux faces de la lame sont bien parallèles, ce dont on peut s'assurer préalablement par une mesure goniométrique.

IV. — OBSERVATION DES COURBES ISOCHROMATIQUES.

Emploi des courbes isochromatiques pour déterminer le système cristallin. — Les appareils employés pour l'observation des lames cristallines dans la lumière convergente ne servent pas seulement à mesurer l'écartement angulaire des axes optiques. En permettant l'examen des lignes incolores et des courbes isochromatiques, ils sont d'un très grand secours pour déterminer le système cristallin de la lame, pour orienter l'ellipsoïde optique, pour en trouver le signe, et même, quoique plus rarement, pour fixer les grandeurs relatives des axes de cet ellipsoïde.

Si l'on peut découper dans le cristal une lame montrant, en lumière convergente, une croix noire avec des anneaux circulaires isochromatiques ayant pour centre le centre de la croix, on en conclura que le cristal est uniaxe, et partant qu'il appartient à l'un des systèmes à axe principal, sénaire, ternaire ou quadratique. L'axe principal passe par le centre de la croix.

Si l'on trouve une lame montrant des lemniscates, et des hyperboles noires passant par les foyers de ces courbes, le cristal est biaxe et appartient certainement à l'un des trois systèmes orthorhombique, clinorhombique, anorthique.

On peut aussi, avec des cristaux biaxes, trouver des lames montrant des anneaux isochromatiques circulaires ou presque circulaires ; mais alors ces lames sont taillées perpendiculairement à un axe optique, et, au lieu d'une croix noire, on ne voit plus apparaître qu'une hyperbole passant au centre des cercles et se transformant en une droite lorsque le plan des axes est parallèle à l'une des vibrations des nicols.

Lorsqu'on a à faire à un cristal biaxe, il faut arriver à tailler une lame perpendiculairement à une bissectrice, et, préférablement, à la bissectrice aiguë. L'observation de la coloration des hyperboles et des courbes isochromatiques, vues à la lumière blanche, fournit alors des données précieuses relativement au système cristallin.

On se rappelle, en effet (V. pages 231 et suiv.), que si le cristal est orthorhombique, la répartition des couleurs est symétrique à la fois par rapport à la ligne des pôles, par rapport à la ligne perpendiculaire, et par conséquent aussi par rapport au centre.

Si la répartition des couleurs n'obéit qu'à un seul de ces trois modes de symétrie, le cristal est clinorhombique. Enfin, si la répartition des

couleurs ne suit aucun de ces trois modes de symétrie, le cristal est anorthique.

Dans le cas où le cristal est clinorhombique, le mode de symétrie de la répartition des couleurs peut obéir à l'un des trois modes suivants :

1° Symétrie par rapport au centre ; la dispersion est dite *croisée* ; la bissectrice normale à la lame coïncide avec l'axe de symétrie cristallographique ;

2° Symétrie par rapport à la perpendiculaire au plan des axes : la dispersion est dite *horizontale*, et l'axe de symétrie cristallographique coïncide avec la ligne des pôles qui est ainsi *horizontale* dans la position ordinairement assignée aux prismes clinorhombiques ;

3° Symétrie par rapport à la ligne des pôles ; l'axe de symétrie cristallographique est perpendiculaire à cette ligne qui se trouve alors inclinée ; c'est la dispersion *inclinée*.

Orientation de l'ellipsoïde optique. — L'observation des courbes isochromatiques rend aussi de précieux services pour orienter l'ellipsoïde.

Dans les cristaux uniaxes, l'axe de révolution de l'ellipsoïde passe par le centre des anneaux circulaires. Même lorsque, par le hasard de la taille, les anneaux sont excentrés, on peut juger, par la position qu'occupe leur centre, de la direction de l'axe optique, et par conséquent du sens dans lequel on doit diriger les tâtonnements pour arriver à tailler une lame exactement perpendiculaire à l'axe optique.

Il en est de même pour les cristaux biaxes. Lorsqu'on peut observer, même excentrées, les lemniscates et les hyperboles, on peut voir dans quel sens il faut diriger les tâtonnements pour arriver à tailler une lame perpendiculaire à une bissectrice.

Lorsque cette lame est obtenue, on sait qu'elle est perpendiculaire à l'une des bissectrices a ou c, et le plan de ces deux axes est déterminé par la normale à la lame et la direction de la ligne des pôles.

Il est bon de signaler ici une erreur qui peut se produire lorsqu'on observe des lames très minces. Celles-ci peuvent montrer, lorsqu'elles sont perpendiculaires à l'axe moyen, des courbes isochromatiques hyperboliques faciles à confondre avec des hyperboles et des lambeaux de lemniscates.

Détermination du signe d'un cristal. — L'observation des courbes isochromatiques vues avec une lame perpendiculaire à l'axe, si le cristal est uniaxe, à l'une des bissectrices si le cristal est biaxe, permet de déterminer le *signe* du cristal.

On se rappelle qu'un cristal est dit avoir le signe positif lorsque l'axe optique, s'il est uniaxe, la bissectrice aiguë, s'il est biaxe, coïncide avec l'axe minimum c, et le signe négatif lorsqu'il coïncide avec l'axe maximum a.

Si le cristal est uniaxe, nous avons déjà vu (page 258) comment, en interposant une lame quart d'onde entre l'analyseur et le cristal, le node de déformation des cercles isochromatiques détermine le signe de la lame cristalline. Le microscope de M. Bertrand porte, comme nous l'avons déjà fait remarquer, au-dessus de l'objectif, une fente par laquelle la lame quart d'onde peut être introduite. Dans les microscopes à lumière convergente ordinaire, la lame quart d'onde est placée entre l'analyseur et l'oculaire.

On se rappelle d'ailleurs que les deux sections du mica quart d'onde doivent être à 45° des vibrations des nicols ; la ligne des pôles du mica est déterminée, et l'introduction de la lame fait naître deux taches qui sont situées sur cette ligne des pôles (faisant avec cette ligne le signe —) lorsque le cristal est négatif ; et qui sont situées sur une perpendiculaire à la ligne des pôles (faisant avec cette ligne le signe +) lorsque le cristal est positif.

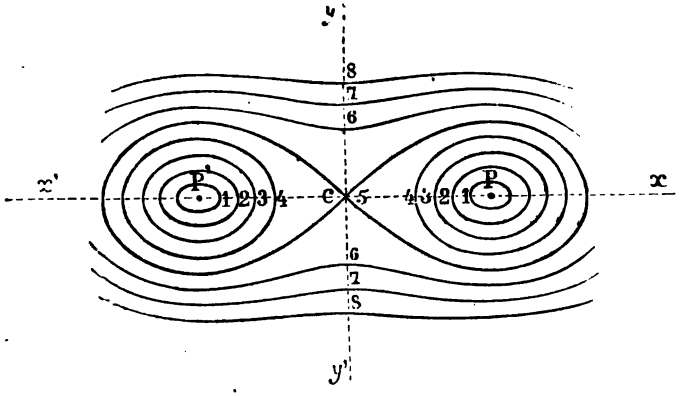


Fig. 141.

S'il s'agit d'un cristal biaxe, on met en usage ce principe que lorsqu'on diminue le retard de tous les rayons issus de la lame, la courbe d'égal retard qui correspond à un retard d'un certain nombre entier k de longueurs d'onde s'éloigne de l'axe optique. Les anneaux se dilatent. Supposons par exemple que les courbes d'égal retard présentent l'apparence de la fig. 141, la courbe correspondant au retard 5 λ étant une

lemniscate qui a son nœud au centre. Si l'on diminue le retard du rayon qui passe au centre, au lieu d'être égal à 5 λ, ce retard ne sera plus par exemple que de 4 λ ; c'est alors la courbe 4 qui, en se dilatant, vient passer par le centre, la courbe 5 se recule et prend la place occupée primitivement par la courbe 6.

Pour bien juger de cette dilatation des anneaux, il faut la rendre progressive en diminuant le retard de quantités graduellement croissantes On peut se servir à cet effet d'une lame prismatique de quarz, taillée parallèlement à l'axe, et dont les diverses tranches produisent des retards graduellement croissants avec l'épaisseur.

Supposons que l'arête *ab* (fig. 142) soit perpendiculaire à l'axe optique et corresponde ainsi à la vibration de vitesse *a* (le quarz étant positif

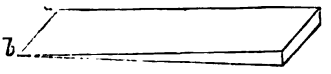


Fig. 142.

On place la ligne des pôles à 45° des vibrations des nicols, et on enfonce quelque part entre les deux nicols, la lame de quarz de manière que l'arête *ab* soit parallèle à la perpendiculaire *yy'* à la ligne des pôles de la lame cristalline. Si la bissectrice à laquelle la lame est perpendiculaire est positive c'est-à-dire si elle correspond à l'axe *c*, *xx'* correspond à l'axe *a*, *yy'* à l'axe *b*; la vitesse maxima de la lame de quarz correspondant ainsi à la vitesse minima de la lame cristalline, les deux lames ont des signes contraires et l'introduction de la lame de quarz dilate les anneaux.

Si la bissectrice était négative, le contraire aurait lieu, et il faudrait que l'arête *ab* fût parallèle à la ligne des pôles pour qu'on vit les anneaux se dilater de plus en plus à mesure qu'on enfonce la lame de quarz. On a donc ainsi un moyen simple de connaître le signe de la bissectrice.

Lorsqu'on se sert du microscope de M. Bertrand disposé pour la lumière convergente, on enfonce la lame de quarz dans la fente disposée au-dessus de l'objectif. Mais cette fente étant normale à la direction zéro et par conséquent à l'une des vibrations des nicols, on se sert d'une lame de quarz dont les sections principales sont à 45° de l'arête du biseau *ab* (fig. 142). Dans ce cas, il n'est plus indifférent d'enfoncer la lame de quarz en tenant au-dessus ou au-dessous l'une ou l'autre de ces faces. Il faut donc noter avec soin le haut et le bas de la lame. Ceci fait, pour plus de simplicité, on détermine, une fois pour toutes, en opérant avec une lame cristalline de signe connu, dans lequel des deux quadrants adjacents séparés par la ligne zéro il faut placer la ligne des

pôles pour que les anneaux se dilatent, avec une lame positive par exemple, en enfonçant le quarz de droite à gauche.

Lorsqu'on se sert du microscope ordinaire à lumière convergente, il vaut mieux substituer au prisme de quarz une lame de quarz taillée perpendiculairement à l'axe. On la place, en la tenant entre deux doigts, dans l'espace libre laissé à dessein entre le polariseur et l'oculaire, et on fait tourner la lame autour d'un axe horizontal passant par les deux doigts. Le faisceau lumineux traversant obliquement la lame de quarz a l'une de ses vibrations, qui est l'ordinaire et par conséquent la plus rapide, dirigée suivant l'horizontale passant par les deux doigts. Le retard engendré par la lame de quarz va d'ailleurs en croissant avec son obliquité.

On s'arrange pour que l'horizontale passant par les deux doigts soit parallèle à la ligne yy' (fig. 141) et on fait tourner de plus en plus la lame de quarz autour de l'horizontale de manière qu'elle se trouve, par rapport à la lame L, dans la position que représente la figure 143. Si la bissectrice de la lame cristalline est positive, yy' est la vibration la moins rapide, et comme elle correspond à la vibration la plus rapide de la lame de quarz, les deux lames sont croisées, l'introduction de la lame de quarz diminue le retard, et l'on voit les anneaux se dilater de plus en plus à mesure que la lame de quarz fait un angle de plus en plus grand avec l'horizontale. Si au contraire le cristal était négatif, ce serait parallèlement à la ligne des pôles xx' qu'il faudrait placer l'axe de rotation de la lame de quarz pour dilater les anneaux.

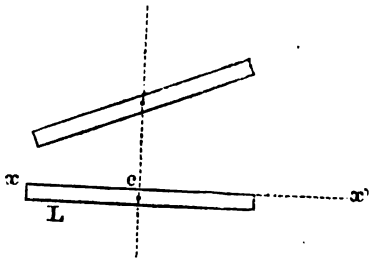


Fig. 143.

De là cette règle mnémonique très simple : Si l'axe de rotation autour duquel il faut faire tourner la lame de quarz pour obtenir la dilatation des anneaux est perpendiculaire à la ligne des pôles (ou fait avec cette ligne le signe +), la bissectrice est positive; si le même axe de rotation est parallèle à la ligne des pôles (ou fait avec cette ligne le signe —), la bissectrice est négative.

Le signe de la bissectrice est celui du cristal, lorsque celle-ci est la bissectrice aiguë.

Emploi des courbes isochromatiques pour déterminer les différences des indices principaux. — On peut utiliser, pour déter-

miner les différences des indices principaux, les figures d'interférence que l'on aperçoit, en lumière convergente, avec une lame perpendiculaire à l'une des bissectrices.

Appelons en effet R l'angle formé avec la bissectrice par le faisceau contenu dans le plan des axes, et pour lequel le retard des deux vibrations est égal à $k\lambda$, k étant un nombre entier. Ce faisceau émerge dans le milieu ambiant d'indice n, suivant une direction qui fait un angle I avec la bissectrice, et l'on a sensiblement

$$\sin I = \frac{n_b}{n} \sin R.$$

Nous avons d'ailleurs montré (page 185) que l'on peut admettre, pour des cristaux qui ne sont pas d'une énergie biréfringente exceptionnelle,

$$o - e = k\lambda = \frac{\varepsilon(n_c - n_a)}{\cos R} \sin(V - R) \sin(V + R).$$

On peut mesurer I par l'une des méthodes qui servent à mesure V, soit avec le goniomètre du microscope à lumière convergente, soit avec le micromètre adapté au microscope de M. Bertrand, et l'on en déduit $n_c - n_a$ si l'on a déjà mesuré n_b, n, E et V. Quant au nombre entier k, il est connu par le numéro d'ordre de l'anneau à partir de l'axe optique.

La formule suffit dans la plupart des cas; elle n'est cependant pas rigoureuse, et il est bon de savoir quel degré d'approximation elle donne et comment on peut suppléer, le cas échéant, à son insuffisance.

La formule rigoureuse est donnée page 180 et 181. On a

$$o - e = \varepsilon \left(\frac{\cos R'}{u'} - \frac{\cos R''}{u''} \right)$$

$$\sin R' = u' \sin I, \qquad \sin R'' = u'' \sin I.$$

R′, R″ étant les angles que fait avec la bissectrice chacun des rayons polarisés à angle droit qui émergent suivant la même direction; u' et u'' étant les vitesses de propagation correspondantes.

Nous supposons que la bissectrice considérée est négative, c'est-à-dire coïncide avec l'axe a.

L'une des vitesses u', u'' est égale à b, posons $u'' = b$, et par conséquent $\sin R'' = b \sin I$, nous aurons

$$u'^2 = a^2 \sin^2 R' + c^2 \cos^2 R' = c^2 + (a^2 - c^2) \sin^2 R',$$

et par conséquent

$$\frac{\sin^2 R'}{\sin^2 I} = c^2 + (a^2 - c^2)\sin^2 R',$$

d'où l'on tire

$$\sin^2 R' = \frac{c^2 \sin^2 I}{1 - (a^2 - c^2)\sin^2 I} \quad \text{ou} \quad \cos^2 R' = \frac{1 - a^2 \sin^2 I}{1 - (a^2 - c^2)\sin^2 I},$$

$$u'^2 = \frac{c^2}{1 - (a^2 - c^2)\sin^2 I}.$$

L'équation exacte est donc

$$o - e = k\lambda = \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{c} - \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b}\right).$$

En multipliant et divisant par

$$\frac{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I}}{c} + \frac{\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}{b},$$

on transforme cette expression en cette autre

$$k\lambda = \varepsilon \frac{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2} - \sin^2 I\left(\frac{a^2}{c^2} - 1\right)}{\frac{1}{c}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I} + \frac{1}{b}\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I}}.$$

On a d'ailleurs $\sin I = \frac{\sin R''}{b}$ ou $\frac{\sin R}{b}$ en supprimant le double accent.

Le numérateur devient ainsi

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 c^2}\left(\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} - \sin^2 R\right),$$

et comme $\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \sin^2 V$, le numérateur prend la forme

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2 c^2}\sin(V + R)\sin(V - R) = (n_c - n_a)\sin(V + R)\sin(V - R)\frac{(a + c)ac}{b^2 c^2}.$$

Quant au dénominateur, nous pouvons remarquer que

$$\frac{1}{c}\sqrt{1 - a^2 \sin^2 I} = \frac{1}{c}\sqrt{1 - b^2 \sin^2 I - (a^2 - b^2)\sin^2 I},$$

et comme $(a^2 - b^2)\sin I$ est une petite quantité, on peut extraire le radical par approximation, en négligeant les quantités du second ordre ou en $(a - b)^2$, ce qui donne

$$\frac{1}{c}\cos R\left(1 - \frac{1}{2}\frac{(a^2 - b^2)\sin^2 I}{1 - b^2 \sin^2 I}\right) = \frac{1}{c}\cos R\left(1 - \frac{a^2 - b^2}{2\ b^2}\operatorname{tg}^2 R\right).$$

On a donc

$$\frac{k\lambda}{\varepsilon}=\frac{(n_c-n_a)\sin(V+R)\sin(V-R)}{\cos R}\cdot\frac{a(a+c)}{b(b+c)}\left(1+\frac{a^2-b^2}{2b(b+c)}\operatorname{tg}^2R\right)$$

ou encore, en continuant à négliger les termes du 2e degré en $a-b$ et $b-c$.

$$n_c-n_a=\frac{k\lambda}{\varepsilon}\frac{\cos R}{\sin(V+R)\sin(V-R)}\left[1+\frac{3(a-b)}{2b}\left(1-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^2R\right)\right]$$

Le second terme de la parenthèse représente l'erreur relative commise sur n_c-n_a par l'emploi de la formule approximative donnée au début. Cette erreur est de l'ordre de $\frac{3(a-b)}{2b}$.

Il serait aisé de calculer n_c-n_a par approximations successives.

V. — MESURE DES INDICES DE RÉFRACTION.

Lorsqu'on a déterminé, par les procédés qui ont été exposés plus haut, la position des axes optiques et les différences des trois indices principaux, les propriétés *biréfringentes* du cristal sont connues, mais la manière dont ce cristal réfracte la lumière n'est complètement déterminée que lorsqu'on a obtenu la valeur absolue de l'un des indices. La connaissance de cet indice est d'ailleurs nécessaire pour qu'on puisse tirer parti de l'observation de l'écartement des axes vus dans un milieu ambiant. La mesure directe d'un indice est donc toujours nécessaire; elle peut suffire à elle seule à la détermination des propriétés biréfringentes du cristal, si elle est étendue aux trois indices principaux.

1. OBSERVATION DE L'IMAGE D'UN OBJET VUE A TRAVERS UNE LAME A FACES PARALLÈLES.

Procédé du duc de Chaulnes. — Le procédé le plus simple pour mesurer l'indice d'un corps taillé en lame mince à faces parallèles est celui qui a été indiqué au siècle dernier par le duc de Chaulnes.

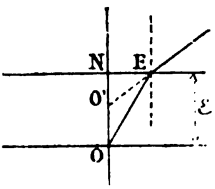


Fig. 144.

On se sert d'un microscope dont la mise au point se fait en tournant une vis micrométrique qui permet de mesurer avec précision le déplacement de l'appareil. On observe, en faisant la mise au point avec soin, sur un trait très fin O (fig. 144), ou tout autre

objet délicat, placé sur le porte-objet. On recouvre ensuite ce trait fin ou cet objet par la lame transparente L d'épaisseur ε, dont on veut déterminer l'indice n. L'image de O vient se faire en un point O′ qu'il est aisé de déterminer, car, pour le rayon OE, on a

$$O'N = \varepsilon \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} i},$$

et, par conséquent, si l'on suppose O′E très voisin de la normale ON, ce qui rend i et r très petits,

$$O'N = \frac{\varepsilon}{n}.$$

On tire de là

$$OO' = \varepsilon - \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon \frac{n-1}{n}.$$

Les choses se passeront donc comme si l'objet était relevé d'une longueur égale à $\varepsilon \frac{n-1}{n}$. Il faudra ainsi, pour mettre de nouveau au point l'objet O, relever le microscope d'une hauteur égale à cette quantité. La mesure de cette hauteur, combinée avec celle de l'épaisseur ε, permettra donc de connaître n.

Application du procédé du duc de Chaulnes à la mesure des indices des lames cristallines. — Image d'un objet vu à travers une lame cristalline à faces parallèles. — Pour voir comment le procédé du duc de Chaulnes peut être utilisé pour déterminer l'indice des lames cristallines, il faut étudier la façon dont se forme l'image d'un objet vu à travers une lame cristalline à faces parallèles. On doit s'attendre à ce que la double réfraction produise des effets tout particuliers.

Nous allons indiquer, d'après M. Stokes[1], la solution générale de la question.

Sur la surface antérieure S′ de la lame (fig. 145), on donne un point O dont on cherche l'image après que les rayons ont traversé la lame dont la seconde surface est S. Nous imaginons la surface de l'onde dont O est le centre et dont les rayons vecteurs sont égaux aux vitesses de propagation. Nous ne considérons qu'une nappe de cette surface, et nous la réduisons, en la laissant semblable à elle-même, jusqu'à ce que cette nappe vienne à être tangente en N à la surface S.

1. Proceedings of the Roy. Soc. XXVI. P. 386 (1877).

Si v est la vitesse de propagation correspondant à la direction du rayon ON, la surface de l'onde est réduite dans le rapport $\frac{\varepsilon}{v}$.

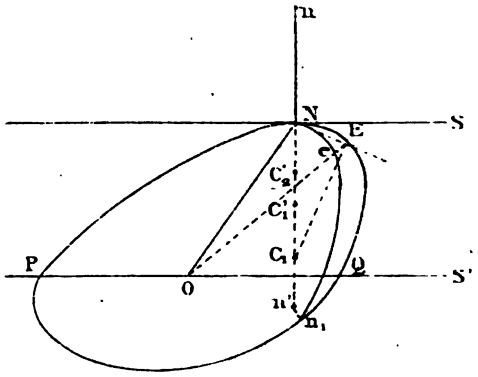


Fig. 145.

Si l'on mène en N une droite Nn normale à la surface S, et par conséquent au plan tangent en N, Nn est la direction de la propagation normale, perpendiculaire aux ondes planes, que transmet le rayon ON. En tombant sur la surface S, la direction de propagation normale, se trouvant dirigée suivant la normale au plan de séparation, continuerait sa route sans déviation, de sorte que le rayon ON émergerait suivant la direction Nn' prolongement de Nn.

Soit C_1 l'un des centres de courbure de la surface de l'onde en N et Nen_1 le plan de courbure principal correspondant. Dans ce plan et dans le voisinage du point N, la courbe Nen_1 peut être considérée comme un cercle. Dans le plan de courbure, et au voisinage de N, on trouvera la direction des rayons émergents en faisant la même construction que si le point lumineux était placé en C_1, l'indice de réfraction de la lame étant $\frac{1}{v}$.

Or on sait que, dans ces conditions, les rayons émergents viennent faire leur image en un point C'_1 situé sur NC_1, à une distance au-dessous de N égale à $v \times C_1N$. Il reste à trouver la valeur de C_1N qui n'est autre chose que le rayon de courbure ρ_1 de la surface de l'onde réduit dans le rapport $\frac{\varepsilon}{v}$.

On a donc

$$C_1N = \rho_1 \frac{\varepsilon}{v},$$

et

$$NC'_1 = v \times C_1N = \rho_1\varepsilon.$$

Si, le point lumineux étant sur la surface S', le milieu était unirétrigent avec l'indice $\frac{1}{\rho_1}$, l'image serait située au-dessous de S à une distance égale à $\rho_1\varepsilon$. Les choses se passent donc, avec la lame cristalline, pour les rayons correspondants aux vitesses de propagation normales situées dans le plan de courbure de rayon ρ_1, comme si le milieu était isotrope avec un indice apparent égal à $\frac{1}{\rho_1}$.

Si nous supposons une droite tracée, à partir du point O, parallèlement au plan de courbure et par conséquent à nn', tous les rayons émis par les divers points de la droite, et situés dans le plan mené par ON parallèlement à nn', viennent se couper mutuellement et donnent une image passant en C'_1 et parallèle à nn'. On mettra cette image au point, en relevant le microscope d'une longueur égale à C'_1n.

Si nous considérons le second plan de courbure principal passant en N, lequel est perpendiculaire au premier Nen_1, le rayon de courbure qui lui correspond est ρ_2 et nous verrons de même que, si nous menons de O une droite perpendiculaire sur nn', cette droite vient former une image nette en un point C'_2 tel que

$$NC'_2 = \rho_2\varepsilon.$$

On peut donc, par des mises au point différentes, voir successivement, d'une manière nette, deux systèmes de lignes perpendiculaires entre eux et respectivement parallèles aux deux plans principaux de courbure de la surface de l'onde, au point où cette surface est touchée par un plan parallèle à celui de la lame.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que d'une seule nappe de l'onde; nous répéterions évidemment pour l'autre nappe ce que nous avons dit pour celle-ci.

Il y a donc en général quatre systèmes de lignes parallèles que l'on peut voir nettement, mais non pas à la fois, par des mises au point convenables, à travers une lame cristalline. Ils se divisent en deux groupes dont chacun se compose de deux systèmes perpendiculaires entre eux. Chacun de ces deux groupes correspond à une nappe différente de la surface de l'onde, et par conséquent à des directions de vibrations perpendiculaires entre elles. Avec un polariseur ou un ana-

lyseur, on peut donc à volonté supprimer un des deux groupes en conservant l'autre.

Toute droite non comprise dans un de ces quatre systèmes ne peut être vue nettement à travers la lame.

1° *Cristaux uniaxes.* Appliquons d'abord la théorie aux cristaux uniaxes. Nous supposerons, pour fixer les idées, que le cristal est uniaxe, l'axe de révolution étant a et le rayon équatorial c.

L'une des nappes de l'onde est une sphère, et pour les vibrations ordinaires, les choses se passeront comme pour un corps isotrope d'indice $\frac{1}{c}$.

Quant à l'autre nappe c'est un ellipsoïde de révolution dont l'axe est a.

Si la lame est taillée perpendiculairement à l'axe optique, l'onde admettant en son sommet une sphère osculatrice de rayon égal à $\frac{c^2}{a}$. Les rayons extraordinaires se comporteront, pour tous les systèmes de lignes, comme un corps isotrope d'indice $\frac{a}{c^2}$.

Si la lame est taillée parallèlement à l'axe optique, les deux plans de courbure principaux de l'onde sont le plan équatorial dans lequel le rayon de courbure est c, et le plan méridien dans lequel le rayon de courbure est $\frac{a^2}{c}$.

Si la lame est coupée d'une façon quelconque, et si θ est l'inclinaison de l'axe du cristal sur la normale à la lame, les deux plans de courbure sont le plan passant par l'axe pour lequel le rayon est ρ et le plan perpendiculaire pour lequel le rayon est ρ'. On a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{a^2c^2}\left(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{c^2} = \frac{1}{\rho'}\left(a^2\cos^2\theta + c^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour une lame de clivage de spath d'Islande, $\theta = 44°57'$, ce qui donne

	Lignes perpendiculaires au plan principal.	Lignes parallèles au plan principal.
Raie C. — Indices apparents	1.5777	1.4094
Raie D. — —	1.5809	1.4104

› *Cristaux biaxes.* — Pour les cristaux biaxes, le problème est plus ıplexe encore et nous nous contenterons de supposer la lame paral- à l'un des plans principaux. Le tableau suivant indique les indices arents que l'on observerait dans les différents cas.

Direction de la vibration.	Direction de la ligne visée. a	b	c
a	$\frac{1}{a}$	$\frac{a}{c^2}$	$\frac{a}{b^2}$
b	$\frac{b}{c^2}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{b}{a^2}$
c	$\frac{c}{b^2}$	$\frac{c}{a^2}$	$\frac{1}{c}$

Il est intéressant de remarquer, avec M. Stokes, qu'au voisinage des xes optiques, les indices apparents doivent changer avec une vitesse xtraordinaire, car le rayon de courbure perpendiculaire au plan ac st nul à l'ombilic et infini au point de contact du plan tangent qui ouche l'onde suivant un cercle.

2. OBSERVATION DE L'IMAGE VUE A TRAVERS UN PRISME.

Description générale du procédé. — Le procédé le plus employé pour mesurer l'indice de réfraction d'une substance est celui du prisme.

On sait que, si A (fig. 146) est l'arête réfringente d'un prisme, l'image virtuelle d'un objet S vu à travers le prisme se trouve en S′ à une distance AS′ = AS, et suivant une direction AS′ telle que l'angle formé par SA et la direction S′A prolongé est divisé en deux parties égales par la bissectrice de l'angle A du prisme. On sait en outre que si δ est l'angle S′AS, et n l'indice de réfraction, par rapport au milieu ambiant de la substance du prisme, on a

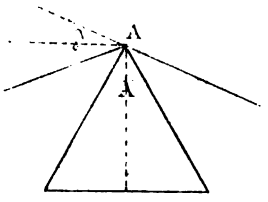


Fig. 146.

$$\sin\frac{A+\delta}{2} = n \sin\frac{A}{2}.$$

Pour connaître n, il suffit donc de mesurer l'angle A du prisme, d'observer l'image d'un objet à travers le prisme et de mesurer l'angle δ.

Pour ces observations, on se sert d'un goniomètre à axe horizontal, semblable à celui qui a été décrit dans le tome Ier.

Le limbe horizontal fixe porte un collimateur composé d'une fente étroite verticale éclairée d'une manière quelconque et disposée au foyer d'une lentille. La fente est l'objet dont on regarde l'image, et sa distance au prisme peut être, d'après cette disposition, regardée comme étant infinie, ce qui empêche l'angle δ de varier par une simple translation du prisme.

Le prisme est porté par un support qui peut recevoir : 1° deux mouvements de translation suivant deux droites rectangulaires; 2° deux mouvements de rotation autour de deux axes rectangulaires ; 3° enfin un mouvement dans le sens vertical. Ce support est en outre mobile autour de l'axe vertical de l'appareil.

L'image de la fente est observée au moyen d'une lunette astronomique portant un réticule à fils croisés, et mobile autour de l'axe de l'appareil; une alidade fixée à la lunette et portant deux verniers opposés permet d'observer sur le limbe l'azimuth de la lunette par rapport à la direction du collimateur prise pour zéro.

On commence par disposer la lunette pour la vision à l'infini, en supprimant le prisme et plaçant la lunette dans le prolongement de la direction du collimateur ; on regarde la fente et on règle la position de la lentille de manière que la fente soit vue nettement dans la lunette. On est alors assuré que la fente est bien placée au foyer principal de la lentille du collimateur. On dispose l'axe de la lunette horizontal, en mettant en coincidence, avec le fil horizontal du réticule, l'image d'un fil horizontal divisant la fente en 2 parties et placé, par construction, sur l'axe horizontal du collimateur. On place la lunette de manière que le fil du réticule bissèque l'image de la fente, et on note la lecture des verniers, ce qui fixe le zéro à partir duquel les angles seront comptés.

Ces dispositions prises, on se sert de l'appareil pour mesurer, comme il a été dit au chapitre XIV du tome Ier, l'angle A du prisme. Cette mesure exige que le prisme ait été placé de manière que son arête réfringente soit bien parallèle à l'axe de rotation.

Le prisme restant en place, on observe à travers le prisme l'image de la fente, qui est colorée par la réfraction, et on s'arrange pour que la partie jaune de cette image, par exemple, coïncide avec le fil vertical du réticule. La lecture des verniers donne l'azimuth de la lunette par

rapport au zéro déterminé comme il a été dit, c'est-à-dire l'angle $\frac{\pi - \delta}{2}$. On tire de là, au moyen de la formule donnée plus haut, l'indice de réfraction correspondant au jaune moyen.

Lorsqu'on veut déterminer avec précision l'indice de réfraction correspondant à une lumière de longueur d'onde bien déterminée, on éclaire la fente par une lumière monochromatique. On peut se servir de la lumière du sodium qui donne la lumière jaune correspondant à la raie D, ou de la lumière du lithium qui donne de la lumière rouge, ou de celle du thallium qui donne du vert. Pour se procurer ces diverses lumières, on peut se servir d'une lampe à alcool dans le liquide de laquelle on a fait dissoudre une petite quantité de chlorure de ces métaux. Il est préférable à tous égards d'employer un bec Bunsen dans la flamme non éclairante duquel on place, porté par un petit panier en fils de platine, un fragment de chlorure de ces métaux.

On peut encore éclairer la fente par un tube de Geissler à hydrogène, qui donne les raies C et F très lumineuses, et la raie G′ moins brillante; on se sert, pour faire passer la décharge dans le tube, d'une bobine Ruhmkorff et de deux ou trois éléments Bunsen. On vise successivement avec la lunette l'image de chacune de ces raies.

Si l'on peut employer la lumière solaire, on visera successivement chacune des raies du spectre, ce qui donnera successivement les indices correspondant à chacune de ces raies, dont les longueurs d'onde sont données en millionièmes de millimètre dans le tableau suivant, emprunté à l'Annuaire du Bureau des Longitudes.

Rouge. . . .	Raie A.	760.4	
	» B.	686.7	
Orangé . . .	» C.	656.2	Hydrogène.
Jaune. . . .	» D.	589.5 588.9	Sodium.
Vert	» b_1	518.3	Magnésium.
Bleu	» F.	486.1	Hydrogène.
Indigo. . . .	» G′	434.0	Hydrogène.
	» G	430.7	Fer.
Violet. . . .	» *h*.	410.1	Hydrogène.
	» H.	396.7	Calcium.
	» K.	393.3	Calcium.

Voici, en outre, exprimées avec la même unité, les longueurs d'onde

correspondant aux diverses lumières monochromatiques que l'on emploie le plus habituellement.

Sodium	589
Lithium.	670.7
Thallium	559.9

La lumière du sodium n'est pas absolument monochromatique : elle se compose en réalité de deux lumières dont les longueurs d'onde très voisines sont respectivement égales à 589,5 et 588,9.

Fixateur Ketteler. — Malheureusement on ne dispose pas toujours du soleil ; on peut suppléer à son absence au moyen de l'appareil que M. Ketteler a appelé le fixateur[1]. La fente est remplacée par un réticule formé d'un fil horizontal et de deux fils verticaux très distants. Si l'on éclairait ce réticule, au point de croisement du fil, par une lumière de longueur d'onde connue, on déterminerait, par la méthode ordinaire, l'indice correspondant à cette longueur d'onde. Pour réaliser cette idée, on place le plus près possible du réticule une lame de verre portant des traits horizontaux équidistants de 1/4 de mm., et l'on projette sur cette lame de verre un spectre horizontal en plaçant devant cette lame un prisme à axe horizontal disposé entre deux lentilles convenablement placées et éclairées par une fente horizontale. La lame de verre, les lentilles, le prisme et la fente formant un appareil invariablement lié, chaque trait horizontal de la lame correspond à une couleur donnée du spectre dont on peut déterminer la longueur d'onde par des observations préalables. Tout le système étant mobile par rapport au réticule, on peut mettre en contact le fil horizontal de ce réticule avec un quelconque des traits de la lame, et déterminer ainsi successivement les divers indices des couleurs qui correspondent à chacun de ces traits.

On détermine les longueurs d'onde qui correspondent à ces couleurs en se servant d'un prisme pour lequel la loi de variation des indices avec la longueur d'onde est connue, ou mieux encore d'un réseau.

Application du procédé à des prismes taillés dans des substances cristallisées. — Lorsqu'on a affaire à des substances cristallisées, on peut se servir, comme faces du prisme, de deux faces cristallines inclinées l'une sur l'autre. On peut aussi, et c'est ce qu'on est le plus souvent obligé de faire, tailler artificiellement les faces

1. Wiedem. Ann. 12-488 (1881) et J. Phys. (2), I. 198 (1882).

qui servent à l'observation. Il faut alors que celles-ci aient une orientation cristallographique bien déterminée, ce dont on s'assure en les rattachant, par des observations goniométriques, à des faces cristallines connues. Il faut en outre que les faces soient bien planes et aussi polies que possible; pour les cristaux artificiels, qui sont en général peu durs et ne prennent qu'un poli très imparfait, on obtient de bons résultats en recouvrant chaque face d'une lame de verre mince bien plane et fixée par une solution épaisse de baume du Canada dans le chloroforme.

Lorsqu'on observe avec un prisme taillé dans un cristal suivant une direction quelconque, il faut, pour déterminer le chemin que suit dans le prisme le faisceau lumineux donnant la déviation minimum, tenir compte de ce que la vitesse de propagation est modifiée par un changement de direction du rayon. Mais la plupart des cristaux sont assez peu biréfringents pour qu'on néglige cette légère variation, et pour qu'on puisse admettre que le rayon qui se propage dans le cristal en donnant le minimum de déviation est, dans tous les cas, normal au plan bissecteur. Suivant cette direction il se propage d'ailleurs deux vibrations rectangulaires, l'une avec une vitesse v_1 et un indice $\frac{1}{v_1}$, l'autre avec une vitesse v_2 et un indice $\frac{1}{v_2}$. Chacune de ces vibrations donne un spectre séparé qui permet de mesurer séparément $\frac{1}{v_1}$ et $\frac{1}{v_2}$. Si les deux spectres ne sont pas assez complètement séparés pour que l'observation soit possible, on intercepte successivement l'un d'entre eux au moyen d'un nicol placé entre le collimateur et le prisme. On a alors :

$$v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\cos(t_1 + t_2)$$

$$v_2^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}\right)\cos(t_1 + t_2)$$

où t_1 et t_2 sont les angles compris entre les axes optiques et la ligne normale au plan qui bissèque l'angle du prisme, a, b, c étant les axes de l'ellipsoïde optique principal.

Si l'orientation de cet ellipsoïde est connu, deux prismes taillés dans des directions différentes suffisent à donner les 3 quantités a, b, c.

On s'attache, bien entendu, à tailler les prismes, de manière que les calculs soient les plus simples possible.

Si le cristal est uniaxe, on taillera le prisme de manière que l'arête réfringente soit parallèle à l'axe. Une des images correspond alors à la vibration ordinaire, et l'autre à la vibration extraordinaire principale. L'une et l'autre se comportent rigoureusement comme si le milieu était isotrope, car tous les rayons extraordinaires qui se propagent dans la section principale du prisme, vibrent suivant l'arête et ont même indice.

Si le cristal est biaxe, on prend pour arête réfringente l'un des axes d'élasticité, c par exemple. Des deux vibrations qui se propagent suivant la normale au plan bissecteur, l'une est dirigée suivant c et se comporte, par la même raison que précédemment, comme dans un milieu isotrope d'indice $\frac{1}{c}$; l'autre a seule un indice anormal $\frac{1}{v_1}$, et l'on a

$$v_1^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\cos 2\theta$$

θ étant l'angle de la normale au plan bissecteur avec l'axe b. Deux prismes ayant un angle θ différent et une même arête réfringente suffiraient à donner a et b.

Si, l'arête réfringente étant toujours parallèle à c, le cristal était assez biréfringent pour qu'on ne puisse pas supposer que l'indice anormal correspondant au rayon se propage suivant la normale au plan bissecteur, on calculerait comme suit la direction de propagation de la vibration qui donne le minimum de vibration.

Soit A (fig. 146) l'angle du prisme, i et i' les angles que font, avec les normales aux faces, les rayons incident et émergent, x l'angle que fait

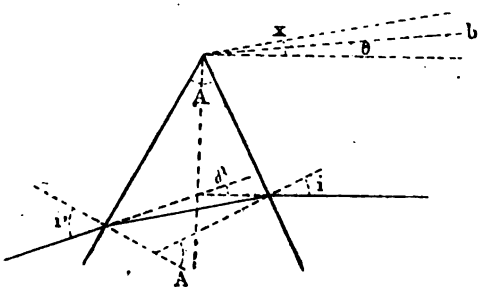


Fig. 146.

avec la normale au plan bissecteur la direction de propagation qui donne le minimum de déviation, θ l'angle que fait la normale au plan

bisecteur avec l'un des axes d'élasticité b, enfin l'angle du rayon incident avec le rayon émergent.

Si v est la vitesse de propagation du rayon, on aura

$$v^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\cos 2(x - \theta)$$

$$v \sin i = \sin\left(\frac{A}{2} - x\right)$$

$$v \sin i' = \sin\left(\frac{A}{2} + x\right)$$

$$i + i' = A + \delta$$

liminant i et i' entre les 3 dernières équations, on aura

$$v^2 = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A+\delta}{2}} \cos^2 x + \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A+\delta}{2}} \sin^2 x$$

Si l'on pouvait poser $\sin^2 x = 0$ et $\cos^2 x = 1$, on aurait

$$v = \frac{\sin \frac{A}{2}}{\sin \frac{A+\delta}{2}},$$

c'est-à-dire l'équation ordinaire du minimum de déviation.

Posons

$$P^2 = \frac{\sin^2 \frac{A}{2}}{\sin^2 \frac{A+\delta}{2}} \qquad Q^2 = \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\cos^2 \frac{A+\delta}{2}}$$

ce qui donne

$$(1) \qquad 2v^2 = (P^2 + Q^2) + (P^2 - Q^2)\cos 2x = (a^2 + b^2) + (a^2 - b^2)\cos 2(x - \theta);$$

telle est la relation qui existe entre x et la déviation δ. Différentions par rapport à x, et égalons à zéro pour avoir le minimum de δ, on obtiendra la relation de condition

$$(2) \qquad (P^2 - Q^2)\sin 2x = (a^2 - b^2)\sin 2(x - \theta)$$

En éliminant x entre ces deux équations, on aurait une relation entre P, Q, a, b et θ, c'est-à-dire entre la déviation minima observée et les données du prisme.

On peut transformer les relations (1) et (2) de la manière suivante. Éliminons $P^2 - Q^2$, il viendra

$$P^2 + Q^2 + (a^2 - b^2)\sin 2(x - \theta)\operatorname{cotg} 2x = a^2 + b^2 + (a^2 - b^2)\cos 2(x - \theta)$$

ou

$$(3) \qquad (P^2 + Q^2)\sin 2x = (a^2 + b^2)\sin 2x + (a^2 - b^2)\sin 2\theta$$

Les relations (2) et (3) donnent aisément

$$P^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{1}(a^2 - b^2)\frac{\cos(2\theta - x)}{\cos x}$$

$$Q^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\frac{\sin(2\theta - x)}{\sin x}$$

et, en posant

$$V_1^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\cos 2\theta$$

$$U^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) - \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\cos 2\theta$$

on obtient

$$P^2 = V_1^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2\theta \operatorname{tg} x$$

$$Q^2 = U^2 + \frac{1}{2}(a^2 - b^2)\sin 2\theta \operatorname{cotg} x$$

d'où l'on déduit

$$(P^2 - V_1^2)(Q^2 - U^2) = \frac{1}{4}(a^2 - b^2)^2 \sin 2\theta$$

Si l'on peut négliger $\frac{1}{4}(a^2 - b^2)^2$, on aura $P^2 = V_1^2$, ce qui revient à admettre que le rayon qui donne le minimum de déviation se propage suivant la normale au plan bissecteur.

Approximation que l'on peut atteindre dans la mesure des indices. — Il importe de savoir sur quelle approximation on peut compter lorsqu'on détermine un indice par la mesure du minimum de direction. L'erreur dn provient de celle qui est faite sur la mesure de A, et de celle qui est faite sur la mesure de δ.

De la formule :

$$n = \frac{\sin\frac{A + \delta}{2}}{\sin\frac{\delta}{2}}$$

n déduit, par une différentiation,

$$dn = -\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{2\sin^2\frac{A}{2}}\,dA + \frac{\cos\frac{A+\delta}{2}}{2\sin\frac{A}{2}}\,d\delta.$$

Comme on ne connaît ni le signe de l'erreur dA commise sur la mesure de l'angle A, ni celui de l'erreur $d\delta$ commise sur la mesure de la déviation δ, il faut, pour avoir l'erreur possible dn, ajouter les 2 termes du second membre pris en valeur absolue. Nous pouvons d'ailleurs, ne connaissant pas non plus les valeurs absolues de dA et de $d\delta$, admettre que ces valeurs soient égales. L'erreur possible est alors

$$dn = \left(\frac{\sin\frac{\delta}{2}}{\sin^2\frac{A}{2}} + \frac{\cos\frac{A+\delta}{2}}{\sin\frac{A}{2}}\right)\frac{dA}{2}.$$

Toutes choses égales, l'erreur dn est moindre lorsque A est le plus grand possible. Mais A ne peut pas être fait aussi grand qu'on le veut, car il est soumis à la condition

$$n\sin\frac{A}{2} < 1.$$

Si $n = 2$, la valeur limite de A est de 60°.

Comme on a généralement à mesurer des indices moindres que 2, on peut employer des prismes dont l'angle A est de 60°. Pour fixer les idées, nous supposons qu'on ait effectivement un de ces prismes. Nous supposons en outre $n = 1,5$.

On a ainsi

$$dn = \frac{4}{3}\,dA.$$

Supposons que $dA = 0,00001$, soit $2'',06$; on aura

$$dn = 0.000013.$$

Ainsi, pour que la valeur de l'indice soit exacte à une unité du 5e ordre près, il est nécessaire qu'on puisse répondre de la mesure de A et de celle de δ à 2 secondes sexagésimales près. Or, en admettant que l'on possède un instrument qui permette de faire cette lecture, il est à peu près impossible d'admettre que, même avec les précautions les plus minutieuses, on puisse répondre d'une pareille exactitude.

Sans parler des conditions multiples de l'observation telles que l'installation du prisme, la perfection de la visée, etc., on rencontrera un obstacle très sérieux dans la difficulté de se procurer un prisme dont les deux surfaces soient parfaitement planes.

Si l'on prend des faces cristallines naturelles, ce qui généralement est le procédé le plus avantageux, on se heurtera aux petites inégalités dont ces faces sont toujours atteintes. Si l'on taille artificiellement les faces du prisme, on rencontrera un obstacle plus grave encore dans le léger arrondissement des faces. Il est clair que cette courbure des faces change l'angle A, et d'une manière inégale avec la portion de prisme qui est traversée par la lumière. Cette cause d'erreur est fort grave, et peut altérer les mesures, comme l'a montré récemment M. Voigt[1], de plusieurs centaines de secondes.

Pour éviter, autant que possible, cette dernière cause d'erreur, MM. Topsoë et Christiansen[2] recommandent de ne pas pousser le travail des faces jusqu'au poli parfait, car c'est surtout dans le polissage, qui exige une assez grande vitesse rotative du cristal et du polissoir, que les faces s'arrondissent. On supplée au défaut de transparence de la face non polie, en la recouvrant, comme nous l'avons déjà indiqué, d'une petite lame de verre mince collée par une dissolution de baume dans le chloroforme.

Il faut remarquer que la double réfraction est déterminée non par la valeur absolue des indices, mais par les différences des trois indices principaux. Or, pour beaucoup de substances, l'une au moins de ces différences a son premier chiffre significatif de l'ordre de la 3e décimale. Lorsqu'on détermine la double réfraction par la mesure des trois indices principaux, il faut, dans ce cas, être sûr de quatre chiffres décimaux des indices pour être sûr des deux premiers chiffres de la différence. Il faudra donc des échantillons exceptionnels et des soins minutieux pour arriver à ne mesurer la double réfraction qu'avec une approximation variant entre $\frac{1}{10}$ et $\frac{1}{100}$. On peut donc dire que, dans des cas fort nombreux, la mesure des trois indices ne donne qu'une mesure illusoire de la double réfraction. On agit alors un peu comme si l'on voulait mesurer la dilatation d'une règle en en mesurant la longueur à deux températures différentes.

1. *Groth. Zeits.*, 5, 113 (1880).
2. *Ann. ch. et phys.* (5) I, 1 (1874).

Le peu d'exactitude avec laquelle la biréfringence se déduit de la mesure des indices est d'ailleurs bien connue. Aussi, pour prendre quelque idée de l'erreur commise, on ne manque jamais de calculer la valeur que les indices observés assigneraient à l'écartement angulaire des axes optiques dans l'air et de la comparer avec celle qui a été directement mesurée. Le désaccord, qui existe toujours, est généralement supérieur à un demi-degré, même avec de très bonnes déterminations.

Il conviendrait, en général, de ne demander au prisme que la valeur de l'indice moyen. Les méthodes que nous avons indiquées plus haut, et qui permettent de mesurer les différences des indices, achèveraient d'une façon beaucoup plus commode et le plus souvent beaucoup plus exacte, de déterminer la biréfringence.

2. — MÉTHODE DE LA RÉFLEXION TOTALE.

Théorie générale du procédé. — Lorsqu'un rayon tend à passer d'un milieu plus réfringent d'indice N, dans un milieu moins réfringent d'indice n, il se réfléchit totalement sur la surface de séparation des deux milieux pour toutes les incidences supérieures à l'angle donné par la formule

$$\sin\varphi = \frac{n}{N}.$$

La mesure de φ fait donc connaître le rapport $\frac{n}{N}$, d'où l'on peut tirer l'un des indices si l'on connaît l'autre.

Soit S (fig. 147) la surface de séparation des deux milieux ; supposons des rayons divergents, se mouvant dans le milieu d'indice N et tombant

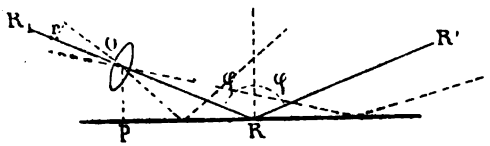


Fig. 147.

sur S, du côté droit ; un rayon RR', dont l'angle d'incidence est égal à φ, se réfléchit totalement suivant RR ; tous les rayons, ayant un angle d'incidence moindre ne se réfléchissent que partiellement ; tous ceux qui ont un angle d'incidence plus grand se réfléchissent totalement.

Soit une lentille L, dont le centre optique est en O ; Op est la perpendiculaire abaissée de O sur S. Nous supposons que le plan de la

figure est un plan quelconque passant par Op. Tous les rayons parallèles à la ligne RR_1 qui passe en O, viennent former leur image en r, sur RR_1; tous les rayons qui se réfléchissent totalement, et dont l'angle d'incidence est supérieur à φ, forment leur image au-dessous de r, tandis que tous ceux qui ne se réfléchissent pas totalement, ou dont l'angle d'incidence est inférieur à φ, forment leur image au-dessus de r. Si l'on considère successivement tous les plans passant par Op, ce qui revient à faire tourner la figure autour de Op, les rayons tels que RR_1 décrivent un cône circulaire droit ayant Op pour axe, et les points r décrivent un arc de cercle dont la convexité est tournée vers le bas. Cet arc de cercle sépare le plan focal en deux parties : l'une, située vers le haut, c'est-à-dire du côté de la concavité, est relativement sombre, comme n'étant éclairée que par des rayons partiellement réfléchis; l'autre, située vers le bas, c'est-à-dire du côté de la convexité, a le maximum d'intensité lumineuse.

Si l'axe principal de la lentille est dirigé suivant une des génératrices du cône RR_1, tout est symétrique de part et d'autre du plan qui passe par Op et par cet axe principal ; le sommet de l'arc est donc situé sur l'axe. La lentille L peut être d'ailleurs le cristallin de l'œil, ou l'objectif d'une lunette astronomique, portant un réticule à son foyer, et dont on regarde l'image avec un oculaire.

Lorsque l'axe de la lunette est dirigé suivant l'une des génératrices du cône pOR, on voit le champ de la lunette partagé en deux parties, d'intensités différentes, par un arc de cercle rr' passant en O, comme le représente la figure 148.

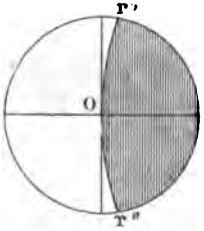


Fig. 148.

Si l'on employait la lumière monochromatique, l'arc $r'r''$ serait unique, mais si l'on employait la lumière blanche, ni les indices n et N, ni le rapport $\frac{n}{N}$ n'étant les mêmes pour les différentes longueurs d'onde, il y aurait pour chaque couleur un cône pOR différent, et l'arc $r'r''$ serait irisé.

Emploi d'un prisme. — Pour rendre l'observation réalisable, supposons que le milieu le plus réfringent d'indice N soit solide et limité par les surfaces d'un prisme SPQ (fig. 149) plongé dans l'air dont l'indice $n = 1$. La lumière incidente diffuse pénètre par SQ, est réfléchie totalement sur PQ, et traverse la surface SP. Soit P l'angle du prisme en P; le

rayon RR_1, qui commence à être réfléchi totalement, rencontre SP sous l'angle d'incidence β, et émerge sous l'angle d'incidence α. La lunette,

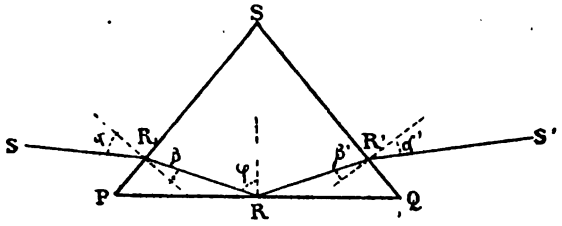


Fig. 149.

qui doit observer les phénomènes que nous avons décrits, doit donc être dirigée, non plus suivant RR_1, mais suivant une droite SR_1, faisant avec la normale à SP un angle α. Cet angle est aisé à calculer, car on a

$$\beta + P = \varphi \quad \frac{1}{N} = \sin(\beta + P) = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

En éliminant $\sin\beta$, il vient

$$\frac{1}{P} = \frac{\sin P}{\sqrt{1 + \sin^2\alpha - 2\cos P \sin\alpha}}.$$

Il suffit donc de connaître P et α pour en déduire le rapport $\frac{1}{N}$.

Pour réaliser la mesure, on installe le prisme sur le support central d'un goniomètre à axe vertical, sur lequel se trouve une lunette fixe disposée pour la vue à l'infini. On place le prisme de manière que les faces en soient exactement verticales, ce dont on peut s'assurer en choisissant un point qui soit sur un plan horizontal mené par le milieu du prisme, et constatant que l'image de ce point reste dans un plan horizontal, lorsqu'on fait tourner le prisme.

On dirige alors l'axe de la lunette normalement à la face PS. Pour remplir cette condition, il est nécessaire que la lunette présente une disposition spéciale permettant d'en éclairer le réticule. Le réticule vient faire son image par réflexion sur la face PS, et on tourne la lunette jusqu'à ce que l'image du réticule et le réticule lui-même, vu directement, soient en contact.

La lunette ainsi disposée, on fait une lecture, puis on tourne, soit la

lunette, soit le prisme jusqu'à ce que la ligne de séparation de la réflexion totale commençante vienne passer par le centre du réticule. On fait alors une nouvelle lecture, et la différence des deux lectures donne l'angle α.

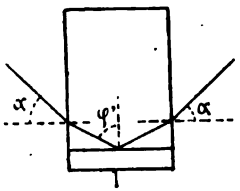
Une mesure goniométrique ordinaire donne l'angle P du prisme.

La face SQ est éclairée par une lumière monochromatique. L'observation, pour être possible, exige que le rayon RR_1 vienne rencontrer la face SP sous une incidence inférieure à celle qui donne au rayon émergent la direction rasante, c'est-à-dire à φ. Lorsque l'incidence de RR_1 sur SP est égale à φ, le triangle RPR_1 est isoscèle, et $P = \pi - 2\varphi$. La condition de possibilité de l'observation est donc

$$P < \pi - 2\varphi.$$

On peut se dispenser de placer la lunette normalement à SP, ce qui exige l'emploi d'un micromètre éclairé. Il suffit en effet, après avoir placé la lunette dans la direction SR_1, de changer la lumière de côté, de manière à la faire entrer par SP; elle ressort alors par SQ, suivant une direction S'R' faisant un angle α' avec la normale à SQ. Pour faire passer la lunette de la direction SR_1 à la direction S'R', il faudra la tourner d'un angle égal à $\alpha + \pi - S + \alpha'$, qui se trouvera ainsi mesuré. On calculerait facilement α' en fonction de φ et de l'angle Q du prisme dont les trois angles doivent être connus. On aurait ainsi un erelation donnant φ en fonction de l'angle mesuré $\alpha + \pi - S + \alpha'$.

On simplifie cette relation en faisant $P = Q$, et par conséquent $\alpha = \alpha'$. On la simplifie encore davantage en faisant $S = 0$, et $\alpha = \alpha' = 90°$.



F. 150.

Le prisme devient ainsi un rectangle. C'est la disposition employée par M. Feussner (fig. 150). On a alors

$$N = \sqrt{1 + \sin^2 \alpha},$$

et l'angle mesuré est égal à 2α.

Quelle que soit la forme donnée au prisme, on peut s'en servir pour mesurer l'indice de réfraction d'un solide quelconque, pourvu que cet indice soit moindre que celui du prisme. A cet effet, on colle sur la face PQ (fig. 151) la face du solide que nous supposerons être sous la

forme d'une lame. L'indice du prisme étant N, et n celui de la lame, la réflexion totale aura lieu sur la surface PQ sous un angle φ' donné par la formule

$$\sin\varphi' = \frac{n}{N},$$

à la condition qu'il n'y ait pas d'air interposé entre la face du prisme et celle du solide.

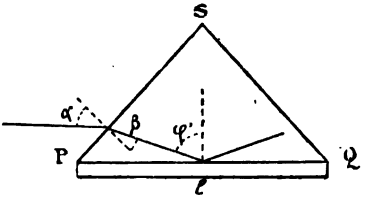


Fig. 151.

Pour réaliser cette condition, on dépose entre les deux faces une goutte d'un liquide plus réfringent que la lame et que le prisme. Cette addition d'un milieu liquide à faces parallèles entre le prisme et la lame, ne change pas, dans ces deux corps, la direction relative du faisceau lumineux qui les traverse. La réflexion totale se produira donc exactement dans les mêmes conditions que si le liquide n'existait pas.

On a toujours

$$\beta + P = \varphi', \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{1}{N}$$

et par conséquent

$$\sin(\beta + P) = \frac{n}{N},$$

n étant l'indice de la lame. En éliminant β, il vient

$$n = \sin\alpha\cos P + \sin P\sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}.$$

Si l'on mesure α, comme il a été dit plus haut et si l'on suppose connus l'angle P et l'indice N du prisme, on pourra donc calculer n.

Si le prisme est à faces parallèles, on mesure l'angle 2α, et l'on a

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}.$$

On peut employer des lames très petites qui ne recouvrent qu'incomplètement la face de prisme sur laquelle on les colle. Il convient alors de noircir toute la partie de la face qui reste libre.

Ce procédé de mesure des indices a le grand avantage de pouvoir s'appliquer à des lames très minces, fort petites, et peu ou même pas transparentes. Il convient donc bien aux recherches cristallographiques.

Malheureusement il ne s'applique qu'aux substances dont l'indice est moindre que celui du prisme. Or, le flint le plus réfringent dont on

puisse se servir ne peut guère dépasser un indice de 1,8. On est encore plus limité dans le choix du liquide qui relie la lame au prisme.

On peut employer le sulfure de carbone, dont l'indice est 1,62. M. Andrecas Fock[1] s'est servi de la naphtaline monobromée, qui est beaucoup moins volatile, puisqu'elle ne bout qu'à 277°, dont l'odeur est beaucoup moins désagréable et dont l'emploi est plus commode. L'indice de ce liquide est 1,66 environ.

M. Abbe[2] indique l'emploi du bromure d'arsenic $AsBr^3$, dont l'indice serait, d'après lui, égal à 1,781.

On n'a d'ailleurs besoin que de très petites quantités de ces liquides.

Application à la mesure des indices des lames cristallines. — Si la lame dont on mesure l'indice est cristalline, cet indice varie avec la direction des vibrations. Considérons un faisceau lumineux venant du milieu plus réfringent et tombant sur la lame cristalline. Tant que l'incidence est suffisamment petite, le faisceau traverse le plan de séparation, passe dans la lame et se divise en deux faisceaux polarisés à angle droit dont les indices sont n et n'. Si nous augmentons l'incidence du faisceau, les deux faisceaux réfractés s'éloignent de plus en plus de la normale, jusqu'à ce que l'un d'eux soit réfracté suivant la face de séparation; à ce moment précis la réflexion totale commence pour ce faisceau dont l'indice n satisfait à la formule

$$\frac{n}{N} = \sin\varphi.$$

Lorsqu'on continue à faire croître l'incidence des rayons, l'autre faisceau, polarisé à angle droit sur le premier, émerge à son tour suivant la direction rasante, et la réflexion totale se produit pour ce faisceau d'indice n' sous un angle φ' donné par la formule

$$\frac{n'}{N} = \sin\varphi'.$$

Si donc on considère l'intersection de la lame cristalline avec le plan d'incidence des rayons qui passe par l'axe de la lunette et la normale à la lame, cette droite, considérée comme une direction de propagation des rayons dans l'intérieur du cristal, propage deux vibrations à angle droit d'indices n et n'. Si, au moyen d'un polariseur, on arrête la vi-

1. *Groth. Zeits.*, 4, P. 583.
2. *Groth. Zeits.* (Extrait), 4, P. 137.

bration d'indice n', l'observation de la réflexion totale fait connaître l'indice n; en tournant le polariseur de 90°, on obtient l'indice n'.

Une seule lame peut ainsi servir à déterminer les indices de toutes les vibrations qui peuvent se propager suivant toutes les directions comprises dans le plan de la lame.

Supposons, par exemple, que la lame considérée soit découpée perpendiculairement à l'axe d'un cristal uniaxe. Une observation faite en plaçant la vibration du polariseur dans le plan d'incidence supprime les vibrations dirigées dans le plan de la lame, et la mesure donne l'indice extraordinaire. En tournant le polariseur de manière que sa vibration soit parallèle à la lame, on mesure au contraire l'indice ordinaire.

Supposons la lame taillée perpendiculairement à la bissectrice, négative par exemple, d'un cristal biaxe. On commence d'abord par orienter la lame de manière que la ligne des axes soit dans le plan d'incidence. On mesure alors successivement les indices $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$ des vibrations qui peuvent se propager cette direction. On tourne ensuite la lame de 90° de manière que la trace du plan d'incidence soit normale à la ligne des axes, et l'on mesure les indices $\frac{1}{b}$ et $\frac{1}{c}$. On a ainsi les trois indices principaux[1].

Réfractomètre de M. F. Kohlrausch. — Au lieu de placer la lame cristalline en contact avec un milieu solide, on peut la plonger dans un milieu liquide plus réfringent qu'elle ne l'est. Tel est le procédé qui a été indiqué par M. F. Kohlrausch[1], et qui a rappelé, après un long oubli, l'attention sur l'emploi de la réflexion totale pour mesurer les indices des substances cristallines.

L'appareil de M. Kohlrausch se compose d'un vase cylindrique en

1. La théorie que nous donnons ici ne semble prêter à aucune objection. Cependant M. W. Kohlrausch, à la suite d'observations faites sur une lame d'acide tartrique oblique aux axes principaux, a cru constater que la théorie n'était pas d'accord avec l'observation. Il a rétabli cet accord en supposant que ce que l'on mesurait réellement est, non pas la vitesse correspondant à la direction de propagation normale couchée dans le plan de la lame, mais la vitesse correspondant à la direction du *rayon* contenu dans ce plan, cette vitesse étant elle-même projetée sur le plan d'observation. M. W. Kohlrausch ne donne aucune raison théorique à l'appui de ce théorème qui ne peut être considéré que comme ayant une valeur empirique. Au reste, lorsqu'il s'agit des indices principaux, la difficulté ne se pose pas, puisqu'alors le rayon et la direction de propagation normale se confondent.

2. *Wiedem. Ann.* 4, P. 1 (1878).

verre dépoli, dans lequel est percée une fenêtre fermée par un verre plan bien transparent. Ce vase est rempli d'un liquide très réfringent qui peut être le sulfure de carbone ou la naphtaline monobromée. La lame cristalline, plongée dans le liquide, est fixée à l'extrémité d'une tige verticale qui tourne au centre d'un limbe divisé. Une alidade fixe à la tige mesure l'angle dont la tige a tourné. La lame est placée en regard de la fenêtre, sur laquelle est braquée à l'extérieur une lunette horizontale fixe, disposée pour la vue à l'infini.

On éclaire avec de la lumière monochromatique; la réflexion totale se produit sur la lame L et le rayon qui commence à éprouver cette réflexion tombe sur le croisement des fils; on fait une lecture dans cette position, puis on tourne la lame dans la position L′ de manière que le même phénomène ait lieu, la lumière incidente venant non plus de la droite, mais de la gauche. On fait une seconde lecture, et la différence avec la première est évidemment égale à 2φ.

Pour que l'appareil soit réglé, il faut que l'axe de la lunette soit perpendiculaire à l'axe de rotation, et que la lame soit parallèle à cet axe, et à peu près dans son prolongement. Afin de remplir la première condition, on vise à l'œil un objet éloigné placé dans le plan même du limbe, et on installe la lunette sur cet objet.

La lame est reliée à l'axe de rotation par une pince et l'on peut en modifier la position en suspendant la partie supérieure de cette pince par une disposition semblable à celle que nous avons indiquée à l'occasion de la mesure de l'angle des axes optiques.

Pour installer la lame, on juge à l'œil, comme on le fait pour les goniomètres ordinaires, que la lame est bien située dans le prolongement de l'axe. Pour faire en sorte que la lame soit parallèle à l'axe, il suffit de choisir un objet placé à une certaine distance à la même hauteur que la lame et à s'assurer qu'en faisant tourner l'axe, l'image de cet objet se meut dans un plan horizontal. Ces observations se font, bien entendu, avant que la lame soit plongée dans le liquide.

Quand la lame est cristalline, les indices que l'on mesure sont, comme nous l'avons vu, ceux des vibrations que propage la direction cristalline située dans le plan d'incidence, c'est-à-dire dans le réfractomètre de M. Kohlrausch, la direction horizontale. Il est donc très nécessaire de déterminer cette direction avec grand soin. A cet effet on peut fixer la lame sur un disque, mobile dans son plan, que l'on peut tourner à volonté et d'angles connus. La lame peut être fixée sur un bouchon, ou même collée sur une lame non réfléchissante.

Discussion des causes d'erreur dans la mesure des indices au moyen du réfractomètre de M. F. Kohlrausch. — L'exactitude de l'observation exige que la face cristalline soit parallèle à l'axe et que la ligne de visée de la lunette soit perpendiculaire à l'axe de rotation. On peut voir quelle est l'influence qu'exerce sur la mesure la non-réalisation de ces conditions.

Soit, sur la surface d'une sphère N (fig. 152), la trace de la normale à la face; au moment de la mesure, la ligne de visée vient se placer suivant une des génératrices du cône ayant pour axe la normale et pour génératrice une droite inclinée de φ sur cet axe. Soit V la trace de la ligne visée. Soit vn la trace du plan perpendiculaire à l'axe de rotation. Lorsque le réticule passe successivement en V et en N, la lame tourne d'un angle vn qui est la projection, par des arcs de grand cercle perpendiculaires Nn et Vv, sur le plan de rotation. L'angle mesuré est donc $vn = \varphi_1$. L'arc V$v = \delta$ est l'angle que fait l'axe de l'appareil avec le plan perpendiculaire à l'axe de rotation; l'arc N$n = \alpha$ est l'angle que fait la normale à la lame avec le même plan, ou celui que fait la lame avec l'axe de rotation.

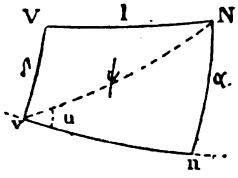


Fig. 152.

Menons l'arc auxiliaire N$v = \psi$, qui fait un angle u avec vn. Nous avons

$$\cos\psi = \cos I_1 \cos\alpha, \qquad \sin\psi = \frac{\sin\alpha}{\sin u}$$

$$\cos\varphi = \cos\delta\cos\psi + \sin\delta\sin\psi\sin u$$

et par conséquent

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1 \cos\alpha\cos\delta + \sin\delta\sin\alpha.$$

Traitant α et δ comme de petits angles, et négligeant les termes d'ordre supérieur au second, il vient

$$\cos\varphi = \cos\varphi_1\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\delta^2}{2}\right) + \alpha\delta$$

On a d'ailleurs

$$\cos\varphi - \cos\varphi_1 = 2\sin\frac{\varphi+\varphi_1}{2}\sin\frac{\varphi_1-\varphi}{2},$$

d'où l'on tire

$$\varphi_1 - \varphi = d\varphi = \operatorname{cotg}\varphi\left(\frac{\alpha^2+\delta^2}{2} - \frac{\alpha\delta}{\sin\varphi}\right).$$

Il faut maintenant voir quelle est l'influence de $d\varphi$ sur la détermination de n. On a

$$n = N \sin \varphi,$$

et par conséquent

$$\frac{dn}{n} = \operatorname{cotg} \varphi \, d\delta.$$

On aura donc en définitive

$$\frac{dn}{n} = \operatorname{cotg}^2 \varphi \left(\frac{\alpha^2 + \delta^2}{2} - \frac{\alpha\delta}{\sin \varphi} \right)$$

L'inclinaison γ de la ligne de visée sur le plan de rotation dépend de de deux quantités qui sont l'inclinaison β de l'axe de la lunette sur ce plan, et l'inclinaison δ sur l'axe de rotation, de la face plane du verre transparent qui ferme la fenêtre.

Soient PP′ (fig. 153) le plan de cette face, LL′ l'axe de la lunette.

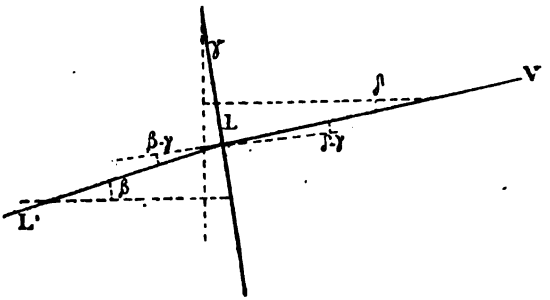


Fig. 153.

LV le rayon réfléchi par la lame, et suivant lequel on est censé faire la visée. On voit aisément sur la figure qu'on a

$$\frac{\sin(\beta - \gamma)}{\sin(\delta - \gamma)} = \frac{\beta - \gamma}{\delta - \gamma} = N$$

et par conséquent

$$\delta = \frac{\beta + \gamma(N - 1)}{N}.$$

L'influence isolée, sur le résultat, de chacune des quantités α, β, et γ est donc exprimée par les expressions

$$\frac{\alpha^2}{2} \operatorname{cotg}^2 \varphi, \quad \frac{1}{N^2} \frac{\beta^2}{2} \operatorname{cotg}^2 \varphi, \quad \frac{(N-1)^2}{N^2} \frac{\gamma^2}{2} \operatorname{cotg}^2 \varphi.$$

upposons, pour fixer les idées, $n = 1,5$, $N = 1,6$, et par conséquent $= 67°$. Pour que l'erreur sur n soit moindre qu'une unité décimale u 4e ordre, il faut au plus

$$\alpha = 1°,7 \qquad \beta = 2°,5 \qquad \gamma = 4°.$$

Reste encore à apprécier l'influence qu'une erreur d'observation sur I exerce sur la valeur de n. Nous avons déjà vu que

$$dn = N \cos I dI = \sqrt{N^2 - n^2}\, dI$$

Supposons $N = 1,63$, et $dI = 0,0017$ ou un dixième de degré ; les indices à mesurer sont compris entre 1,33 et 1,6, et les erreurs commises seront respectivement 0,0016 et 1,0005. Pour avoir la quatrième décimale de n, il suffit donc de pouvoir répondre de un centième de degré dans la lecture.

On voit que les erreurs commises sur la lecture ont, sur le résultat, moins d'influence que dans la méthode du prisme. Mais cet avantage est plus que compensé par la bien moindre netteté de la ligne qu'il s'agit de viser. Il ne paraît guère possible en somme, avec le réfractomètre de M. Kohlrausch, de compter sur la quatrième décimale.

Réfractomètre de M. Soret. — Pour observer la loi de variation de l'indice avec la longueur d'onde, M. Soret[1] a fait construire un réfractomètre spécial dans lequel la lumière qui tombe sur la lame pour y être réfléchie forme un faisceau parallèle de rayons solaires, fourni par un collimateur fixe. L'observation du commencement de la réflexion totale se fait avec une lunette qui est nécessairement mobile autour de l'axe de rotation. Lorsqu'on a amené, en agissant sur la lame et sur la lunette, le faisceau émergeant du collimateur à entrer, après réflexion, dans la lunette, il est commode de pouvoir tourner à la fois la lame et la lunette de manière que celle-ci ne cesse pas de recevoir le faisceau réfléchi. Pour obtenir ce résultat, une disposition spéciale fait tourner la lunette d'un angle double de celui dont tourne la lame.

Quant à la lunette, elle est à proprement parler un spectroscope à vision directe, et le faisceau réfléchi par la lame donne un spectre qui se forme dans le plan du réticule. Lorsque la réflexion totale se produit pour tous les rayons reçus par le spectroscope le spectre est très brillant. Si l'on diminue progressivement l'incidence, on voit, au moment

1. *Archives des sc. phys. et nat. de Genève* (3) IX, p. 1 (1883).

où la réflexion totale commence à cesser, un voile sombre s'avancer sur le spectre, et la ligne de séparation de ce voile vient successivement coïncider avec chacune des raies du spectre. Lorsque la coïncidence a lieu avec la raie D, préalablement amenée elle-même en coïncidence avec le réticule, l'angle I que l'on observe est celui qui correspond à la longueur d'onde de la raie D. On peut ainsi observer les indices de réfraction qui correspondent aux diverses raies du spectre.

Cas où la lame est placée entre la source lumineuse et l'observateur. — La lame cristalline étant plongée dans un milieu plus réfringent qu'elle, on peut placer la source de lumière, non plus du côté où se trouve la lunette, comme dans le réfractomètre de M. Kohlrausch, mais du côté opposé. La lumière doit ainsi traverser la lame pour arriver à la lunette.

Soit L (fig. 154) la lame; par un point quelconque M de la surface tournée vers la source lumineuse, décrivons un cône circulaire CMC', dont les génératrices fassent avec la normale MN l'angle d'incidence φ correspondant à la réflexion totale. Tous les rayons parallèles aux droites menées de M dans l'intérieur du cône pénètrent dans la lame et en ressortent suivant une direction parallèle à la direction d'incidence, si nous supposons les deux faces de la lame exactement parallèles entre elles. Tous les rayons situés en dehors de ce cône sont réfléchis totalement. Si donc par un point M' de la surface tournée vers l'observateur, nous menons un cône de même ouverture que le cône CMC', toutes les directions contenues dans l'intérieur de ce cône correspondent à un faisceau lumineux, tandis que toutes les directions extérieures ne correspondent à aucune propagation lumineuse.

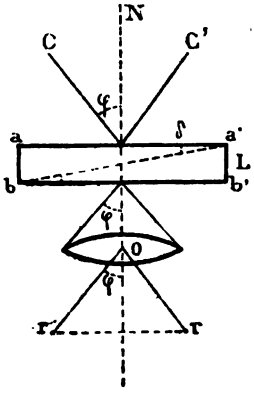


Fig. 154.

Si nous imaginons une lentille susceptible de recevoir toutes les directions de propagation lumineuse émanant de la lame et si, par le centre optique O de cette lentille, on mène un cône dont l'angle d'ouverture soit encore égal à φ, toutes les directions parallèles aux génératrices de ce cône iront former leur image sur un cercle rr dont le rayon sera égal à $f \sin \varphi$, si f est la distance focale de la lentille. L'intérieur de ce cercle sera lumineux, l'extérieur complètement obscur.

Il suffit de tourner la lame cristalline de manière à amener successi-
ement les points r, r en contact avec l'axe de la lentille marqué par
e croisement des fils d'un réticule pour mesurer l'angle 2φ comme avec
e réfractomètre de M. Kohlrausch. Il faut remarquer qu'avec ce dernier
ppareil l'extérieur du cône est plus sombre que l'intérieur, tandis
qu'ici c'est l'intérieur du cône qui est éclairé, l'extérieur étant complè-
ement obscur.

L'observation est très facile; elle peut se faire sans difficulté avec l'appareil à mesurer l'écartement des axes optiques, auquel on peut retrancher le polariseur et l'éclaireur, et dans lequel on utilise la cuve à huile pour la remplir de liquide réfringent.

Malheureusement l'observation ne peut être considérée comme exacte que lorsque l'épaisseur de la lame est très petite. En effet les génératrices du cône CMC′ correspondent à des rayons qui, dans l'intérieur du cristal, se propagent suivant la face d'incidence. Mais si nous menons la droite $a'b$ allant d'un bord de l'une des faces au bord opposé de l'autre aucun des rayons se propageant dans la lame suivant une direction faisant avec $a'a$ un angle moindre que $a'ab = \delta$, ne rencontre la face opposée et par conséquent ne sort de la lame. Le cône qui, à l'émergence, sépare des directions éclairées les directions obscures, a donc non pas l'angle φ mais l'angle $\varphi - \Delta$, si Δ est l'angle que fait avec la génératrice MC′ la direction qui donne dans la lame une direction réfractée parallèle à $a'b$.

Il est clair que l'angle δ et par conséquent l'angle Δ est d'autant plus petit que l'épaisseur de la lame est plus petite.

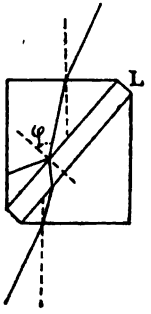


Fig. 155.

M. Quincke a indiqué un procédé analogue à celui que nous venons de décrire sommairement, mais d'un emploi qui paraît moins commode, quoiqu'il ne soit pas plus exact. Il consiste à placer la lame L (fig. 155) entre les hypotènuses de deux prismes rectangles. La lumière entre d'un côté et sort de l'autre après s'être réfléchie totalement sur la lame. On tourne l'ensemble devant une lunette et on observe le moment où la réfraction totale commence.

4. — EMPLOI DES FRANGES D'INTERFÉRENCE.

Emploi des franges d'interférence de Fresnel. — On sait que lorsque deux faisceaux lumineux sont dans les mêmes conditions que

s'ils provenaient de deux points lumineux voisins, et éclairés par la même lumière, ils interfèrent et donnent des franges dans la région voisine de la normale menée sur le milieu de la distance des deux points. On peut aux deux points substituer deux fentes parallèles très étroites éclairées par le soleil. On peut encore se contenter d'une seule fente éclairée par une lumière quelconque, pourvu que l'on en produise, par un appareil convenable, deux images très voisines qui pourront être considérées comme les deux sources de lumière interférant entre elles.

Les appareils connus pour produire ce résultat sont assez nombreux; nous citerons les deux miroirs de Fresnel, le biprisme du même observateur, et la bilentille de Billet dont l'emploi est très commode. Elle se compose d'une lentille convexe divisée en deux parties égales par un plan méridien. En éloignant les deux moitiés de la lentille d'une certaine quantité, les plans méridiens communs restent parallèles, la fente vient former au foyer conjugué deux images dont l'écartement augmente avec celui des deux lentilles.

On peut recevoir les franges sur un écran; on préfère les observer avec une loupe ou un microscope. Un réticule mobile placé au foyer de l'appareil optique permet de mesurer l'écartement des franges. Si l'on opère avec une lumière monochromatique de longueur d'onde λ, les franges lumineuses successives correspondent aux différences de *marche*

$$0,\ 2\frac{\lambda}{2},\quad 4\frac{\lambda}{2},\quad 6\frac{\lambda}{2},$$

et les franges obscures successives aux différences

$$\frac{\lambda}{2},\quad 3\frac{\lambda}{2},\quad 5\frac{\lambda}{2},\quad 7\frac{\lambda}{2}.$$

La distance de deux franges de même nom est égale à λ.

Si l'on interpose sur l'un des faisceaux une lame d'épaisseur e et d'indice n, elle équivaut, au point de vue de la durée de la propagation, à une lame d'air d'épaisseur en; l'un des faisceaux traverse donc une lame d'air d'épaisseur e, tandis que l'autre en traverse une autre d'épaisseur en, la différence de marche est $e(n-1)$; si l'on a

$$k\lambda = e(n-1),$$

après l'interposition de la lame chaque frange sera déplacée d'une

istance égale à k franges. Si l'on mesure préalablement au moyen du nicromètre l'espace qui sépare deux franges successives, le rapport, à cet espace, du déplacement d'une frange, donne le nombre k, d'où l'on déduit l'indice n si l'on connaît l'épaisseur e. On peut mesurer l'épaisseur e au moyen d'un sphéromètre.

Au lieu de mesurer le déplacement des franges produit par la lame, on peut l'annuler en interposant sur le passage de l'autre faisceau une autre lame d'épaisseur optique équivalente et connue. Le procédé le plus simple consiste à se servir d'une lame de verre à faces bien parallèles, fixée normalement sur l'axe horizontal d'un goniomètre et perpendiculaire à l'axe du faisceau lumineux. En inclinant la lame sur l'horizontale d'un angle variable que mesure le goniomètre, on en augmente l'épaisseur traversée jusqu'à ramener la frange centrale à sa première position.

Nous n'insisterons pas davantage sur ce genre d'observations dont on trouvera le détail dans tous les traités de physique, et qui est d'ailleurs très rarement employé à mesurer les indices des cristaux.

Emploi des franges de Talbot. — Supposons un spectroscope composé d'un collimateur C (fig. 156) dont la fente f est placée au foyer de la lentille L, d'un prisme P, et d'une lunette L. Si l'on place une lame réfringente sur la moitié du faisceau qui traverse l'appareil, soit en l

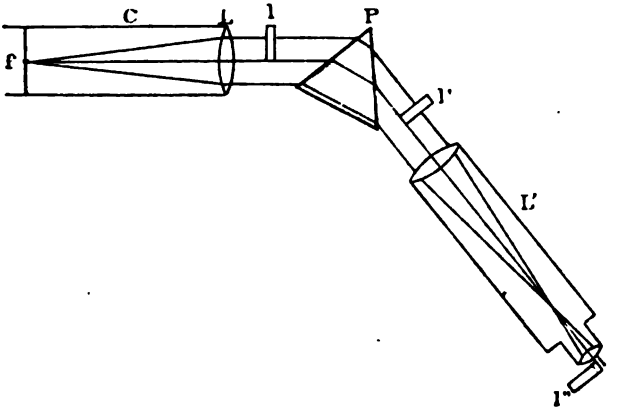


Fig. 156.

entre le collimateur et le prisme, soit en l' entre le prisme et la lunette, soit en l'' entre l'oculaire et l'œil, on voit le spectre de la fente sillonné par des bandes noires dues à l'interférence des deux moitiés des

faisceaux qui ont, au point de vue optique, parcouru des chemins inégaux. Toutefois ces bandes n'apparaissent que lorsque, comme dans la figure, la lame réfringente est placée sur celle des deux moitiés du faisceau qui traverse le prisme au voisinage de l'arête réfringente. Ces franges ont reçu le nom du physicien anglais Talbot qui les a signalées le premier.

La théorie complète du phénomène a été donnée par Airy[1]; M. Mascart[2] en a donné une théorie élémentaire que nous allons reproduire.

Il est utile, pour la netteté du phénomène, de donner à la largeur du faisceau une dimension convenable. On installe à cet effet, devant l'objectif, un diaphragme d'ouverture variable. Nous appellerons d cette ouverture, dont la moitié est recouverte par la lame réfringente, d'épaisseur e et d'indice n.

A la sortie du prisme, les rayons de longueur d'onde λ sont *tous dirigés* suivant une même direction et vont faire leur image en un certain point du plan focal de l'objectif. Nous supposons λ tellement *choisi* que le retard $(n-1)\,e$ subi par l'une des moitiés du faisceau soit égal à un nombre entier k de fois λ; le faisceau se comportera comme s'il n'y avait pas de lame réfringente, et viendra former, dans le plan focal, une image brillante de la fente en M (fig. 157). Mais, en vertu de la diffraction produite par le diaphragme, il se formera, de part et d'autre de M,

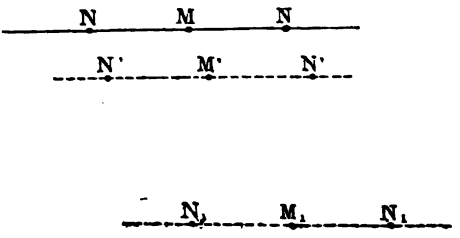


Fig. 157.

des images de la fente de plus en plus pâles, jusqu'à ce que, pour deux points N, N, placés symétriquement de part et d'autre de M, ces images soient minima.

Considérons maintenant une longueur d'onde λ' un peu plus grande que λ; le retard que produit la lame sera pour le faisceau *qui*

1 *Philosophical Transactions*, 1840 et 1841.
2. *Journal de physique*, t. I, p. 142 et suiv.

propage ces vibrations égal à $k'\lambda'$; k' n'étant plus entier et étant plus grand que k, puisque n a une plus grande valeur. Le faisceau qui propage les vibrations de longueur d'onde λ' n'émerge pas du prisme suivant la même direction que celui qui propage les vibrations λ; nous commençons par négliger cette différence. L'image brillante de la fente ne se produira pas cependant en B; elle sera déviée vers la droite, si la lame est placée à droite, car les franges de diffraction sont reportées du côté de la lame retardatrice, afin que les rayons les plus retardés aient moins de chemin à faire pour rencontrer l'image. Pour éviter la confusion, supposons que nous donnions à l'image du faisceau λ', à partir du plan NN, et suivant une normale à ce plan, une translation proportionnelle à la différence $k' - k$. L'image brillante de la fente se place en M', et de part et d'autre, en N', N', sont les points obscurs. En agissant ainsi pour les longueurs d'onde croissantes, nous rencontrerons une longueur d'onde λ_1, telle que l'image d'intensité minimum N_1 soit située à l'aplomb de M. Cela se produira lorsque l'on aura

$$(n-1)e = \left(k + \frac{1}{2}\right)\lambda_1.$$

Si donc on négligeait, comme nous l'avons fait, la dispersion produite par le prisme, toutes les images NN, N'N', N_1N_1 se superposant dans le plan focal produiraient un éclairement uniforme. Mais le prisme dévie chacune des couleurs, et les dévie du côté de la base du prisme. Si cette base est située à droite, c'est-à-dire du même côté que la lame, l'image restera confuse. Mais si elle est située à gauche, c'est-à-dire du côté opposé à la lame, on pourra faire que N_1 vienne se placer à l'aplomb de N, et on verra alors, dans le champ, des bandes noires alterner avec des bandes lumineuses.

Pour que le phénomène soit le plus net possible, il faut donc que N_1 se place à l'aplomb de N, c'est-à-dire, en d'autres termes, que les bandes noires produites par le retard dû à la lame viennent se superposer aux bandes obscures produites par la diffraction.

Si l'on appelle θ l'angle sous lequel NM est vu de l'objectif, et d la longueur du diaphragme, on a

$$\theta d = \lambda.$$

Il faut régler la largeur d pour que cette condition soit réalisée. On voit que d varie nécessairement avec λ.

Quant à θ qui entre dans cette formule, c'est la moitié de l'angle

sous-tendu par les franges d'interférence. Cet angle se déduit des formules suivantes.

Si l'on appelle λ_1 la longueur d'onde qui correspond à une frange noire d'interférence, on a

$$(n-1)e=(2k+1)\frac{\lambda}{2}$$

k étant un nombre entier. Mais cette frange est un peu déplacée dans le spectre, tandis que les franges lumineuses, qui correspondent à des retards d'un nombre entier de longueur d'onde, ne le sont pas.

Soient donc λ et λ' deux longueurs d'onde correspondant à deux franges maxima, nous aurons, m et m' étant deux nombres entiers

$$(n-1)e=m\lambda$$
$$(n'-1)e=m'\lambda'$$

n' étant l'indice de la lame pour la longueur λ'. Le nombre des bandes noires comprises entre les deux lignes du spectre correspondant à λ et λ' est représenté par $m-m'$, et l'on a

$$m-m'=e\left(\frac{n-1}{\lambda}-\frac{n'-1}{\lambda'}\right).$$

Si la lame est plongée dans un liquide dont les indices de réfraction correspondant à λ et λ' sont n_1 et n'_1, on a

$$m-m'=e\left(\frac{n-n_1}{\lambda}-\frac{n'-n'_1}{\lambda}\right).$$

Ces formules définissent la largeur qui sépare deux bandes noires et qui varie avec la région du spectre.

Si la lame retardatrice est oblique à la lumière incidente, le chemin accompli dans l'intérieur de la lame par les ondes planes normales à la propagation est $e\cos r$, tandis que les ondes planes qui se meuvent dans l'air parcourent le chemin $e\cos i$, le retard est donc

$$e(n\cos r-\cos i)$$

ou

$$e(n\cos r-n_1\cos r_1),$$

si la lame est plongée dans un liquide d'indice n_1. Le retard augmente et les bandes se resserrent lorsque i augmente; ou se sert de cette

particularité pour placer la lame bien exactement normale à la lumière incidente.

Après avoir mesuré l'épaisseur e, on compte le nombre des bandes comprises entre deux raies de longueurs d'onde λ et λ'; on détermine ainsi $m - m'$ et par conséquent $\frac{n-1}{\lambda} - \frac{n'-1}{\lambda'}$. Si λ et λ' sont suffisamment voisins, on pourra considérer n et n' comme identiques, ce qui donne n.

On peut encore faire tourner la lame d'un angle connu et compter le nombre p de bandes qui passent, pendant cette rotation, sur une raie correspondant à λ. Les deux équations

$$(n-1)\,e = m\lambda$$

$$(n\cos r - \cos i)\,e = (m+p)\lambda$$

donnent

$$(n\cos r - n + 1 - \cos i) = \frac{p\lambda}{e},$$

d'où l'on déduit la valeur de n_λ.

En plongeant la lame dans une cuve remplie de liquide à une température connue, on peut déterminer très exactement la différence entre les indices de la lame et du liquide correspondant à cette température. Si l'on a déterminé préalablement la loi de variation des indices du liquide avec la température, on pourra, en faisant varier la température du liquide, suivre la variation des indices de la lame.

M. Dufet[1] s'est servi de ce procédé pour étudier l'influence que la chaleur exerce sur la réfringence du gypse.

[1] *Bulletin de la Soc. minér.*, t. IV, p. 191 (1881).

CHAPITRE XIII

GÉNÉRALITÉS SUR LES CONSTANTES OPTIQUES DES CRISTAUX

On peut distinguer dans un cristal au point de vue optique :

1° La réfringence moyenne, mesurée par la moyenne des trois indices principaux. Nous donnerons à cette moyenne le nom d'*indice médian*, pour la distinguer de l'indice moyen qui est un des trois indices principaux;

2° La biréfringence, mesurée par les différences des indices principaux;

3° La dispersion, mesurée par l'écart qui existe entre les valeurs des indices principaux pour les diverses radiations.

Nous nous proposerons de passer successivement en revue les faits principaux, concernant ces trois propriétés différentes, que l'observation nous a fait connaître.

I. — RÉFRINGENCE DES SUBSTANCES ISOTROPES ET RÉFRINGENCE MOYENNE DES SUBSTANCES CRISTALLISÉES.

Grandeurs des indices de réfraction. — L'indice de réfraction des substances isotropes ou l'indice médian des substances cristallisées ne dépasse 2 que pour un petit nombre de corps solides, parmi lesquels nous citerons :

Cinabre	HgS	2.979	Li	
Proustite.	Ag^3AsS^3	2.9401	D	
Cuprite	Cu^2O	2.849	Li	
Rutile	TiO^2	2.759	D	
Greenockite.	CdS	2.688		Ind. ordinaire.
Anatase	TiO^2	2.524	D	
Crocoïse	$PbCrO^4$	2.421	D	Ind. moyen.
Diamant	C	2.414	ρ	

Blende.	ZnS	2.369	D
Wulfénite	$PbMoO^4$	2.353	ρ
Calomel	Hg^2Cl^2	2.28	ρ
Bromyrite	$AgBr$	2.253	D
Iodyrite	AgI	2.182	D
Phosgenite	$PbCO^3+PbCl^2$	2.123	Orangé
Sénarmontite.	Sb^2O^3	2.087	D
Soufre.	S	2.079	D

On voit que ces corps sont des composés de mercure, de plomb, d'argent; des oxydes, comme ceux d'antimoine, de titane, de cuivre; des sulfures comme ceux de cadmium et de zinc; enfin quelques corps simples très exceptionnels par toutes leurs propriétés, le diamant et le soufre.

Aucun des nombreux silicates que nous offre le règne minéral n'a un indice médian atteignant 2.

Le nombre des liquides dont l'indice atteint 2 est encore bien plus restreint que celui des solides. L'indice de l'eau à 15° est 1,331 D. (Dale et Gladst.)

Quant aux gaz, leur indice est toujours extrêmement faible. L'indice de l'air, à la pression de 760^{mm} et à la température de 0°, est 1,0001328 (Mascart).

Pouvoir réfringent. Énergie réfractive spécifique. Loi de Gladstone.— L'indice d'un corps varie en même temps que sa densité. Dans la théorie de l'émission, on expliquait le fait de la façon suivante. L'indice étant supposé proportionnel à la vitesse de la lumière, la quantité $n^2 - 1$ était proportionnelle à l'accroissement de force vive dû au passage du vide dans le corps. Cet accroissement était attribué à l'attraction des molécules matérielles du corps, attraction qui devait être elle-même proportionnelle à la quantité de matière contenue dans l'unité de volume. On en concluait que $n^2 - 1$ est proportionnel à la densité d du corps. Pour un corps donné, la quantité $\frac{n^2 - 1}{d}$, à laquelle on avait donné le nom de *pouvoir réfringent*, devait ainsi être constante.

Des expériences de Biot et Arago (1806), puis des expériences plus précises de Dulong, montrèrent qu'en effet, pour les gaz, $\frac{n^2 - 1}{d}$ est presque rigoureusement constant, quelle que soit d'ailleurs la cause,

variation de la température, ou variation du volume, qui fasse changer.

Mais l'indice n est si faible dans les gaz que si $\frac{n^2-1}{d}$ est constant, il en est de même de $\frac{n-1}{d}$.

Au temps de Biot et de Dulong, les connaissances sur les variations de n et de d, dans les corps solides ou liquides, étaient trop imparfaites pour qu'on pût songer à s'assurer si la constance de $\frac{n^2-1}{d}$ s'appliquait aussi aux liquides ou aux solides. M. Schrauf entreprit, bien plus tard, d'assez nombreux travaux pour montrer qu'il en est réellement ainsi. MM. Gladstone et Dale[1] proposèrent les premiers de substituer à la constance de $\frac{n^2-1}{d}$, celle de la quantité $\frac{n-1}{d}$; et des recherches multipliées, dues à divers observateurs, ont montré que si l'on ne peut regarder $\frac{n-1}{d}$ comme constant pour les liquides, sur lesquels ont porté le plus grand nombre des observations, cette quantité approche au moins d'être constante, et cela notablement plus que ne le fait le pouvoir réfringent $\frac{n^2-1}{d}$.

La quantité $\frac{n-1}{d}$ a reçu le nom d'*énergie réfractive spécifique*.

Signification physique de la loi de Gladstone. — La loi de Gladstone a été d'abord formulée comme simple loi empirique, mais on peut lui donner une signification physique très intéressante, et montrer qu'elle revient à admettre que l'éther lumineux enveloppant les molécules matérielles jouit des mêmes propriétés que l'éther lumineux du vide, et que les modifications apportées par la traversée d'un corps matériel dans la vitesse de propagation d'un rayon lumineux sont dues uniquement à l'influence que les atomes constituant la molécule exercent sur le rayon pendant le temps qu'il met à traverser cette molécule. En d'autres termes, la loi de Gladstone énonce qu'un corps matériel est formé de molécules réfringentes plongées dans un milieu non réfringent.

Soit en effet, sur le chemin de la propagation lumineuse, m la longueur occupée par les molécules, $(1-m)$ la longueur occupée par l'éther libre. Si 1 et v sont les temps employés par la lumière à traverser

1. *Phil. Trans.* 1883.

respectivement l'unité de longueur de l'éther et celle de la molécule, le temps employé par la lumière à traverser l'unité de longueur du corps, c'est-à-dire l'indice n de ce corps, est donné par l'équation

$$n = m\nu + (1 - m),$$

d'où l'on tire

$$n - 1 = (\nu - 1)m.$$

La longueur m varie avec chacune des lignes parallèles qu'on peut mener à travers le corps, et la moyenne de toutes ces valeurs est évidemment proportionnelle au volume que la molécule occupe dans l'unité de volume du corps; ce volume est lui-même proportionnel à son poids, lequel n'est autre que celui de l'unité de volume du corps. La moyenne des valeurs de m est donc proportionnelle à la densité d, et l'on a

$$\frac{n-1}{d} = k(\nu - 1).$$

Le coefficient k est constant; si l'on admet que ν est constant, c'est-à-dire que la molécule a toujours les mêmes propriétés réfringentes, on conclura de cette égalité que $\frac{n-1}{d}$ est constant, ce qui est l'énoncé même de la loi de Gladstone.

On suppose, dans cette démonstration, que les propriétés réfringentes de la molécule restent les mêmes, malgré la variation de la densité. Une modification moléculaire, du genre de celles, par exemple, qui font varier la chaleur spécifique des gaz avec la température, peut évidemment changer le pouvoir réfringent de la molécule et troubler l'exactitude de la loi de Gladstone.

Loi de Landolt. — M. Landolt[1] a pensé qu'au lieu d'admettre la constance du quotient $\frac{n-1}{d}$, il serait préférable d'admettre celle de $\frac{A-1}{d}$, A étant le terme indépendant de λ dans la formule de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \ldots.$$

M. Wüllner[2], et plus récemment M. B. C. Damien[3], ont cherché à

1. *Pogg. Ann.* 123 (1864).
2. *Pogg. Ann.* 133 (1868).
3. *Journ. Phys.* 10 (1881) p. 394.

montrer que $\frac{A-1}{d}$ s'approche notablement plus de la constance que ne le fait $\frac{n-1}{d}$. Il faudrait en conclure que les modifications intramoléculaires produites par les variations de la température ont une influence plus marquée sur les termes d'où dépend la dispersion.

Toutefois la différence n'est pas très considérable et, quoiqu'elle donne peut-être une moindre approximation, on peut ordinairement employer la formule, d'ailleurs beaucoup plus commode, qui suppose la constance de $\frac{n-1}{d}$.

Vérification de la loi de Gladstone lorsque la pression varie seule. — On peut vérifier l'exactitude de la loi de Gladstone en se servant de deux ordres de phénomènes très différents, c'est-à-dire en faisant varier la densité du corps, soit par la pression, soit par la chaleur. Nous nous occuperons d'abord du cas où la pression seule varie.

Pour les gaz, lorsqu'on fait varier la pression en laissant la température constante, la loi de Gladstone paraît être presque rigoureusement exacte. C'est ce que l'on peut déduire des observations de Biot et Arago, de celles de Dulong, et plus récemment de celles de M. Ketteler, qui a fait varier la pression jusqu'au delà de deux atmosphères.

M. Jamin a étudié par la méthode des interférences, les variations d'indice de l'eau comprimée, et il a déduit de ces observations que $\frac{n^2-1}{d}$ reste sensiblement constant; mais, dans la limite des expériences, on peut substituer sans erreur sensible $\frac{n-1}{d}$ à $\frac{n^2-1}{d}$, et conclure de la constance d'une des quantités à celle de l'autre.

Les expériences de M. Jamin ont été reprises récemment par M. G. Quincke[1] et étendues à un certain nombre de liquides. Dans le tableau suivant, on trouvera à côté de la compressibilité μ observée (c'est-à-dire la variation de volume pour une pression de 1 atmosphère), la compressibilité μ_a que l'on déduirait de la constance de $\frac{n-1}{d}$, et la compressibilité μ_b qui serait déduite de la constance de $\frac{n^2-1}{d}$. On pourra ainsi constater que μ_b s'éloigne généralement plus de μ que ne le fait μ_a.

1. *Wiedem. Ann.* 19-401 (1883).

	TEMPÉRAT.	INDICES	COMPRESSIBILITÉ		
			OBSERVÉE $\mu \times 10^6$	DÉDUITE DE LA CONSTANCE DE $\frac{n-1}{d}$ $\mu_a \times 10^6$	DÉDUITE DE LA CONSTANCE DE $\frac{n^2-1}{d}$ $\mu_b \times 10^6$
Glycérine	20°.53	1.4689	25.09	22.81	27.14
Huile de navet	20.3	1.4753	59.61	57.30	68.30
Huile d'amande	17.0	1.4720	55.19	56.67	67.46
Huile d'olive	20.5	1.4690	63.32	58.34	69.42
Eau	20.42	1.3330	46.14	46.04	52.60
Sulfure de carbone	15.0	1.6710	62.62	64.88	81.17
Essence de térébenthine	19.7	1.4712	79.14	77.76	92.56
Pétrole	19.4	1.4484	74.58	74.96	88.72
Alcool	20.18	1.3616	101.41	100.2	115.4
Éther	18.0	1.3537	142.65	144.3	166.6

Vérification de la loi de Gladstone lorsque la température varie seule. — Lorsque d et n varient sous l'influence de la chaleur, on peut mettre $n-1$ sous la forme $(n_0-1)(1-at)$, n_0 étant l'indice à 0°, et a un certain coefficient qui exprimera la variation relative de n_0-1 pour 1°. D'un autre côté, on a $d=d_0(1-\alpha t)$, α étant le coefficient de dilatation cubique, lorsque t n'est pas très considérable. L'expression $\frac{n-1}{d}$ peut donc se mettre sous la forme

$$\frac{(n_0-1)(1-at)}{d_0(1-\alpha t)},$$

ou sensiblement

$$\frac{n_0-1}{d_0}[1-(a-\alpha)t].$$

La constance de cette expression ne peut avoir lieu que si l'on a $a=\alpha$.

M. Mascart[1] a trouvé, pour différents gaz, avec des variations de température ne dépassant pas 40°, les résultats suivants :

1. *C. R.* 78, p. 617 (1874).

	$1000(n-1)$	$a \times 10^6$	$\alpha \times 10^6$	$(a-\alpha)10^6$	$\frac{a-\alpha}{\alpha}$
Hydrogène	0.1388	3810	3661	149	0.041
Air	0.2923	3830	3670	160	0.044
Azote	0.2972	3820	3668	152	0.041
Protoxyde d'azote .	0.5084	3880	3676	204	0.055
Bioxyde d'azote . .	0.2967	3670	»	»	»
Oxyde de carbone .	0.3336	3670	3667	3	0.00065
Acide carbonique .	0.4494	4060	3688	372	0.101
Acide sulfureux. .	0.6820	4710	3845	865	0.224

Ces nombres montrent que, pour les gaz simples ainsi que pour ceux formés sans condensation, a est très peu différent de α, et par conséquent l'énergie réfractive est très sensiblement constante. Pour les gaz formés avec condensation et qui s'écartent assez sensiblement de la loi de Mariotte (CO^2,SO^2), l'écart est notablement plus considérable. On sait d'ailleurs[1] que pour ces derniers gaz la chaleur spécifique à volume constant s'accroît assez rapidement avec la température, ce qui accuse probablement une variation notable dans le groupement moléculaire. Il est donc assez naturel de penser que la loi de Gladstone s'appliquerait rigoureusement si l'on pouvait éliminer l'influence de ces modifications intramoléculaires.

Pour les liquides nous citerons quelques-uns des chiffres donnés par M. Wüllner[2].

	INDICE	$a \times 10^6$	$\alpha \times 10^6$	$(a-\alpha)10^6$	$\frac{a-\alpha}{\alpha}$	
Glycérine	1.45318 C.	585	510	75	0.147	Entre 16° et 35°.
	1.46087 F.	577		67	0.131	
	1 46506 G'.	574		64	0.125	
Eau.	1.33314 C.	297	240	57	0.238	Entre 12° et 36°.
	1.33910 F.	291		51	0.212	
	1.34229 G'.	290		50	0.208	
Alcool.	1.36843 C.	1057	1052	+ 5	0.005	Entre 15° et 25°.
	1.37460 F.	1046		— 6	— 0.006	
	1.37816 G'.	1045		— 7	— 0.007	
Diss. sat. de $ZnCl^2$.	1.50926 C.	566	586	— 20	— 0.034	Entre 19° et 41°.
	1.52126 F.	557		— 29	— 0.040	
	1.52817 G'.	551		— 35	— 0.060	
Sulf. de carbone.	1.63407 C.	1230	1164	66	0.056	Entre 0° et 25°.
	1.66908 F.	1225		61	0.052	
	1.69215 G'.	1227		63	0.054	

1. Mallard et Le Châtelier. *Comptes rendus*, 93, p. 1004 (1881).
2. *Pogg. Ann.* 133, p. 1 (1868).

On voit que $a - \alpha$ est toujours très petit, et même plus petit encore que pour les gaz. Mais le rapport $\frac{a-\alpha}{\alpha}$ est en général plus grand parce que α est beaucoup plus petit. Les variations de $a - \alpha$, que l'on peut toujours supposer produites par les modifications intramoléculaires dues à la variation de température, sont alors presque du même ordre que la variation de volume α.

Pour les corps solides, les expériences sont beaucoup moins nombreuses et moins précises que pour les gaz et les liquides. Voici quelques nombres observés par divers auteurs.

	INDICE	$a \times 10^6$	$\alpha \times 10^6$	$(a-\alpha)10^6$	$\frac{a-\alpha}{\alpha}$	OBSERVATEURS
Verre Saint-Gobain . . .	1.5033 D	— 3.2	25.8	29.0	1.14	Fizeau.
Crown à base de zinc (Maës).	1.5204 D	0	25.5	25.5	1.00	Id.
Flint ordinaire	1.6112 D	— 3.4	24.3	27.7	1.14	Id.
— lourd	1.682 D	—10.1	19.8	29.9	1.51	Id.
Calcite $CCaO^3$	1.54385 D	— 7.3	15.4	22.7	1.47	Id.
Aragonite $CCaO^3$.	1.64015 F	18.9	?	»		Rudberg.
Sel gemme (NaCl). . . .	1.543 D	68.7	40.0 Fiz.	— 28.7	— 0.72	Stefan.
Sylvite (KCl)	1.482 D	71.6	38.0 Fiz.	— 32.8	— 0.86	Id.
Fluorine ($CaFl^2$).	1.435 D	31.3	63	31.7	0.50	Fizeau.
Quartz.	1.5503 D	10.6	36.2	25.6	0.71	Id.
Gypse $CaSO^4 + 2aq$. . . .	1.5243 D	52.9	72.5	19.6	0.27	Dufet
Anglésite (sulf. de plomb).	1.8770 C	28	21.9 Fiz.	6.1	0.28	Arzruni.
	1.8843 D	27.9		6.0	0.27	Entre 20°
	1.9051 F	26.4		4.5	0.20	et 100°.
Célestine (sulf. de stront.).	1.6231 C	19.9	17.5 Fiz.	2.4	0.14	
	1.6252 D	13.4		— 4.1	— 0.23	Id.
	1.6315 F	20.5		3.0	0.17	
Barytine (sulf. de baryte).	1.6378 C	27.4	18.1 Fiz.	9.3	0.51	
	1.6404 D	24.4		6.3	0.35	Id.
	1.6469 F	26.3		8.2	0.45	

On voit d'abord que les substances vitreuses, non cristallisées, sont anomales, puisque l'indice croît avec la température. La même anomalie a lieu pour la calcite, mais ne se présente pas pour l'autre forme cristalline du carbonate de chaux, l'aragonite. Il faut remarquer que lorsque a change ainsi de signe, il reste toujours très petit.

La différence $a - \alpha$ est toujours très petite, mais α étant encore plus

petit que pour les liquides, le rapport $\frac{a-\alpha}{\alpha}$ peut prendre une assez grande valeur.

En résumé, il paraît résulter de toutes les observations que α et a peuvent être représentées par des expressions de la forme

$$\alpha = A + m \qquad a = A + m'$$

m et m' étant des quantités dépendant des modifications plus ou moins profondes que la chaleur apporte dans les propriétés de la molécule, et A dépendant des variations que la chaleur apporte dans la position mutuelle des molécules. Les quantités m et m' sont toujours petites d'une manière absolue : dans les gaz, elles sont petites par rapport à A, mais il n'en est pas nécessairement ainsi pour les liquides et les solides.

Il suit de là que l'on a

$$a - \alpha = m' - m.$$

La quantité $m' - m$ ne dépend que des variations qui se produisent dans les propriétés de la molécule ; elle est toujours petite et peut d'ailleurs être positive ou négative.

Énergie réfractive spécifique d'un mélange. — Puisque l'énergie réfractive spécifique ne dépend (réserve faite des perturbations intramoléculaires) que de la nature et des propriétés de la molécule, nous sommes amenés à conclure que l'énergie réfractive spécifique d'un mélange doit être la moyenne arithmétique des énergies spécifiques des corps mélangés. Si p, p',... sont les poids, n, n',... les indices de réfraction, d, d',... les densités de chacun des corps mélangés contenus dans le poids 1 du mélange ; N l'indice de réfraction du mélange et D sa densité, on doit avoir

$$p\frac{n-1}{d} + p'\frac{n'-1}{d'} + \cdots = \frac{N-1}{D}.$$

Cette formule se vérifie en effet assez rigoureusement pour les mélanges gazeux et pour les mélanges des liquides entre eux ; elle se vérifie même pour les mélanges (par dissolution) des liquides et des solides, et enfin pour les mélanges des solides entre eux, soit par la fusion, soit par la réunion de molécules de plusieurs natures dans un même édifice cristallin.

Mélanges liquides. — Quelques nombres tirés du mémoire déjà cité de M. Wüllner montreront quel est, pour les mélanges liquides, le

degré d'exactitude de la loi. Ces nombres se rapportent non pas à l'indice n, mais au 1er terme A, indépendant de λ, de la formule de Cauchy, $n = A + \frac{B}{\lambda^2}$.

	A		DIFFÉRENCES $\times 10^5$
	OBSERVÉ	CALCULÉ	
1 eau, 3.7 glycérine	1.41272	1.41333	— 61
1 — 1 —	1.37801	1.37819	— 18
1 — 0.5 —	1.35887	1.35907	— 20
1 alcool, 4 glycérine	1.42750	1.42749	+ 1
1 — 2 —	1.41337	1.41301	+ 36
1 — 0.998 —	1.39674	1.39659	+ 15
1 — 0.4998 —	1.38321	1.38371	— 50
1 eau, 3.997 dissol. satur. de $ZnCl^2$	1.44262	1.44297	— 35
1 — 1.996 — —	1.41675	1.41559	+ 116
1 — 0 9998 — —	1.38961	1.38887	+ 74
1 alcool, 3.955 sulfure de carbone. .	1.51350	1.51597	— 247
1 — 2.2183 — — . .	1.47917	1.48245	— 328
1 — 1.0311 — — . .	1.43829	1.44127	— 298

Les différences les plus sensibles se rencontrent pour les mélanges d'alcool et de sulfure de carbone. Il est très vraisemblable que l'on doit encore attribuer ces différences, en somme assez peu considérables, à une perturbation intramoléculaire produite par l'acte même de la dissolution.

Il faut remarquer que si, au lieu de comparer les A entre eux, on comparait simplement les indices n pour une même longueur d'onde, les conséquences seraient sensiblement les mêmes.

Mélanges solides. — De semblables mélanges peuvent se faire, soit par la fusion, soit par la cristallisation simultanée dans le même édifice cristallin. Ce dernier cas, sur lequel nous reviendrons avec détail lorsque nous parlerons de l'isomorphisme, est celui sur lequel on possède le plus grand nombre de données. Nous citerons seulement les observations de M. Fock[1] faites au moyen du réfractomètre de Kohlrausch, sur les mélanges isomorphes d'hyposulfates de plomb et de strontiane.

1. *Groth. Zeits.* 4-594 (1880).

SrS^2O^6,4aq.	PbS^2O^6,4aq.	INDICE MÉDIAN POUR LA RAIE D		DIFFÉRENCES $\times 10^4$
		OBSERVÉ	CALCULÉ	
100 molécul.	0 molécul.	1.5274	»	
85.9 »	14.1 »	1.5441	1.5437	+ 4
69.0 »	21.0 »	1.5519	1.5529	— 10
55.0 »	45 »	1.5798	1.5794	+ 4
21.8 »	78.2 »	1.6179	1.6176	+ 3
0 »	100 »	1.6441		

Les différences sont de l'ordre des erreurs d'observation.

Énergie réfractive spécifique d'un même corps sous différents états. — Lorsqu'un corps change d'état, et passe par exemple de l'état solide à l'état liquide, ou de l'état liquide à l'état gazeux, on peut supposer que les molécules restent identiques à elles-mêmes, et que leur disposition relative dans l'espace ainsi que leur mode de cohésion sont seuls modifiés. S'il en est ainsi, l'énergie réfractive spécifique ne doit pas varier notablement d'un état à un autre. Les variations paraissent en effet assez faibles, si l'on s'en rapporte aux quelques exemples que l'on peut citer.

Eau à l'état gazeux.	$\frac{n-1}{d}$	= 0.324
— liquide.		0.332
— de glace		0.337

La différence entre l'état gazeux et l'état solide n'est que de 1/30.

Silice à l'état de quarz cristallisé. . . .	0.206	(rouge)
— fondu	0.197 à 0.201	
Phosphore solide à 37°,5[1].	0.5985	C
— liquide —	0.5982	C

Les corps peuvent éprouver, sans changer d'état physique, des modifications isomériques qui paraissent atteindre la structure moléculaire elle-même. On peut se demander si, sous ces différents états, l'énergie réfractive spécifique reste la même. Les exemples suivants montrent que la différence, en tous cas assez faible, ne peut pas être considérée comme nulle.

1. Damien. *J. Phys.* 10 (1881).

$C^3H^6O^2$ . .	Acide propionique . . . . . $\frac{n-1}{d}$	= 0.3860	C (Landolt).
	Acétate de méthyle.	0.3967	—
	Formiate d'éthyle	0.3944	—
$C^4H^8O^2$ . .	Acide butyrique	0.4116	—
	Acétate d'éthyle	0.4110	—
$C^6H^{12}O^2$. .	Acide caproïque	0.4449	—
	Valérate de méthyle	0.4458	—
	Butyrate d'éthyle	0.4424	—
	Formiate d'amyle	0.4491	—
TiO^2 . . .	Rutile	0.411	D
	Anatase	0.393	D

Mélange d'un liquide et d'un solide par voie de dissolution. — D'après ce qui précède, lorsqu'un corps solide est amené à l'état liquide par voie de dissolution, son énergie réfractive spécifique ne doit pas varier, et l'énergie réfractive spécifique de la dissolution peut être calculée par la loi des mélanges, si l'on connaît les énergies du dissolvant et du solide dissous. Réciproquement, si l'on mesure l'énergie de la dissolution et celle du dissolvant, on en déduira celle du corps dissous qui devra être identique à celle que l'on observe directement sur le corps à l'état solide. Voici quelques exemples qui montreront que l'exactitude de cette conséquence est seulement approchée.

	ÉNERGIES RÉFRACTIVES SPÉCIFIQUES	
	A L'ÉTAT SOLIDE	DÉDUITES DE CELLE DE LA DISSOLUTION
NaCl	0.2530 D (Haagen).	0.2671 D (W. Schmidt).
KCl	0.2432 B (Stefan).	0.2536 ρ (Kremers).
KBr	0.2062 C (Topsoë).	0.2169 (Kremers).
KI	0.2155 C (Topsoë).	0.2152 (Kremers).
$KAzO^3$	0.2151 D (Schrauf).	0.2181 D (W. Schmidt).

Les différences ne dépassent guère $\frac{1}{20}$ de la valeur. Toutefois il ne semble pas que ces différences puissent être mises sur le compte des erreurs d'observation, et il paraît nécessaire d'admettre que les molécules du sel, en se dissolvant, subissent une modification moléculaire plus ou moins considérable.

L'exemple de l'azotate de potasse est intéressant. Ce sel est isomorphe de l'aragonite et a une biréfringence très élevée, presque égale à celle de ce minéral. Les 3 indices principaux sont en effet 1,5064, 1,5056, 1,3346 (Schrauf). L'indice médian est 1,4488. Or on voit que l'énergie réfractive déduite de cet indice médian est bien celle qui persiste dans la dissolution. Les propriétés biréfringentes de la molécule persistent donc dans la dissolution, mais elles se compensent par l'orientation des molécules dans toutes les directions, de manière à produire le même effet que celui qui serait produit par une molécule uniréfringente douée de l'indice médian.

Énergie réfractive spécifique des combinaisons. — Après avoir constaté que l'énergie réfractive spécifique d'un mélange est à peu près la moyenne arithmétique des énergies des corps mélangés, on peut se demander s'il n'en serait pas encore de même lorsqu'au lieu d'un simple mélange, il y aurait combinaison des corps entre eux.

Si la loi de Gladstone pouvait encore s'appliquer dans ce cas extrême, on devrait en conclure que les propriétés réfringentes d'une molécule résultent en quelque sorte de la somme des propriétés réfringentes de chaque atome.

On pourrait donner à la loi de Gladstone ainsi étendue une forme très simple. Si l'on multiplie l'énergie réfractive spécifique d'un corps quelconque par son poids moléculaire, on aura ce que nous appellerons *l'énergie réfractive moléculaire*. Si deux corps, Cl et H par exemple, dont les énergies de réfraction moléculaire sont respectivement E_{cl} et E_{H} se combinent entre eux pour former un composé ayant ClH pour molécule, l'énergie réfractive moléculaire du composé serait $E_{cl} + E_{H}$. En d'autres termes, l'énergie spécifique moléculaire d'un composé serait la somme des énergies spécifiques moléculaires des atomes composants.

Cette loi serait très analogue à celle qu'a émise M. Wœstin et d'après laquelle la chaleur spécifique moléculaire d'un composé serait égale à la somme des chaleurs spécifiques atomiques des composés.

Ces deux lois paraissent l'une et l'autre s'appliquer approximativement dans un assez grand nombre de cas, mais être tout à fait en défaut dans d'autres. On pourra en juger, pour ce qui concerne les énergies réfractives, par le tableau suivant, se rapportant à des substances qui, presque toutes, se présentent à l'état gazeux.

	$1000(n-1)$	POIDS DU LITRE EN GRAMMES	POIDS MOLÉC. P	$P\frac{n-1}{d}$ OBSERVÉ	$P\frac{n-1}{d}$ CALCULÉ
	—	—	—	—	—
H	0.1388	0.0896	1	1.55	«
O.	0.272	1.430	16	3.04	«
Az	0.297	1.256	14	3.31	«
Cl	2.476	3.18	35.5	8.62	«
S(cristaux).	«	«	32	16.6	«
C (diamant)	«	«	12	4.86	«
CO	0.334	1.254	28	7.59	7.90
CO^2. . . .	0.449	1.977	44	9.99	10.94
H^2O. . . .	0.261	0.806	18	5.83	6.14
AzO. . . .	0.508	1.971	30	7.65	6.35
AzO^2 . . .	0.297	1.343	46	10.38	9.39
ClH. . . .	0.449	1.635	36.5	10.02	10.17
SO^2. . . .	0.665	2.87	64	14.83	22.70
SH	0.644	1.523	33	13.96	18.10
AzH^3 . . .	0.385	0.761	17	8.60	7.96
C^2AzH. . .	0.451	1.210	39	14.52	13.96
CH^4. . . .	0.443	0.716	16	9.91	10.75
C^2Az . . .	0.820	2.330	38	13.38	13.03

Si les différences, entre le calcul et l'observation, ne sont pas très considérables pour la plupart des gaz composés, il en est autrement pour les composés formés par le soufre. On ne rétablirait pas l'accord en changeant l'énergie réfractive moléculaire de S, car, en partant de SO^2, on trouverait cette énergie réfractive moléculaire égale à 8,75, tandis qu'on la trouverait égale à 12,41 en partant de SH. Il est donc bien certain qu'un même atome n'a pas dans tous les composés la même énergie réfractive moléculaire.

Mais, dans les composés homologues, qui ne diffèrent entre eux que par la substitution à un atome d'un autre atome ou d'un groupe équivalent d'atomes, chaque atome ou groupe d'atomes entre avec une énergie réfractive qui est sensiblement constante. Pour le démontrer, nous ne citerons que quelques exemples.

On trouve dans le tableau suivant les pouvoirs réfringents moléculaires d'un certain nombre de chlorures et de bromures, déterminés par Kremers, d'après les indices des dissolutions.

	Cl	DIFFÉR.	Br	DIFFÉR.	I	
Na.	15.7	6.3	22.0	10.2	32.2	
DIFFÉRENCES. . . .	3.2		3.9		3.5	3.5 moy.
K	18.9	7.0	26.9	9.8	35.7	
DIFFÉRENCES. . . .	3.0		3.7			3.3 moy.
½ Ca	15.9	6.3	22.2			
DIFFÉRENCES. . . .	1.6		1.3			1.4 moy.
½ St.	17.5	6.0	23.5			
DIFFÉRENCES. . . .	2.1		3.1			2.6 moy.
½ Ba	19.6	7.0	26.6	10.4	37.0	
		6.5 moyenne.		10.1 moyenne.		

On voit, en examinant ce tableau avec attention, que

1° Le remplacement de Cl par Br augmente l'énergie mol. de 6.5 *en moy.*
2° — Br — I — — 10.1 —
3° — Na — K — 3.5 —
4° — K — $\frac{1}{2}$ Ca diminue — 3.3 —
5° — $\frac{1}{2}$ Ca — $\frac{1}{2}$ St augmente — 1.4 —
6° — $\frac{1}{2}$ St — $\frac{1}{2}$ Ba — — 2.6 —

On peut étendre la même comparaison aux sulfates, aux azotates et aux carbonates; c'est l'objet du tableau qui suit.

	Cl	DIFF.	$\frac{1}{2}SO^4$	DIFF.	AzO^5	DIFF.	$\frac{1}{2}CO^3$	
AzH^4.	22.5	2.1	20.4		»		»	
DIFFÉRENCES. . .	4.5		4.2					4.3 moy.
K.	18.0	1.8	16.2	5.5	21.7		»	
DIFFÉRENCES. . .	3.3		3.7		2.7			3.2 moy.
Na.	14.7	2.2	12.5	6.5	19.0		»	
DIFFÉRENCES. . .	4.9		4.1		4.1			4.4 moy.
$\frac{1}{2}$Ba	19.6	3.0	16.6	7.5	23.1		»	
DIFFÉRENCES. . .	2.1		1.2		1 7			1.7 moy.
$\frac{1}{2}$St	17.5	2.1	15.4	6.0	21.4		»	
DIFFÉRENCES. . .			5.8		7.3			6.6 moy.
$\frac{1}{2}$Pb.	»		21.2	7.5	28.7	8.7	20.0	
DIFFÉRENCES. . .			8.3				9.8	9.1 moy.
$\frac{1}{2}$Ca	15.9	3.0	13.3		»		10.2	
DIFFÉRENCES. . .			2.1				2.3	2.2 moy.
$\frac{1}{2}$Ag.	»		10.8		»		7.9	
DIFFÉRENCES. . .			2.0					2.6 moy.
$\frac{1}{2}$Zn.	15.9	2.5	13.4		»		»	
		2.4 moyen.		6.6 moyen.		8.7 moyen.		

Applications de la loi de Gladstone étendue aux combinaisons. — On peut tirer parti de la loi de Gladstone étendue aux combinaisons pour calculer, au moins approximativement, l'indice médian d'une substance dont on connaît la composition et la densité. On peut ensuite se servir de cet indice approché pour calculer l'angle vrai des axes optiques lorsqu'on a observé l'angle apparent.

Supposons par exemple qu'on veuille calculer l'énergie réfractive d'un silicate de composition connue, on se servira de la table suivante qui comprend les poids atomiques et les énergies réfractives, spécifiques et moléculaires, d'un certain nombre d'oxydes.

	POIDS MOLÉCULAIRE	ÉNERGIES RÉFRACTIVES MOLÉCULAIRE	ÉNERGIES RÉFRACTIVES SPÉCIFIQUE
SiO^2.	60.0	12.4	0.206 tirée du quartz.
CaO.	56.0	13.0 [1]	0.232
MgO.	40.0	7.1	0.177 du péridot.
BaO.	153.2	18.7	0.122
StO	103.5	16.5	0.159
FeO.	72.0	13.5	0.186
GlO	29.9	7.1	0.238
ZnO.	81.0	12.5	0.154
Na^2O	62.1	12.5	0.201
K^2O.	94.2	19.1	0.203
Li^2O.	30.0	10.5	0.335
H^2O.	18.0	6.0	0.333 de l'eau.
Al^2O^3	103.0	19.6	0.191 du corindon.
Fe^2O^3	160.0	29.7	0.186
B^2O^3.	70.0	16.7	0.238

Ces nombres permettent de calculer avec une assez grande approximation l'énergie réfractive d'un silicate quelconque comme le montrent les exemples rapportés dans le tableau suivant :

	ÉNERGIE SPÉCIFIQUE OBSERVÉE	ÉNERGIE SPÉCIFIQUE CALCULÉE
Diopside ($2SiO^2,MgO,CaO$).	0.207	0.208
Trémolite ($4SiO^2,3MgO,CaO$)	0.207	0.202
Phénakite ($SiO^2,2GlO$).	0.221	0.222
Méionite ($9SiO^2,4Al^2O^3,6RO$).	0.204	0.204
Orthose adulaire ($6SiO^2,Al^2O^3,K^2O$). .	0.204	0.203
Amphigène ($4SiO^2.Al^2O^3,K^2O$)	0.204	0.202
Néphéline ($9SiO^2,4Al^2O^3,4Na^2O$). . .	0.207	0.201
Axinite ($21SiO^2,3Al^2O^3,2B^2O^3,10CaO$) .	0.207	0.205
Disthène (SiO^2,Al^2O^3)	0.198	0.196
Émeraude ($6SiO^2,Al^2O^3,3GlO$)	0.219	0.219
Euclase ($2SiO^2,Al^2O^3,GlO + H^2O$). . .	0.213	0.212
Calamine ($SiO^2,2ZnO,H^2O$)	0.182	0.181
Apophyllite [$3SiO^2 2(CaO,K^2O) + 4aq$] .	0.224	0.229
Harmotome ($6SiO^2,Al^2O^3,BaO,6aq$) . .	0.206	0.207
Mésotype ($3SiO^2Al^2O^3Na^2O + 2aq$) . .	0.219	0.214

1. Toutes les énergies moléculaires dont l'origine n'est pas indiquée ont été prises dans la table de Gladstone. *Phil. Mag.* (4) 30, p. 232 (1870).

II. — BIRÉFRINGENCE.

1° SYMBOLES USITÉS POUR REPRÉSENTER L'ORIENTATION DE L'ELLIPSOÏDE OPTIQUE.

Symboles désignant les constantes de la double réfraction. — La biréfringence des cristaux est complètement connue lorsqu'on connaît la forme et l'orientation de l'ellipsoïde optique. La forme de l'ellipsoïde est suffisamment définie lorsqu'on donne les trois indices principaux. Nous avons ordinairement assigné à ces trois indices les symboles n_a, n_b, n_c; n_a étant le plus petit, et n_c le plus grand. Le plus souvent on les distingue par les lettres grecques α, β, γ. L'accord n'existe pas sur la signification qu'on attribue aux lettres α, γ. Les uns, comme M. Des Cloizeaux, rangent les lettres α, β, γ par ordre de grandeur décroissante, de sorte qu'on a $\alpha > \beta > \gamma$. Dans ce cas $\alpha = \frac{1}{c}$ et $\gamma = \frac{1}{a}$; les lettres grecques qui désignent les inverses des vitesses ne correspondent pas aux lettres françaises qui désignent les vitesses et cela peut entraîner quelque confusion. Pour l'éviter, d'autres auteurs, comme M. V. von Lang, posent $\alpha = \frac{1}{a}$ et $\gamma = \frac{1}{c}$, de telle sorte que les indices sont rangés dans l'ordre *croissant* $\alpha < \beta < \gamma$.

Pour les cristaux uniaxes, on s'accorde à appeler ω l'indice ordinaire et ε l'indice extraordinaire.

Il est bien entendu qu'un indice ne se rapporte jamais qu'à une longueur d'onde déterminée. On met ordinairement à côté de l'indice une lettre qui désigne la longueur d'onde; cette lettre est celle qui se rapporte à une des raies de Fraunhofer, ou bien c'est la première lettre du mot qui désigne la couleur correspondante.

La double réfraction ne dépend pas directement des indices principaux mais bien des différences de ces indices. Il serait donc bien plus clair et plus commode de définir la forme de l'ellipsoïde en donnant, avec l'indice moyen n_b, les deux différences $(n_b - n_a)$, $(n_c - n_b)$. Ces deux nombres expriment la grandeur des retards produits respectivement par deux lames, épaisses d'un millimètre, et perpendiculaires l'une à l'axe c, l'autre à l'axe a. En les ajoutant, on a $n_c - n_a$ qui est le retard produit par une lame de 1 millim. perpendiculaire à l'axe b.

A l'inspection des deux nombres $(n_b - n_a)$ et $(n_c - n_b)$, on peut lire en quelque sorte toutes les particularités de la biréfringence. Si l'on appelle A l'angle d'un des axes optiques avec l'axe a, nous avons en effet, au moins à très peu près dans la plupart du cas,

$$\operatorname{tg}^2 A = \frac{n_c - n_b}{n_b - n_a}.$$

Si donc $n_c - n_b$ est plus petit que $n_b - n_a$, l'axe a est la bissectrice aigüe et le cristal est négatif. Si $n_c - n_b$ est plus grand que $n_b - n_a$, l'axe c est la bissectrice aigüe et le cristal est positif.

Le rapport de ces deux nombres donne très sensiblement le carré de la tangente du demi-angle des axes optiques.

Dans les tableaux que nous donnerons plus loin, nous adopterons cette manière de représenter les paramètres de l'ellipsoïde *inverse*. Il est commode de représenter par une lettre unique les différences $n_c - n_b$, $n_b - n_a$, $n_c - n_a$, et nous poserons

$$n_c - n_b = \varpi, \quad n_b - n_a = \nu, \quad n_c - n_a = \sigma.$$

Comme moyen mnémonique, nous pouvons remarquer que ces équations donnent

$$n_c = n_b + \varpi, \quad n_a = n_b - \nu.$$

Les lettres ϖ et ν sont, dans l'alphabet grec, les premières des mots « positif » et « négatif » et rappellent qu'il faut *ajouter* ϖ *à* n_b pour obtenir l'indice maximum n_c, et *retrancher* ν de n_b pour obtenir l'indice minimum. Lorsque, des deux nombres ϖ et ν, ϖ est le plus grand, le cristal est positif; lorsque c'est ν qui est le plus grand, le cristal est négatif.

Nous appellerons σ la somme $\varpi + \nu$. Enfin nous substituerons à n_b l'expression plus commode β qui ne donne lieu à aucune ambiguïté.

Quant aux cristaux uniaxes, nous donnerons l'indice ordinaire ω, et la quantité $\delta = \varepsilon - \omega$ qu'il faut ajouter à ω pour obtenir ε. Lorsque cette quantité est positive, le cristal est positif; lorsqu'elle est négative, le cristal est négatif.

Symboles servant à indiquer l'orientation cristallographique de l'ellipsoïde optique. — Pour désigner l'orientation de l'ellipsoïde optique, dans le cas d'un ellipsoïde à trois axes inégaux, il faut distinguer trois cas, suivant que le cristal est rhombique, clinorhombique ou anorthique.

1° *Cristaux rhombiques.* Nous adopterons les symboles imaginés par railich et qui sont fondés sur les conventions suivantes.

Soient a, b, c les paramètres cristallographiques des axes binaires; est le paramètre de l'axe perpendiculaire à la face $g^1 = (100)$ [1], b elui de l'axe perpendiculaire à la face $h^1 = (010)$, c celui de l'axe ertical perpendiculaire à la face $p = (101)$.

Nous appellerons $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ ou a_0, b_0, c_0, les axes de l'ellipsoïde optique principal, c'est-à-dire les vitesses principales, et nous supposerons $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$. Nous écrivons alors en premier lieu celui de ces trois axes qui est dirigé suivant l'axe cristallographique a, puis celui qui est dirigé suivant b, enfin celui qui est dirigé suivant c. Ainsi le symbole $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{a})$ ou, si l'on veut éviter la complication typographique $(b_0\ c_0\ a_0)$, indique que l'axe moyen de l'ellipsoïde principal est dirigé suivant a, c'est-à-dire est perpendiculaire à g^1, que l'axe minimum est dirigé suivant b ou est perpendiculaire à h^1, et enfin que l'axe maximum est dirigé suivant c ou est perpendiculaire à p.

A l'inspection de ce symbole, pris comme exemple, nous voyons que le plan des axes optiques qui contient les axes maximum et minimum de l'ellipsoïde, est celui qui contient les axes cristallographiques $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$, et est par conséquent perpendiculaire à a.

Ce symbole n'indique pas quelle est, des deux bissectrices $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}$, celle qui est la bissectrice aiguë. Pour donner cette indication utile, on met au-dessous de la lettre qui désigne la bissectrice aiguë un signe particulier. Lorsque c'est $\mathfrak{c}$ qui doit porter le signe, cette bissectrice est positive et le signe est $+$; lorsque c'est $\mathfrak{a}$ qui porte le signe, la bissectrice est négative, et le signe est $-$. Le symbole $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\underline{\mathfrak{a}})$ indique donc que la bissectrice aiguë est négative et perpendiculaire à p.

M. Rammelsberg, dans le précieux recueil où il a rassemblé les principales propriétés des substances cristallisées artificielles, indique l'orientation de l'ellipsoïde en donnant l'orientation de la bissectrice aiguë et celle du plan des axes optiques. Le symbole $(\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\underline{\mathfrak{a}})$ serait par lui traduit de la sorte : Plan des axes optiques bc, biss. nég. c.

Ces divers symboles ne comporteraient aucune ambiguïté, si tous les cristallographes désignaient les mêmes axes binaires par les mêmes lettres. L'accord n'a malheureusement pas lieu. Il est donc toujours

[1] Il ne faut pas oublier que la plupart des cristallographes allemands donnent le symbole (100) à la face h^1 perpendiculaire à la *plus courte* diagonale de la base.

nécessaire de faire suivre ces symboles par les paramètres des axes que désignent les lettres a, b, c.

2° *Cristaux monocliniques*. Il faut indiquer quel est l'axe de l'ellipsoïde principal qui coïncide avec l'axe binaire, quelle est l'orientation de ceux des axes de l'ellipsoïde qui sont compris dans le plan de symétrie, et enfin quelle est la position de la bissectrice. Le symbole employé par la plupart des cristallographes allemands donne l'angle que fait avec une normale à $p = (001)$ ou à $h^1 = (100)$, celui des plans principaux perpendiculaires au plan de symétrie g^1, qui contient la bissectrice aiguë ou l'axe moyen. Supposons, par exemple, que $\mathfrak{b}$ ou b_0 (fig. 158) soit perpendiculaire à g^1, $\mathfrak{a}$ ou a_0 étant la bissectrice aiguë faisant avec une normale à h^1 un angle égal à 41° 49′; on écrit le symbole suivant :

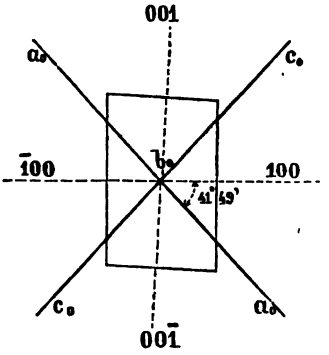


Fig. 158.

$$(100)\,\mathfrak{b}\mathfrak{a} = -41^\circ 49'.$$

La lettre qui désigne l'axe perpendiculaire à g^1 est toujours celle qui suit le signe (100); la seconde lettre désigne toujours l'axe situé dans le plan de symétrie. L'angle a le signe — lorsqu'il est situé dans l'angle obtus formé par les deux normales à p et à h^1. C'est l'angle des coordonnées négatives du réseau polaire (V. tome I, p. 183). Il serait positif dans l'angle aigu des normales.

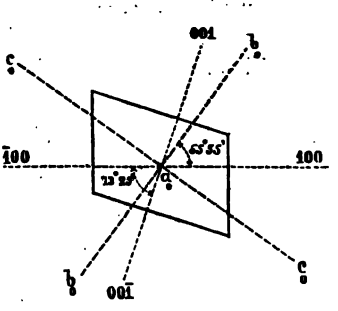


Fig. 159.

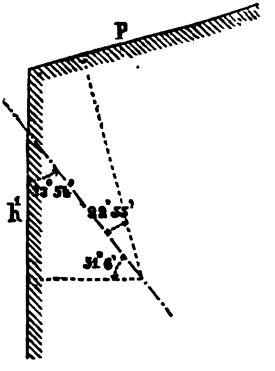


Fig. 160.

Dans le cas de la figure 159 où la bissectrice $\mathfrak{a}$ est perpendiculaire au plan de symétrie, et où l'axe moyen $\mathfrak{b}$, situé dans l'angle aigu des

normales à p et à h^1, fait avec la normale au plan $h^1 = (100)$ un angle égal à 55° 55′, le symbole serait

$$(100)\,\underline{ab} = 55^\circ 55'.$$

Si c était perpendiculaire à g^1, a étant la bissectrice, le symbole serait (100) $\underline{ca} = 51^\circ\ 6'$ (fig. 160).

M. Topsoë[1] modifie un peu ses symboles pour éviter le signe —. Il préfère donner l'angle avec la normale à $p = (001)$. Lorsque l'angle est positif (l'axe étant situé dans l'angle aigu des normales), il écrit à la manière ordinaire (001) $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ par exemple. Lorsque l'angle est négatif il renverse le symbole en écrivant $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ (001).

Il nous semble préférable de donner l'angle de l'axe situé dans le plan g^1 avec l'une des arêtes cristallographiques formées par l'intersection de p ou de h^1 avec g^1. Nous choisirons, en général, l'arête $[pg^1]$. L'angle sera positif s'il est compris dans l'angle positif obtus des axes coordonnés du réseau primitif, négatif, s'il est compris dans l'angle négatif aigu. Dans le cas de la figure 159 par exemple, nous écririons le symbole

$$p\ \underline{ab} = +72^\circ 30',$$

ou encore

$$h^1\underline{ab} = 34^\circ 5'; \quad p\ \underline{ac} = -17^\circ 30'; \quad h^1\underline{ac} = -55^\circ 55'.$$

Pour ces symboles, comme pour ceux qui se rapportent au système rhombique, il est nécessaire, afin d'éviter toute ambiguïté, de spécifier explicitement quels axes on a choisis. Il suffit, en général, de donner l'angle de p avec h^1.

3° *Cristaux anorthiques*. Lorsque le cristal est anorthique, l'orientation de l'ellipsoïde est bien plus difficile à énoncer. Aucun symbole court et précis n'est plus applicable. On peut donner l'orientation du plan des axes, et celle de la bissectrice aiguë; ce qui revient à donner l'orientation de l'axe moyen, et celle du plan perpendiculaire à la bissectrice aiguë. Ce dernier plan est particulièrement intéressant à connaître parce que c'est une face artificielle parallèle à ce plan qu'il faut créer pour voir les hyperboles et les lemniscates en lumière convergente.

2° RELATIONS ENTRE LES PARAMÈTRES OPTIQUES ET CRISTALLOGRAPHIQUES.

Indépendance entre la biréfringence et les paramètres cristallographiques. — La loi de Gladstone, dont l'exactitude approchée n'est pas douteuse, démontre clairement qu'un corps réfringent est formé

1. Recherches optiques sur quelques séries de substances isomorphes. — *Ann. de ch. et de phys.* (5), I (1874).

de molécules réfringentes plongées dans un milieu non réfringent, c'est-à-dire dans l'éther lumineux du vide.

Il est clair que la même conséquence doit s'appliquer aux corps biréfringents, et que ceux-ci sont formés de molécules biréfringentes plongées dans l'éther. Chaque molécule doit donc être considérée comme un petit corps biréfringent, dont les propriétés optiques sont déterminées par un certain ellipsoïde. Toutes les molécules du cristal sont orientées de la même façon. On peut ainsi se représenter le cristal comme formé par une superposition de lames biréfringentes du genre de celles dont nous avons calculé les effets dans le chapitre VIII. On en conclut que l'ellipsoïde du cristal est semblable à celui de la molécule.

Dans cette conception des corps biréfringents, on voit que la disposition mutuelle des centres de gravité des molécules est sans influence, au moins notable, sur la double réfraction, qui a pour cause presque unique la structure moléculaire elle-même.

Il doit nécessairement en résulter qu'il n'y a pas de relation directe entre la double réfraction et les paramètres cristallographiques. Or c'est précisément ce que les faits montrent avec la plus entière évidence, ainsi que nous allons le faire voire par quelques exemples.

La boracite est un chloroborate de magnésie qui se trouve dans la la nature en petits cristaux parfaitement cubiques. Le réseau de cette substance a donc bien certainement la symétrie cubique; cependant la substance jouit d'une double réfraction énergique, et l'observation montre que la symétrie optique est seulement terbinaire. La double réfraction est donc due *uniquement* à la molécule dont la symétrie doit être certainement rhombique. L'édifice cristallin, composé de l'ensemble du réseau et de la molécule a ainsi seulement la symétrie rhombique. Nous verrons plus tard par quel artifice la nature, malgré cette symétrie imparfaite de l'édifice, parvient à donner la symétrie cubique à la forme extérieure du cristal. Il nous suffit ici de constater qu'une substance peut être énergiquement biréfringente avec un réseau rigoureusement cubique.

Parmi les substances cristallisant dans le système rhombique il en est un très grand nombre dont la maille parallélipipédique du réseau est un prisme droit ayant pour base un rhombe 120° ou voisin de 120°. Le réseau possède alors, rigoureusement ou à peu près, la symétrie sénaire. S'il y avait un rapport direct entre la structure du réseau et la forme de l'ellipsoïde optique, celui-ci devrait être, dans toutes ces substances, rigoureusement ou à peu près, de révolution autour de

l'axe sénaire du réseau. Or il n'en est rien; les deux axes de l'ellipsoïde perpendiculaire à cet axe sénaire sont toujours inégaux. Dans bien des cas même, la différence entre ces deux axes de l'ellipsoïde n'est pas la plus petite possible, c'est-à-dire que la bissectrice aiguë ne coïncide pas avec l'axe sénaire du réseau.

On en jugera par le petit tableau suivant qui ne contient que des substances pour lesquelles l'axe vertical c est pseudo-sénaire.

	n_b	$\varpi \times 10^4$ (1)	$\nu \times 10^4$ (2)	SYMBOLE OPTIQUE	2V	AXES CRISTALLOGRAPHIQUES
Aragonite..... $CCaO^3$.	1.6816	43	1515	$cb\overset{-}{a}$	17°.83	1 : 0.623 : 0.721
Cérusite..... $CPbO^3$.	2.0763	17	2726	$b\overset{-}{c}a$	8.12	1 : 0.610 : 0.730
Azotate de potas. $KAzO^3$.	1.5056	8	1710	$cb\overset{-}{a}$	5.73	1 : 0.591 : 0.701
Azotate d'amm. $AmAzO^3$.	»	»	»	$ca\overset{-}{b}$	»	1 : 0.610 : 0.730
Sulfate de potas. K^2SO^4.	1.4946	34	14	$a\overset{-}{b}\overset{+}{c}$	67.07	1 : 0.573 : 0.746
Chromate de pot. K^2CO^4.	1.7254	»	1	$a\overset{-}{b}\overset{+}{c}$	51.67	1 : 0.570 : 0.730
Sulfate d'amm. Am^2SO^4.	»	»	»	$b\overset{-}{c}\overset{+}{a}$	»	1 : 0.564 : 0.735
» de rubid. Rb^2SO^4.	»	»	»	$b\overset{-}{a}\overset{+}{c}$	»	1 : 0.578 : 0.747
» de thal. Tl^2SO^4.	»	»	»	$b\overset{-}{c}\overset{+}{a}$	»	1 : 0.554 : 0.732

(1) $\varpi = n_b - n_a$ (2) $\nu = n_c - n_b$

On peut y voir le degré avec lequel ces diverses substances s'approchent de la forme hexagonale, car le prisme de 120° exige $a : b = 1 : \frac{1}{\sqrt{3}} = 1 : 0{,}577$. On voit que l'aragonite, la cérusite et l'azotate de potasse s'éloignent assez notablement d'avoir pour forme primitive un prisme de 120°; cependant ce sont, parmi les substances pseudo-sénaires, celles qui s'approchent le plus d'avoir pour ellipsoïde optique un ellipsoïde de révolution, car la bissectrice aigüe est dirigée suivant l'axe pseudo-sénaire et l'angle des axes optiques est très petit.

Au contraire, le sulfate et le chromate de potasse dont le prisme primitif s'approche bien davantage de l'angle de 120°, ont les axes horizontaux de l'ellipsoïde extrêmement inégaux. Pour le chromate de potasse, la bissectrice aiguë ne coïncide même plus avec l'axe pseudo-sénaire, ce qui se rencontre encore dans les sulfates d'ammoniaque, de rubidium et de thallium.

Il y a donc, comme l'indiquait la théorie, une véritable indépendance entre les paramètres cristallographiques et les paramètres optiques, et cela explique suffisamment ce fait déjà signalé, que lorsque la symétrie de la molécule (c'est-à-dire celle de l'édifice cristallin), ne règle pas l'orientation des axes de l'ellipsoïde optique, celle-ci n'a pas de rapport simple avec l'orientation des axes cristallographiques.

Toutefois on ne peut pas dire que l'indépendance entre les paramètres cristallographiques et les paramètres optiques soit absolument complète, car les uns et les autres sont régis par une même cause, qui est la forme et la nature de la molécule. On peut s'expliquer de la sorte certains rapprochements remarquables. C'est ainsi que dans le tableau qui précède, les trois premières substances, dont les formes cristallines sont très voisines, ont des propriétés optiques assez semblables, et cette analogie est d'autant plus remarquable que ces propriétés optiques sont véritablement exceptionnelles par l'énergie tout à fait inaccoutumée de la biréfringence.

3° RELATIONS ENTRE LA BIRÉFRINGENCE ET LA COMPOSITION CHIMIQUE.

Nous avons vu que la réfringence simple est déterminée *principalement* par la composition chimique de la molécule. On peut se demander s'il n'en est pas ainsi de la biréfringence. Comme celle-ci dépend certainement de la structure du groupement, puisqu'elle peut disparaître par exemple, quelle que soit d'ailleurs la composition, lorsque cette structure possède la symétrie cubique, on ne peut étudier l'influence propre qu'exercent les divers atomes ou groupements atomiques qu'en comparant deux molécules ne différant entre elles que par le remplacement d'un atome par un autre.

Or les substances cristallisées forment des groupes, composés de substances dont les formes cristallines sont, sinon identiques, du moins extrêmement voisines. Les substances comprises dans un de ces *groupes* sont dites *isomorphes*. Le plus souvent des substances isomorphes ont une composition chimique analogue, et ne diffèrent que par la substitution d'un atome à un autre, ou d'un groupe d'atomes à un autre groupe analogue. Les cinq dernières substances inscrites dans le tableau précédent composent un groupe isomorphe, dans lequel K^2 peut être remplacé successivement par Am^2, Rb^2, Tl^2, tandis que SO^4 peut être remplacé à son tour par CrO^4.

Il est vraisemblable que les corps qui font partie d'un groupe isomorphe sont formés de molécules identiques entre elles par leur structure. Nous pouvons donc, en les comparant entre eux, voir quelle

fluence exerce sur la biréfringence la substitution d'un atome ou d'un roupe d'atomes à un autre atome ou groupe d'atomes. Malheureusement es propriétés optiques n'ont été observées complètement que pour un nombre comparativement très restreint de substances cristallisées, et l'étude ne peut porter que sur un bien petit nombre de groupes isomorphes. Les trois tableaux suivants comprennent à peu près tous ceux de ces groupes qui sont suffisamment connus.

1° CRISTAUX UNIAXES

	SYSTÈME CRISTALLOGRAPHIQUE (1)	INDICE ORDINAIRE ω	$10^4.\delta = 10^4(\varepsilon - \omega)$	AXE CRISTALLOGRAPHIQUE PRINCIPAL, L'AXE BINAIRE MOBILE ÉTANT 1	OBSERVATEURS
$CaCO^3$ (Calcite) . .	3	1.6585 D	—1931	0.8543	Mascart.
$(Ca,Mg)CO^3$	3	1.6117 D	—1091	0.8322	Fizeau.
$NaAzO^3$.	3	1.5860 D	—2500	0.8276	Schrauf.
Ag^3AsS^3 (Proustite).	3	3.0877 D	—2953	0.7851	Fiz. et D. Cl.
Ag^3SbS^3	3	3.0840 ρ	—2030	0.7880	Fizeau.
$CaWO^4$	4	1.919 ρ	+ 160	1.537	Des Cloiz.
$PbMoO^4$.	4	2.402 ρ	— 80	1.574	Id.
Ti^2O^4.	4	2.6158 D	+2871	0.644	Baerwald.
$ZrSiO^4$	4	1.92 ρ	+ 500	0.640	De Sen.
K H^2AsO^4. . . .	6	1.5674 D	— 495	0.663	Topsoë et Chr. (2)
Am —	6	1.5766 D	— 549	0.710	Id.
K H^2PO^4	6	1.5095 D	— 411	0.664	Id.
Am —	6	1.5246 D	— 454	0.7124	Id.
K^2 S^2O^6.	6	1.4550 D	+ 503	0.647	Id.
Rb^2 —	6	1.4574 D	+ 504	0.681	Id.
Sr S^2O^6 + 4aq . .	6	1.5296 D	— 44	1.502	Id.
Pb — — — . .	6	1.6351 D	+ 180	1.470	Id.
Ni SO^4 + 6aq. . .	4	1.5109 D	— 236	1.906	Id.
Ni SeO^4 + 6aq . .	4	1.5393 D	— 268	1.836	Id.
Zn — — — . .	4	1.5291 D	— 252	1.895	Id.
Ni $SiFl^6$ + 6aq . .	4	1.3910 D	+ 156	0.514	Id.
Zn — — — . .	4	1.3824 D	+ 132	0.517	Id.
Co — — — . .	4	1.3817 C	+ 155	0.522	Id.
Mg — — — . .	4	1.3439 D	+ 163	0.517	Id.
Mn — — — . .	4	1.3570 D	+ 172	0.504	Id.
Cu — — — . .	4	1.4092 D	— 12	0.540	Id.
$MgSnCl^6$ + 6aq. . .	4	1.5885 D	— 85	0.508	Id.

(1) Système ternaire = 3. — Système quaternaire = 4. — Système sénaire = 6.
(2) *Ann. de chim. et de phys.* (5), I (1874).

2° CRISTAUX RHOMBIQUES

	$\beta = n_b$	$10^4.\varpi$ (1)	$10^4.\nu$ (2)	$10^4.\sigma$ (3)	SYMBOLE OPTIQUE	ANGLE DES AXES 2V	AXES CRISTALLOGRAPH. $a = 1$ b	c	[illegible]
Ca CO^3 (Aragonite)	1.6816 D	43	1515	1558	cba −	17°.83	0.623	0.721	Rath.
Pb —	2.0763 D	17	2726	2743	bca −	8.12	0.610	0.730	D. C.
K AzO^3.	1.5056 D	8	1710	1718	cba −	6.2	0.591	0.701	Schr.
Am —	»	»	»	»	cab −	»	0.585	0.736	
St SO^4.	1.6237 D	72	17	89	bca +	51.2	0 777	1.282	Arzruni.
Ba —	1.6375 D	108	12	105	bca +	35.7	0.815	1.315	Id.
Pb —	1.8823 D	114	52	166	bca +	66.8	0 776	1.218	Id.
K^2SO^4.	1.4946 D	34	14	48	abc +	67.07	0.573	0.746	T. et Cr.
K^2CrO^4.	1.7254 D	»	»	»	abc −	51.67	0.570	0.730	Id.
Ni SO^4 + 7aq . .	1.4888 D	33	252	285	acb −	41.93	0.982	0.566	Id.
Zn — — . .	1.4801 D	35	268	303	acb −	46.23	0.980	0.565	Id.
Mg — — . .	1.4554 D	54	229	283	acb −	51.42	0.990	0.571	Id.
$MgCrO^4$ + 7aq . .	1.5500 D	180	289	469	acb −	75.47	0.990	0.574	Id.

(1) $\varpi = n_c - n_b$ (2) $\nu = n_b - n_a$ (3) $\sigma = n_c - n_a$

De l'examen attentif de ces tableaux, on peut déduire les conséquences suivantes :

1° La substitution mutuelle des atomes Mg, Mn, Fe, Ni, Co, Zn, n'apporte, dans les constantes optiques, que des modifications en général peu importantes ;

2° La substitution de Cu à l'un quelconque des atomes du groupe précédent modifie au contraire beaucoup la biréfringence; puisqu'elle peut faire passer le cristal uniaxe du signe positif au signe négatif (fluosilicates), ou qu'elle peut dans les cristaux biaxes modifier profondément l'orientation et la grandeur des axes de l'ellipsoïde (séléniates doubles) ;

3° La substitution mutuelle des atomes St, Ba, Pb amène des modifications importantes dans la grandeur des axes ; ces modifications parais-

sent surtout considérables lorsqu'on compare entre eux St et Pb dont les poids atomiques diffèrent le plus ;

4° La substitution de Am (ammonium) à K et Rb, peut donner lieu à des modifications optiques considérables ;

3° CRISTAUX BIAXES CLINORHOMBIQUES[1]

	β	$10^4.\varpi$	$10^4.\nu$	$10^4.\sigma$	SYMBOLES OPTIQUES	2V	AXES CRISTALLOGRAPHIQ. $b=1$ a	c	p/h^1
$gSeO^4+6aq$.	1.4892	19	36	55	$p\overset{-}{b}a=-54°.40$	28°.20	1.385	1.685	81°.47
» — —	1.5223	»	»	»	$p\overset{-}{b}a=-47.07$	71.05	1.371	1.682	81.77
i SeO^4,K^2SeO^4+6aq . .	1.5248	91	49	140	$p\overset{+}{b}c=6.95$	72.93	0.745	0.506	75.12
o — — — — . .	1.5195	161	60	221	$p\overset{+}{b}c=3.42$	63.87	0.738	0.506	75.83
n — — — — . .	1.5177	150	62	212	$p\overset{+}{b}c=1.68$	66.13	0.744	0.508	75.77
Ig — — — — . .	1.4970	150	20	170	$p\overset{+}{b}c=2.00$	40.57	0.745	0.501	75.75
Cu — — — — . .	1.5235	152	139	291	$p\overset{-}{b}a=-87.57$	88.20	0.749	0.523	76.68
Ni SeO^4,Am^2SeO^4+6aq. .	1.5372	94	81	175	$p\overset{+}{b}c=16.9$	86.23	0.738	0.504	73.68
Co — — — —. .	1.5311	85	65	150	$p\overset{+}{b}c=13.7$	82.02	0.741	0.504	73.58
Mg — — — —. .	1.5075	75	19	94	$p\overset{+}{b}c=17.12$	53.73	0.741	0 497	73.38
Zn — — — —. .	1.5292	80	59	139	$p\overset{+}{b}c=13.07$	81.37	0.742	0.506	73.82
Fe — — — —. .	1.5260	96	59	155	$p\overset{+}{b}c=9.38$	76.8	0.741	0.501	73.78
Cu — — — —. .	1.5355	40	142	182	$p\overset{-}{b}a=-58.97$	55.4	0.749	0.513	74.45
Mg SO^4,Am^2SO^4+6aq . .	1.4728	63	11	74	$p\overset{+}{b}c=11.18$	50.67	0.738	0.489	72.00
K^2 — — — — . .	1.4633	135	31	166	$p\overset{+}{b}c=0.50$	48.02	0.742	0.501	75.08
Fe — — — — . .	1.4832	141	57	198	$p\overset{+}{b}c=3.73$	67.3	0.751	0.511	75.73

1. Tous les nombres se rapportent à la raie D. — Toutes les observations sont de MM. Topsoë et Chrisansen. (*Ann. chim. et phys.* (5), I, p. 1, 1874.)

5° La substitution de SO^4 et SeO^4 paraît se faire sans troubler notablement les propriétés optiques ;

6° Au contraire la substitution de SO^4 et CrO^4 est accompagnée de modifications optiques très importantes.

Il y a donc des atomes dont l'action sur la biréfringence est presque identique ; on pourrait dire qu'ils sont isomorphes au point de vue optique comme au point de vue cristallographique. D'autres atomes au contraire, dont l'action sur les paramètres cristallographiques est

presque la même, exercent des actions très différentes sur la double réfraction.

Nous aurons d'ailleurs l'occasion de revenir sur ce point lorsque nous traiterons de l'isomorphisme.

4° ANOMALIES OPTIQUES DES CRISTAUX.

Il semble que la biréfringence devrait être, les conditions extérieures restant les mêmes, aussi constante, pour une même substance, que l'est la densité ou telle autre propriété physique. Cette constance se retrouve en effet dans un très grand nombre de substances, mais elle manque entièrement dans d'autres.

Dans certains cas, cette variabilité des propriétés optiques paraît tenir à des variations plus ou moins considérables qui, en vertu de l'isomorphisme, peuvent se produire dans la composition chimique sans altérer la forme cristalline et l'aspect extérieur : tel est le cas qui se présente sans doute pour un grand nombre de minéraux.

Mais cette explication est inadmissible quand les variations de la biréfringence se produisent pour des substances préparées artificiellement et de la pureté desquelles on peut être assuré; ou lorsqu'elles se produisent dans un même cristal, dont les diverses plages présentent ainsi des différences considérables au point de vue de la double réfraction.

Nous verrons plus tard que ces anomalies optiques sont dues à des groupements intérieurs, soumis d'ailleurs à des lois très précises, qui peuvent altérer profondément l'homogénéité du cristal. Nous devons donc reporter l'étude de ces anomalies jusqu'après le moment où nous aurons étudié les modes suivant lesquels les éléments cristallins peuvent se grouper entre eux dans un même individu. Nous ne voulions que signaler ici ces perturbations singulières dont l'étude a pris dans ces dernières années une grande importance.

5° ACTION DE LA CHALEUR SUR LES PROPRIÉTÉS BIRÉFRINGENTES.

La biréfringence est modifiée par la chaleur d'une manière très inégale suivant les différents corps. On ne connaît qu'un petit nombre de substances cristallisées pour lesquelles cette influence soit connue d'une manière complète, et le tableau suivant les comprend presque toutes.

I. — CRISTAUX UNIAXES

	BIRÉFRINGENCE A 20°		VARIATIONS POUR UNE AUGMENTATION DE 1° DE TEMPÉRATURE			
	ω	$10^4.(\varepsilon-\omega)$	$10^7.d\omega$	$10^7.d(\varepsilon-\omega)$	LIMITES DE TEMPÉRATURE	
Calcite.	1.6585 D	—1719.2	+ 6	+ 102	15° à 80°	Fizeau.
Quartz.	1.5442 D	+ 91.5	—54	— 9	»	Id.

II. — CRISTAUX BIAXES

	BIRÉFRINGENCE A 20°				VARIATIONS POUR UNE AUGMENTATION DE 1° DE TEMPÉRATURE			
	β	$10^4.\varpi$	$10^4.\nu$	$10^4.\sigma$	$10^7.d\beta$	$10^7.d\varpi$	$10^7.d\nu$	$10^7.d\sigma$
Aragonite (1). . .	1.6906 F	45.7	1565.8	1611.5	—139	— 11	—31	— 42
Sulf. stront. (2). .	1.6237 D	72.5	16.9	89.4	— 97 —132	— 57 — 58	+26 +20	— 31(5) — 38(6)
Sulf. bar. (2). . .	1.6371 D	108.3	10.3	118.6	—135 —141	— 65 — 80	— 3 +30	— 68(5) — 50(6)
Sulf. plomb. (2). .	1.8823 D	113.9	51.7	165.6	—195 —250	—106 —134	+41 +23	— 65(5) —111(6)
Gypse (3).	1.5227 D	70.8	21.1	91.9	—440	+ 19	—30	—110
Sel Seign. pot. (4).	1.4924 ρ	34	18	52	—1410	— 11	+ 7	— 40(7)

(1) Rudberg.
(2) Arzruni.
(3) Dufet.
(4) Müttrich.
(5) Entre 20° et 100°.
(6) Entre 100° et 200°.
(7) Entre 16° et 45°.

On voit que, pour toutes les substances inscrites dans ces tableaux, la biréfringence diminue avec la température. La calcite, pour laquelle nous avons signalé plus haut l'anomalie que présente l'indice médian qui croît avec la température, rentre dans la règle générale en ce qui regarde la biréfringence.

A en juger par les observations de M. Arzruni, sur les sulfates de strontiane, de baryte et de plomb, la variation serait pour ces corps un peu irrégulière avec la température. Mais il faut remarquer que les observations, faites par la méthode du prisme, ne semblent pas suscep-

tibles de donner une précision assez grande pour que les différences observées ne puissent être mises sur le compte des erreurs d'observation.

Si la différence entre les indices extrêmes paraît décroître d'une manière générale avec la temperature, il en est autrement des différences entre l'indice moyen et les indices extrêmes. C'est ainsi que, pour les sulfates de strontiane, de baryte et de plomb, $\varpi = n_c - n_b$, décroît avec la température, tandis que $\nu = n_b - n_a$ croît. La même chose a lieu pour le sel de Seignette potassique, tandis que pour le gypse, c'est ϖ qui croît et ν qui décroît.

Comme $tg^2 V$ est égal à $\frac{\varpi}{\nu}$ ou $\frac{\nu}{\varpi}$ suivant que le cristal est positif ou négatif, on voit que les variations inégales de ϖ et de ν, sous l'influence de l'augmentation de température doivent amener des variations dans l'écartement angulaire des axes optiques.

A l'inspection du tableau, on voit que, la température augmentant, l'écartement angulaire des axes doit diminuer pour l'aragonite et le gypse; augmenter pour les sulfates de strontiane, de baryte et de plomb, ainsi que pour le sel de Seignette potassique. C'est en effet ce que constate l'observation directe.

Variations dans l'écartement angulaire des axes du gypse. — Les variations de l'écartement angulaire des axes optiques du gypse avec la température méritent d'être étudiées avec quelque détail.

Le gypse est positif et l'on a sensiblement :

$$tg^2 V = \frac{\nu}{\varpi}.$$

Or ν diminuant avec la température, V devient nul pour une certaine longueur d'onde λ lorque le ν correspondant à ce λ est nul. Les nombres de M. Dufet montrent que ce résultat doit être obtenu pour une température T donnée par l'équation

$$0,30\,(T - 20) = 21,1,$$

soit $T = 90°$ environ pour la raie D.

L'observation confirme cette déduction et l'expérience, très curieuse, est très facile à faire. Il suffit de serrer entre deux plaques métalliques, percées de deux trous en regard, une lame de gypse normale à la bissectrice aiguë et de la poser sur le porte-objet du microscope à lumière convergente. La lame métallique inférieure se prolonge de

manière qu'on puisse en chauffer l'extrémité par une lampe à esprit-de-vin ou un bec de gaz. La lame de gypse s'échauffe et l'on voit les axes, qui étaient d'abord écartés de 57° à 58°, se rapprocher de plus en plus jusqu'à se réunir. Cette réunion ne se produit cependant pas en même temps pour toutes les couleurs; l'uniaxie se produit d'abord pour le rouge, puis pour le bleu.

Lorsque la température dépasse celle qui produit l'uniaxie pour une couleur, le jaune par exemple, $n_b - n_a$ est nul pour cette couleur. Si l'on élève encore davantage la température, $n_b - n_a$ devient nul, c'est-à-dire que la direction de l'axe moyen de l'ellipsoïde inverse devient celle de l'axe minimum, et la direction de l'axe minimum devient celle de l'axe moyen. Le plan des axes qui, à la température ordinaire, coïncide avec g^1, se place donc perpendiculairement et, dans cette nouvelle position, l'angle des axes s'accroît régulièrement. L'expérience ne peut d'ailleurs être poussée très loin, car le gypse se décompose, en se déshydratant, à la température de 110° environ.

Observations sur les variations de l'écartement angulaire des axes optiques. — La variation de l'écartement angulaire des axes, qui est une conséquence de celle des axes de l'ellipsoïde optique avec la température, est au reste un phénomène relativement facile à étudier en ayant recours à une disposition du microscope à lumière convergente décrite dans le chapitre précédent. M. Des Cloizeaux, qui a imaginé cette disposition, s'en est servi pour effectuer de nombreuses observations[1].

Parmi les substances étudiées par lui, la plupart ont montré une variation faible ou inappréciable de l'écartement angulaire des axes. Il ne faudrait pas en conclure que, pour ces substances, la biréfringence ne varie pas d'une manière sensible avec la température, car, pour que la grandeur de V reste sans changement, il suffit que les variations de ϖ et de ν laissent à peu près constant le rapport $\frac{\varpi}{\nu}$. Tel est, par exemple, le cas de la boracite, dont l'écartement angulaire reste presque invariable, tandis que la biréfringence diminue d'une manière très sensible à mesure que la température s'élève.

D'autres substances, au contraire, subissent, sous l'influence de l'accroissement de la température, une variation forte ou notable de

1. Voir surtout : *Mémoires présentés à l'Académie des sciences*, t. XVIII, p. 512, 732.

l'écartement angulaire des axes optiques. Je citerai seulement les suivantes :

Sulfate de baryte . . . . . 2E =	63° 5′	à	12°
	74° 42′		196°
Calamine.	85° 21′		9°
	76° 32′		121°
Sulfate de strontiane.	89° 15′		7°
	95° 56′		101°
Carbonate de plomb	16° 22′		12°
	22° 2′		96°
Sel de Seignette potassique . . .	124° 50′		16°
	140° 20′		72°
Quercite ($C^{12}H^{12}O^{10}$).	54° 49′		22°
	37° 12′		121°

Tous ces nombres se rapportent aux rayons rouges. Ceux qui expriment la température ne sont qu'approchés et sont probablement tous trop forts pour les températures élevées.

Variations dans l'orientation des axes de l'ellipsoïde optique. — Dans les cristaux rhombiques, la position des axes de l'ellipsoïde optique est fixée par la symétrie ; elle est donc invariable avec la température. Mais il n'en est plus de même dans les cristaux clinorhombiques pour les deux axes situés dans le plan de symétrie, et dans les cristaux anorthiques pour les trois axes. Dans le gypse, par exemple, le plan des axes coïncide avec le plan de symétrie g^1 à la température ordinaire ; le symbole optique est $h^1 \overset{+}{b}c = -37° 28'$ à la température de 19° (Angström). La dispersion est inclinée, c'est-à-dire que les courbes isochromatiques sont symétriques par rapport au plan des axes. Les phénomènes ne sont pas les mêmes autour des deux axes optiques. Autour de l'un d'entre eux, les anneaux sont plus larges et l'hyperbole offre à l'extérieur une bordure violette ; autour de l'autre axe, les anneaux sont plus rétrécis et l'hyperbole est bordée à l'extérieur par du rouge un peu vineux. Lorsqu'on élève la température, les deux axes se rapprochent l'un de l'autre, mais l'axe à larges anneaux se meut à peu près deux fois plus vite que l'autre, de sorte que la bissectrice marche du côté de l'axe optique à petits anneaux. M. Des Cloizeaux estime que de 20° à 95° la bissectrice s'est ainsi déplacée de 5° 28′ environ.

Le même phénomène se manifeste pour l'azotate double de lanthane et d'ammoniaque qui cristallise dans le système clinorhombique avec

$ph^1 = 113^0$, le symbole optique étant $p\underline{ba} = -57^0$. A la température ordinaire, les axes sont très rapprochés, $2E = 8^0$ à 10^0 environ. La chaleur de la main suffit pour rapprocher les axes optiques et réunir les axes violets, moins écartés que les rouges. Dans ce mouvement, l'un des axes se déplace environ quatre fois plus vite que l'autre.

La quercite est encore dans le même cas; on a pour cette substance $ph^1 = 111^0 3'$, et $p\underset{+}{bc} = -51^0$. L'un des axes, distingué par les couleurs vives de l'hyperbole, se rapproche du centre à peu près deux fois et demie plus vite que l'autre, de sorte qu'entre 19^0 et 121^0 la bissectrice se déplace de $1^0 26'$.

Variations permanentes sous l'influence de la chaleur, dans l'écartement angulaire des axes optiques. — Expériences de M. Des Cloizeaux sur l'orthose. — Mais les observations les plus curieuses faites par M. Des Cloizeaux sont celles qui ont montré, pour certaines substances, non seulement que l'écartement angulaire peut varier beaucoup avec la température, mais encore que ces variations peuvent devenir permanentes si l'on porte la température suffisamment haut.

Le feldspath orthose est au nombre de ces substances. Ce minéral, qui joue un rôle si important dans la nature, est un silicate d'alumine et de potasse ($6SiO^2, Al^2O^3, K^2O$) dans lequel un peu de soude peut remplacer la potasse. Il cristallise dans le système clinorhombique avec $m/m = 118^0 48'$, $p/h^1 = 116^0 7'$. L'orientation des axes de l'ellipsoïde, non plus que leur grandeur, n'y est pas constante; il est d'ailleurs à remarquer que les substances qui éprouvent des variations permanentes sous l'influence de la chaleur, sont toutes, sous ce rapport, dans le même cas que l'orthose.

On peut distinguer dans l'orthose deux variétés principales qui diffèrent surtout par leurs propriétés optiques.

L'une, qui est la plus répandue, porte le nom d'adulaire; elle a pour symbole optique

$$p\,\underline{ca} = -4^0 6',$$

avec de légères variations de cet angle. L'écartement angulaire des axes est généralement compris entre 69^0 et 70^0, mais il peut descendre dans certains échantillons jusqu'à 45^0.

Quand la température s'élève, les axes optiques de l'adulaire se rapprochent. Pour certaines plaques ce rapprochement n'est que temporaire, et, après refroidissement, elles montrent le même écartement

angulaire qu'avant la calcination. Pour d'autres plaques, au contraire, l'écartement angulaire, après le refroidissement, est devenu un peu moindre qu'avant la calcination.

C'est ce que montrent les exemples suivants :

	$2E_\rho$		
	AVANT CALCINATION	APRÈS CALCINATION	
Adulaire du Saint-Gothard. . .	108°	102°25′	Un quart d'heure au rouge vif (fusion de l'argent).
id.	111°23′	90°27′	Une demi-heure sur le chalumeau à gaz.
Adulaire de Ceylan (pierre de lune)	121°15′	117°31′	Un quart d'heure sur le chalumeau à gaz.

Mais les changements permanents les plus considérables se produisent pour les cristaux d'orthose vitreux que l'on trouve accompagnant les roches volcaniques de l'Eifel.

A la température ordinaire, ces cristaux, qui contiennent d'ailleurs une quantité assez notable de soude, ont un symbole optique qui est tantôt celui de l'adulaire $p\underline{c}a = -4°6'$ (avec un écartement beaucoup moindre des axes optiques), tantôt le symbole,

$$p\underline{b}a = -4°6'$$

avec un écartement des axes très faible; le plan des axes est dans ce dernier cas parallèle à g^1, tandis qu'il lui est perpendiculaire dans l'adulaire. Un même échantillon peut présenter des plages ayant le symbole de l'adulaire, d'autres le symbole nouveau. Pour une même plage, les rayons bleus peuvent avoir le symbole de l'adulaire, tandis que le nouveau s'applique aux rayons rouges, l'uniaxie se produisant pour des rayons intermédiaires.

Sous l'action de la chaleur, l'écartement angulaire croît dans les plages et pour les couleurs qui ont le symbole nouveau; il décroît dans les plages et pour les couleurs qui ont le symbole de l'adulaire. Comme dans ce dernier cas l'écartement angulaire est toujours petit, il arrive un moment où les axes sont réunis; si l'on continue alors à augmenter la température, les axes se séparent de nouveau, mais en s'ouvrant dans un plan parallèle à g^1; le symbole devient alors $p\underline{b}a$, partir de ce moment les axes optiques vont régulièrement en s'écartant.

Pour une plaque qui, à 18°,7, montrait les axes rouges ouverts dans un plan perpendiculaire à g^1, avec un écartement dans l'air $2E_\rho = 16°$, les axes bleus ouverts dans un plan parallèle à g^1 avec $2E_v = 12°$ à 3°, M. Des Cloizeaux a observé les variations suivantes de $2E_\rho$ sous influence des changements de la température :

TEMPÉRATURE	$2E_\rho$
18°,7	— 16°
42°,5.	0°
100°	30°
200°	46°22′
300°	59°47′
343°	64°.

A la température ordinaire et avant la calcination, on avait mesuré

$$\beta = 1,5239 \qquad 10^4.\varpi = 1 \qquad 10^4.\nu = 69.$$

On peut tirer parti de ces nombres en remarquant que

$$\sin^2 E = \beta^2 \sin^2 V = \beta^2 \frac{\nu}{\varpi}.$$

Si les variations de β, ν, ϖ, sont proportionnelles à la température, il doit en être de même de celle de $\sin^2 E$. Les nombres précédents donnent :

TEMPÉRATURE	$\sin^2 E$	VARIATION DE $\sin^2 E$ POUR 100°
18°,7.	— 0.0194	0.1063
100°.	0.0670	0.0880
200°.	0.1532	0.0880
343°.	0.2805	

De 100° à 343° la variation est très régulière. De 18°,7 à 100°, elle est un peu plus forte que pour les températures supérieures ; la différence paraît un peu grande pour pouvoir être attribuée à une erreur d'observation, quoique cela ne soit pas impossible.

Voici maintenant des exemples de variations permanentes. On continue à noter par le signe — les angles des axes situés dans le plan perpendiculaire à g^1 ; et par le signe + ceux des axes situés dans le plan g^1.

	$2E_\rho$		$2E_v$		
	AVANT LA CALCINATION	APRÈS LA CALCINATION	AVANT LA CALCINATION	APRÈS LA CALCINATION	
Échantillon I.	-13°		$+17^\circ$		
		-10°		$+21^\circ$	Calcination de 1 h. [illegible] lampe à alcool.
		$+24^\circ$		$+30^\circ$	4 h. sur lampe à [illegible] vers 600° et [illegible] dissement lent.
		$+25^\circ 30'$		$+31^\circ 30'$	7 h. sur lampe à [illegible] refroidiss. brus[illegible]
II.	$+14^\circ$		$+24^\circ 30'$		
		$+37^\circ$		$+49^\circ$	8 jours dans un fo[illegible] Sèvres, dont [illegible] vers 800°, puis rel[illegible] dissement.
III.	$+25^\circ$		$+17^\circ$		
		$+25^\circ$		-17°	Calcination de 1 h. [illegible] lampe à gaz.
		$+33^\circ 30'$		$+38^\circ$	5 minutes sur chalumeau à gaz.
		$+43^\circ$		$+48^\circ$	8 jours dans un four de Sèvres au dégourdi.
IV.	$+17^\circ 30'$		$+27^\circ$		
		$+48^\circ$		$+53^\circ$	8 j. four de Sèvres au grand feu et refroidissement très lent.

Des phénomènes analogues ont été observés par M. Des Cloizeaux pour la cymophane et la brookite.

Pour ces deux dernières espèces, comme nous le verrons *plus tard*, ces anomalies s'expliquent par l'influence qu'exerce la chaleur sur les groupements intérieurs qui altèrent souvent l'homogénéité *des substances* cristallisées. Il est probable que la même explication sera un jour étendue aux modifications permanentes de l'orthose.

III. — DISPERSION.

Formules représentant la dispersion. — Nous avons vu qu'on peut en général représenter la dispersion par la formule de Cauchy à 2 ou 3 termes

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4}.$$

On s'en tient ordinairement aux deux premiers termes. Le calcul de

A et B ne nécessite alors que la connaissance de l'indice pour deux longueurs d'onde connues. On prend toujours des longueurs d'onde correspondant à des raies du spectre solaire. Pour ce calcul très simple on peut employer les nombres suivants calculés avec les longueurs d'onde évaluées en millièmes de millimètres.

Raies	λ	$\frac{1}{\lambda^2} = l^2$	Log l^2	$\frac{1}{\lambda^4} = l^4$
A	0.7604	1.730	0.23792	2.9910
B	0.6867	2.123	0.32686	4.5050
C	0.6562	2.322	0.36592	5.3930
D	0.5895	2.878	0.45904	8.2810
	0.5889	2.884	0.45992	8.3150
b_1	0.5183	3.725	0.57084	13.8600
F	0.4861	4.232	0.62654	17.9100
G'	0.4340	5.309	0.72502	28.1900
G	0.4307	5.391	0.73166	19.0600
h	0.4101	5.948	0.77422	35.3500
H	0.3967	6.354	0.80308	40.3800

Lorsqu'on ne calcule que la formule à deux termes, on peut remarquer que

$$n_B = A + Bl_B^2 = A + B \times 2.123$$
$$n_F = A + Bl_F^2 = A + B \times 4.232$$
$$n_H = A + Bl_H^2 = A + B \times 6.354.$$

On aura donc à très peu près

$$n_H - 3(n_F - n_B) = A + B(6.354 - 6.327) = A - 0.027\,B,$$

ou très sensiblement A. Cette relation approchée peut être dans certains cas commode pour le calcul.

Voici quelques exemples qui montreront l'accord de la formule de Cauchy avec l'observation.

RAIES	QUARTZ (Mascart) $\omega = 1.53238 + 0.004058 \frac{1}{\lambda^2}$			CALCITE (Mascart) $\omega = 1.63774 + 0{,}015221 \frac{1}{\lambda^2}$			APATITE (Ble[illegible]) $\omega = 1.63063 + 0.0[illegible]$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^5$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^5$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. [illegible]
A	1.53902	1.53939	— 37	1.65013	1.65014	— 1			
B	4099	4099	0	296	296	0			
C	188	180	+ 8	446	439	+ 7			
D	423	405	+ 18	846	837	+ 9	1.63063	1.63063	0
F	966	935	+ 12	6795	6809	— 16	5332	5332	0
G	5429	5425	+ 4	7620	7640	— 20	933	933	0
H	817	817	0	8330	8330	0			

RAIES	BARYTINE (Heusser) $\beta = 1.62333 + 0.004883 \frac{1}{\lambda^2}$			ARAGONITE (Rudberg) $\beta = 1.66187 + 0.006802 \frac{1}{\lambda^2}$			TOPAZE (Rubens) $\beta = 1.60198 + 0.00[illegible]$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^5$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^5$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. [illegible]
B	1.63370	1.63370	0	1.67631	1.67631	0	1.61049	1.61049	0
C	476	468	+ 8	779	767	+ 12	144	129	— 15
D	745	739	+ 6	8157	8144	+ 13	375	351	— 24
F	1.64393	4400	— 7	9053	9066	— 13	914	954	— 39
G	960	966	— 6	836	854	— 18	2365	2359	— 6
H	5437	5437	0	1.70509	1.70509	0	745	745	0

Sauf pour l'indice du quartz correspondant à la raie A, où il est permis de soupçonner une erreur d'observation, la différence entre les indices observés et calculés dépasse à peine deux unités du quatrième ordre décimal. La précision des mesures ne peut guère être regardée comme beaucoup supérieure.

Il semble résulter des observations de M. V. von Lang que, pour le gypse, il est nécessaire d'ajouter à la formule un terme en $\frac{1}{\lambda^4}$. Si l'on essaye en effet de représenter les valeurs de β en se bornant à deux termes, on obtient le résultat suivant.

RAIES	GYPSE $\beta = 1.51363 + 0.002723 \frac{1}{\lambda^2}$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE $\times 10^5$
B	1.51941	1.51941	0
C	2037	95	+ 42
D	287	2147	+ 140
F	581	515	+ 66
G	831	831	0

Si, au contraire, on emploie la formule à trois termes

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2} - \frac{C}{\lambda^4},$$

en adoptant les valeurs suivantes de A, B, C, à la température de 20° :

	A	B × 10³	C × 10⁴
γ.	1.50799	4.6192	0.68387
β.	1.50962	4.8701	1.04307
α.	1.51808	4.4237	0.40598

la comparaison entre le calcul et l'observation devient naturellement plus satisfaisante, comme cela résulte du tableau qui suit. Toutefois les indices du gypse varient d'une façon si notable avec la température qu'on serait tenté d'attribuer l'anomalie constatée par M. V. Lang au défaut de constance de la température pendant les observations.

S	α			β			γ		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^6$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^6$	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR. $\times 10^6$
(	1.527251	1.527264	— 13	1 519407	1.519457	— 50	1.517427	1.517457	— 30
;	8142	8138	+ 4	1.520365	1.520365	0	8325	8345	— 20
)	1.530483	1.530483	0	2870	2772	+ 98	1.520818	1.520717	+101
E	3552	3482	+ 70	5806	5794	+ 12	3695	3726	— 31
F	5994	6074	— 80	8262	8352	+ 10	6269	6303	— 34
G	1.540736	1.540716	+ 20	1.532821	1.532801	+ 20	1.530875	1.530860	+ 15

Dispersion pour les radiations obscures. — Lorsqu'on a déterminé les coefficients de la formule de Cauchy de manière à représenter la dispersion dans l'intervalle des valeurs de λ qui correspondent aux radiations lumineuses, la formule s'applique encore pour les petites valeurs de λ qui correspondent aux radiations ultra-violettes. Mais, d'après d'importantes observations de M. Mouton[1], il n'en est plus de même pour les grandes valeurs de λ qui correspondent aux radiations obscures infra-rouges.

M. Mouton a en effet trouvé pour les indices ordinaires du quartz se rapportant à ces radiations, les nombres suivants :

λ EN MILLIÈMES DE MILLIM.	ω
0.88	1.5571
1.03	1.5338
1.45	1.5289
1.77	1.5247
2.14	1.5191

La courbe ayant pour ordonnées les valeurs de ω et pour abscisses celles de $\frac{1}{\lambda^2}$, a ainsi la forme que représente la figure 161. Cette

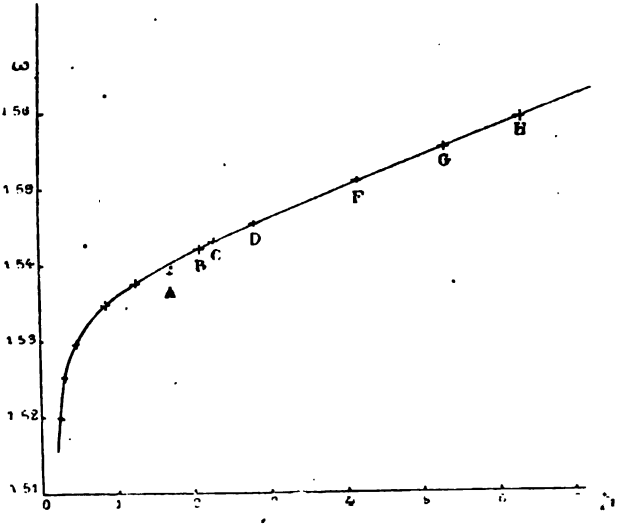


Fig. 161.

forme est manifestement celle d'une hyperbole ; la courbe ne peut donc

1. *Comptes rendus*, 88. — P. 967, 1078 et 1189 (1879).

e représentée ni par la formule de Cauchy à un seul terme qui donnait une droite, ni par la même formule avec un nombre quelconque termes qui conduirait à une forme parabolique. Pour arriver à une rme hyperbolique, il faut ajouter un terme en $\frac{1}{x}$ ou en λ^2. On est ainsi nduit à une expression de la forme

$$\omega = A + \frac{B}{\lambda^2} + C\lambda^2.$$

En prenant

$$\omega = 1.53461 + 0.003795\frac{1}{\lambda^2} - 0.00357\lambda^2$$

on représente en effet d'une manière convenable les observations de M. Mascart et celles de M. Mouton.

La formule à laquelle a été conduit M. Mouton avait été précédemment indiquée par Briot comme résultant de calculs théoriques. Elle porte dans la science le nom de ce savant mathématicien. L'addition du terme en λ^2, qui la caractérise, ne paraît nécessaire que lorsqu'on fait entrer en ligne de compte les radiations obscures. Pour les radiations lumineuses et ultra-violettes l'influence de ce terme devient négligeable, à cause de la faible valeur de λ^2.

Dispersion cristalline. — On peut appeler dispersion cristalline les variations que subissent, avec la longueur d'onde, les différences des indices principaux.

On ne possède que pour un très petit nombre de substances cristallisées des données suffisantes pour faire connaître avec précision cette dispersion cristalline. Les nombres inscrits dans les tableaux suivants en donneront quelques exemples.

CRISTAUX UNIAXES

RAIES	ω	$10^5.\delta = 10^4.(\varepsilon-\omega)$	ω	$10^5.\delta$	ω	$10^5.\delta$
	Quartz (Mascart).		Calcite (Mascart).		Apatite (Heusser).	
A	1.53902	+910	1 65013	—16728		
a	4018	01	162	»		
B	099	03	296	887		
C	188	07	446	972		
D	423	15	846	17192	1.64607	—455
E	718	18	1.66554	469	998	55
b	770	24	446	»	»	»
F	966	31	793	709	1.65332	65
G	1.55429	43	1.67620	18150	953	85
H	816	54	1.68330	553		
L	1.56019	55	706	765		
M	150	71	966	912		
N	400	81	1.69441	19185		
O	668	91	955	469		
P	842	80	1.70276	647		
Q			613	833		
R			1.71155	20127		

CRISTAUX BIAXES

RAIES	β	$10^5.\varpi$	$10^5.\nu$	$10^5\,\sigma$	β	$10^5.\varpi$	$10^5\,\nu$	$10^5.\sigma$
	Barytine (Heusser).				Topaze blanche du Brésil (Rudberg).			
B	1.63370	1045	112	1157	1.61049	742	209	951
C	476	45	14	59	144	56	209	45
D	745	52	15	57	375	34	14	49
E	1.64093	74	21	95	668	40	16	56
F	393	91	27	1208	914	38	13	51
G	960	1100	31	31	1.62365	58	11	69
H	1.65456	24	35	59	745	61	06	67
	Aragonite (Rudberg).				Gypse (von Lang) à 16°,8.			
B	1.67631	430	14882	15312	1.51941	784	198	982
C	779	24	959	83	1.52037	78	204	82
D	1.68157	32	15144	15576	287	61	05	66
E	634	50	370	820	581	75	11	86
F	1.69055	62	574	16056	826	73	199	72
G	856	82	954	456	831	91	196	87
H	1.70509	502	16283	785				

Si l'on néglige quelques anomalies qui paraissent pouvoir être attribuées à des erreurs d'observation, pour toutes ces substances, sauf pour le gypse, les différences des indices principaux vont en croissant, avec ces indices, du rouge au violet.

Lorsque les deux indices principaux sont représentés correctement par des formules de Cauchy à deux termes, $A + \frac{B}{\lambda^2}$ et $A' + \frac{B'}{\lambda^2}$, la différence est exprimée par la formule

$$A - A' + \frac{B - B'}{\lambda^2}.$$

En se reportant à la remarque précédente on voit qu'en général $B - B'$ est du même signe que $A - A'$, c'est-à-dire qu'à la plus grande valeur de A correspond en général la plus grande valeur de B.

Les tableaux suivants donnent la comparaison entre la dispersion cristalline observée et la même dispersion représentée par la formule $A - A' + \frac{B - B'}{\lambda^2}$.

RAIES	QUARTZ $10^8.\delta = 882 + 11.4 \frac{1}{\lambda^2}$			CALCITE $10^8.\delta = 16062 + 392.1 \frac{1}{\lambda^2}$			APATITE $10^8.\delta = 377 + 19.9 \frac{1}{\lambda^2}$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR.	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR.	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉR.
A	910	901	+ 9	16728	16740	—12			
B	903	906	— 3	16887	16894	— 7			
C	907	907	0	16972	16972	0			
D	915	914	+ 1	17192	17190	+ 2	435	435	0
b_1	924	924	0						
F	931	930	+ 1	17709	17721	—12	465	462	+ 3
G	943	943	0	18150	18175	—25	485	485	0
H	954	954	0	18553	18553	0			

RAIES	BARYTINE					
	$10^8.\varpi = 1005 + 18.7 \frac{1}{\lambda^2}$			$10^8.\nu = 100 + 5.4 \frac{1}{\lambda^2}$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE
B	1045	1045	0	112	112	0
C	1045	1049	— 4	114	113	— 1
D	1052	1059	— 7	115	116	— 1
F	1091	1085	+ 6	127	124	+ 3
G	1100	1106	— 6	131	130	+ 1
H	1124	1124	0	135	135	0

RAIES	ARAGONITE					
	$10^8.\varpi = 379 + 19.4 \frac{1}{\lambda^2}$			$10^8.\nu = 14196 + 328 \frac{1}{\lambda^2}$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE
B	430	419	+11	14882	14824	+58
C	424	424	0	14959	14959	0
D	432	435	— 3	15144	15142	+ 2
F	468	461	+ 7	15574	15587	—13
G	482	483	— 1	15954	15967	—13
H	502	502	0	16283	16283	0

RAIES	TOPAZE					
	$10^8.\varpi = 712 + 7.8 \frac{1}{\lambda^2}$			$10^8.\nu = 212$		
	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE	OBSERVÉ	CALCULÉ	DIFFÉRENCE
B	742	728	+12	209	212	— 4
C	736	730	+ 6	209	212	— 4
D	734	734	0	214	212	+ 2
F	738	745	— 7	213	212	+ 1
G	758	754	+ 4	211	212	— 1
H	761	761	0	206	212	— 6

Les différences entre les nombres observés et calculés sont du même ordre de grandeur que lorsqu'il s'agit des indices eux-mêmes. La formule de Cauchy à deux termes représente donc correctement la dispersion cristalline pour les radiations lumineuses.

Nous avons vu que cette formule ne peut, au moins pour le quartz, représenter à la fois la dispersion des radiations lumineuses et celle des radiations obscures. Il en est autrement pour la dispersion cristalline, comme il résulte du tableau suivant, dans lequel les δ correspondant aux radiations obscures ont été calculés en employant la formule appliquée plus haut aux radiations lumineuses.

λ	QUARTZ $10^5.\delta = 882 + 11.4 \frac{1}{\lambda^2}$		
	OBSERVÉ (MOUTON)	CALCULÉ	DIFFÉRENCE
8.884	890	896	— 6
1.08	890	891	— 1
1.45	880	887	+ 7
1.77	880	885	— 5
2.14	870	884	—14

Il résulte de là que si l'on cherchait à représenter l'indice extraordinaire du quartz par la formule de Briot, le coefficient de λ^2 serait sensiblement le même que pour l'indice ordinaire. On trouverait en effet

$$\omega = 1.53461 + 0.003795 \frac{1}{\lambda^2} - 0.00357 \lambda^2$$

$$\varepsilon = 1.54340 + 0.003916 \frac{1}{\lambda^2} - 0.00359 \lambda^2$$

d'où l'on déduirait

$$10^5.\delta = 879 + 12.1 \frac{1}{\lambda^2} - 2.3\lambda^2.$$

Le terme en λ^2, dans l'expression de δ, est, on le voit, négligeable.

La formule de Cauchy paraît donc représenter la dispersion cristalline dans une portion de l'échelle des radiations plus étendue que celle dans laquelle elle représente la dispersion ordinaire.

Quant au gypse, d'après les observations de M. von Lang, il fait exception, comme il le faisait déjà pour la dispersion ordinaire, et la disper-

sion cristalline ne peut être correctement représentée qu'en ajoutant un terme en $\frac{1}{\lambda^4}$. Des nombres données plus haut, on déduit

$$10^5.\varpi = 846 - 44.64\frac{1}{\lambda^2} + 6.8387\frac{1}{\lambda^4}$$

$$10^5.\nu = 163 + 25.09\frac{1}{\lambda^2} - 4.592\frac{1}{\lambda^4}$$

Cette anomalie pourrait être mise sur le compte des erreurs d'observation; toutefois M. von Lang en a appuyé la réalité en montrant qu'elle se manifeste aussi dans l'écartement angulaire des axes optiques, comme il résulte des nombres suivants, mesurés à la température de 18°:

2V = 57° 18′	Raie B
57° 42′	C
58° 8′	D
58° 5′	E
57° 28′	F
56° 13′	G

L'écartement 2V passe par un maximun pour D.

D'après M. von Lang une anomalie analogue se retrouve encore dans l'orientation de l'ellipsoïde.

Dans le cas, qui parait être le plus général, où la formule de Cauchy à deux termes suffit à représenter la dispersion cristalline, on peut considérer comme une mesure de la grandeur de ce phénomène le rapport $\frac{B - B'}{A - A'}$. Ce rapport parait être ordinairement assez petit; pour les substances qu'on vient d'étudier, on a

	$\frac{A - A'}{B - B'} =$
Quartz	0.013
Calcite	0.023
Apatite	0.052
Baryte ϖ	0.019
— ν	0.054
Aragonite ϖ	0.051
— ν	0.023
Topaze ϖ	0.011
— ν	0.0

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, quelle importance avait

rapport $\frac{B - B'}{A - A'}$ lorsqu'il s'agit d'employer le compensateur à mesurer la **biréfringence** des lames cristallines.

Dispersion des axes optiques. — C'est ordinairement par l'observation de la dispersion des axes optiques qu'on apprécie la dispersion cristalline des substances biaxes. Nous avons déjà parlé de ce phénomène et des procédés au moyen desquels on peut l'observer.

Nous avons vu également que si V est le demi-écartement angulaire des axes optiques, on a sensiblement

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{\varpi}{\nu}.$$

Si l'on peut écrire

$$\varpi = g + h\frac{1}{\lambda^2}, \qquad \nu = g' + h'\frac{1}{\lambda^2},$$

on aura

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{g + \frac{h}{\lambda^2}}{g' + \frac{h'}{\lambda^2}},$$

et, si l'on peut considérer $\frac{h}{\lambda^2}$ et $\frac{h'}{\lambda^2}$ comme petits par rapport à g et à g', il viendra sensiblement

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{g}{g'}\left[1 + \left(\frac{h}{g} - \frac{h'}{g'}\right)\frac{1}{\lambda^2}\right].$$

Lorsque $\frac{h}{g} > \frac{h'}{g'}$, le V correspondant aux grandes valeurs de λ, c'est-à-dire au rouge, est plus petit que le V correspondant aux petites valeurs de λ, c'est-à-dire au violet, on a $\rho < v$. L'inverse a lieu lorsque $\frac{h}{g} < \frac{h'}{g'}$.

Dans l'un et l'autre cas, les valeurs de V croissent ou décroissent régulièrement lorsqu'on va du rouge au violet. Cependant nous avons vu dans le paragraphe précédent, que le gypse fait, sous ce rapport, exception, si l'on s'en rapporte aux recherches de M. v. Lang.

Dans les cristaux rhombiques, les axes optiques sont astreints à se trouver dans l'un des trois plans de symétrie, et le plus habituellement, ils sont, pour toutes les couleurs, contenus dans le même plan. Le plus souvent même, leur écartement diffère fort peu, de l'extrémité

à l'autre du spectre ; la différence dépasse rarement 1° ou 2°, et est souvent inférieure à ce chiffre.

C'est ainsi qu'on a pour l'aragonite, d'après M. Kirchhof :

2V = 18° 5′23″	B	
6′55″	C	
11′ 7″	D	
16′45″	E	
22′14″	F	
31′30″	G	
40′20″	H	

et pour le soufre, d'après M. Des Cloizeaux,

2V = 69° 2′	rouge
5′	jaune
13′	bleu.

Le sulfate de baryte est considéré comme ayant une dispersion considérable avec les nombres suivants :

2V = 36°12′	rouge	D. Cl.
36° 4′	jaune	
37°28′	vert	
38°28′	violet.	

L'hyposulfate de soude ($Na^2O,S^2O^5 + 2aq$) a une dispersion des axes encore plus grande

2V = 73°38′	rouge	D. Cl.
74°46′	jaune	
77°36′	vert.	

Pour la santonine, la dispersion prend une grandeur exceptionnelle :

Écartement dans l'air : 2E = 38°50′	rouge	D. Cl.
42°13′	jaune	
47°46′	vert	
50°37′	bleu.	

Elle est cependant plus grande encore dans le sphène

2E = 53° à 53°30′	rouge
41° 47°	vert
32° 27′	bleu.

Comme nous l'avons déjà fait remarquer page 252, la dispersion des axes peut se faire de telle manière que les axes soient contenus, pour certaines couleurs, dans un plan principal, et pour d'autres couleurs, dans un plan principal perpendiculaire. Tel est le cas de certains échantillons de brookite (TiO^2 rhombique) dont les axes rouges sont

ontenus dans le plan p, tandis que les axes verts sont contenus dans le plan g^1.

Action de la chaleur sur la dispersion. — La réfringence est modifiée par la chaleur; il faudrait donc, pour que la dispersion ne fût pas modifiée par la même influence, que la variation de l'indice avec la température fût la même pour toutes les longueurs d'onde.

D'après quelques observations de M. Stefan[1] la variation de l'indice avec la température est en effet bien près d'être la même avec toutes les couleurs, au moins pour un certain nombre de corps; c'est ce qui résulte des nombres suivants.

	VARIATIONS DE $n \times 10^5$ POUR 100°			
	B	D	F	H
NCl.	374	370		362
KCl.	349	346	346	
$CaFl^2$.		124	123	124

Pour le verre au contraire, les variations sont très différentes pour les différentes valeurs de λ.

B	C	D	E	F	G
202	206	230	276	290	345

ce qui peut se traduire par la formule

$$105 + \frac{4}{90}\frac{1}{\lambda^2},$$

λ étant exprimé en millièmes de millimètres.

On peut mentionner aussi les expériences de M. Arzruni[2], que nous avons déjà citées (p. 503), sur les trois sulfates isomorphes de strontiane, de baryte et de plomb; elles montrent que les variations d'un quelconque des indices principaux sont peu différentes, quelle que soit celle des 3 raies C, D, F, auxquelles cet indice correspond.

Influence de la chaleur sur la dispersion cristalline. — Les renseignements que nous possédons touchant l'influence que la chaleur exerce sur la dispersion cristalline sont extrêmement peu nombreux.

Nous citerons cependant les expériences de M. Arzruni qui ont donné les résultats suivants.

1. *Wien. Ak. Ber.* 63, p. 223 (1871).
2. *Groth. Zeit.* I, p. 115 (1877).

e'

si

l

en

i

ax

co

d.

éc

A mesure que la température s'élève, l'angle 2E décroît, et il arrive une température, égale à 17°,8, où les axes bleus sont réunis ; au-dessus de cette température, ces axes s'ouvrent de nouveau, mais dans un plan parallèle à g^1 et s'écartent ensuite de plus en plus. Les axes optiques du vert se réunissent lorsque la température est égale à 35°,7 pour s'écarter ensuite dans le plan g^1, et ainsi de suite pour toutes les couleurs jusqu'au rouge. Le phénomène est donc le même que celui qui a été signalé plus haut pour le gypse.

Voici les nombres observés par M. Laspeyres. Les angles comptés dans un plan perpendiculaire à g^1 sont marqués du signe +, ceux qui sont comptés dans le plan g^1 ont le signe —.

	VALEURS DE 2E					
AUX TEMPÉRATURES	— 1°,7	+ 17°,8	+ 35°,7	+ 45°,8	+ 58°,2	+ 85°,2
Bleu	+ 9°29′	0	— 8°42′	— 11°8′	— 13°2′	— 17°7
Vert	+ 12°27′		— 0	— 7°8′	— 10°32′	— 15°15′
Jaune	+ 14°32′		+ 8°9′	0	— 7°14′	— 13°14′
Rouge	+ 16°30′		+ 11°1′	+ 8°40′	0	— 10°47′

On voit qu'au-dessus de 60° environ, tous les axes s'ouvrent dans le plan g^1 et que, pour toutes les couleurs, le symbole optique est alors $p(\underline{ba})$.

Pour tirer parti de ces nombres, nous remarquons qu'à cause de la petitesse de l'angle, on peut admettre $\operatorname{tg} E = \beta \operatorname{tg} V$, et par conséquent

$$\operatorname{tg}^2 E = \beta^2 \frac{\varpi}{\nu}.$$

Les nombres ci-dessus donnent

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 E &= 0.0068 - 0.0299t \quad \text{bleu} \\ &\ 0.0118 - 0.0293t \quad \text{vert} \\ &\ 0.0164 - 0.0295t \quad \text{jaune} \\ &\ 0.0207 - 0.0292t \quad \text{rouge.} \end{aligned}$$

Ces formules, calculées en partant des observations faites à — 1°,7 et à 85°,2 donnent, pour les températures auxquelles $\operatorname{tg}^2 E$ devient égal à zéro, les nombres ci-dessous :

	CALCULÉ	OBSERVÉ
Bleu	20°.2	17°.8
Vert	34.7	35.7
Jaune	47.8	45.8
Rouge	60.9	58.2

Les différences ne paraissent pas dépasser les erreurs probables d'observation.

	RAIES	VARIATIONS POUR 1° D'AUGMENTATION DE TEMPÉRATURE					
		$10^7.d\varpi$		$10^7.d\nu$		$10^7.d\sigma$	
		ENTRE 20° et 100°	ENTRE 100° et 200°	ENTRE 20° et 100°	ENTRE 100° et 200°	ENTRE 20° et 100°	ENTRE 100° et 200°
Sulfate de strontiane. .	C	— 62	— 51	+ 20	+ 24	— 42	— 27
	D	— 57	— 58	+ 26	+ 20	— 31	— 5[illegible]
	F	— 57	— 60	+ 30	+ 32	— 27	— 28
Sulfate de baryte . . .	C	— 52	— 84	— 14	+ 35	— 66	— 49
	D	— 52	— 80	— 2	+ 30	— 54	— 50
	F	— 69	— 71	— 1	+ 28	— 70	— 55
Sulfate de plomb. . . .	C	—106	—124	+ 16	+ 27	— 90	— 97
	D	—106	—134	+ 41	+ 23	— 65	—111
	F	—102	—143	+ 36	+ 16	— 65	—127

On voit que les constantes de la biréfringence ϖ, ν et σ varient presque exactement de la même façon pour chacune des 3 raies C, D, F. Les différences, très irrégulières, que l'on observe, paraissant être simplement attribuables à des erreurs d'observation. On peut donc dire que la dispersion cristalline varie tout au moins fort peu, pour ces trois substances, jusqu'à 200°.

M. Laspeyres a publié, au sujet de l'influence de la chaleur sur la glaubérite ($CaSO^4 + K^2SO^4$), un mémoire intéressant[1] où les variations de la dispersion cristalline ont été étudiées.

La glaubérite cristallise dans le système clinorhombique et l'on a $ph^1 = 67°49'$

$$a : b : c = 1.221 : 1 : 1.027$$

$p(\underline{ca}) = 82°\ 1'$	bleu (sulfate de cuivre ammoniacal)	vers — 2°
81°32′	vert Tl	
81°25′	jaune Na	
81° 8′	rouge Li	
81°37′	blanc.	

A — 2°, le plan des axes optiques de toutes les couleurs est ainsi normal à g^1, et l'écartement angulaire des axes dans l'air est

$2E = +\ 9°28'$	bleu
$+\ 12°27'$	vert
$+\ 14°32'$	jaune
$+\ 16°30'$	rouge

1. *Groth. Zeit.* I, p. 529 (1877).

A mesure que la température s'élève, l'angle 2E décroît, et il arrive ne température, égale à 17°,8, où les axes bleus sont réunis ; au-dessus e cette température, ces axes s'ouvrent de nouveau, mais dans un lan parallèle à g^1 et s'écartent ensuite de plus en plus. Les axes ptiques du vert se réunissent lorsque la température est égale à 35°,7 our s'écarter ensuite dans le plan g^1, et ainsi de suite pour toutes les couleurs jusqu'au rouge. Le phénomène est donc le même que celui qui a été signalé plus haut pour le gypse.

Voici les nombres observés par M. Laspeyres. Les angles comptés dans un plan perpendiculaire à g^1 sont marqués du signe +, ceux qui sont comptés dans le plan g^1 ont le signe —.

	VALEURS DE 2E					
AUX TEMPÉRATURES	— 1°,7	+ 17°.8	+ 35°,7	+ 45°,8	+ 58°,2	+ 85°,2
Bleu.	+ 9°29′	0	— 8°42′	— 11°8′	— 13°2′	— 17°7
Vert.	+ 12°27′		— 0	— 7°8′	— 10°32′	— 15°15′
Jaune	+ 14°32′		+ 8°9′	0	— 7°14′	— 13°14′
Rouge.	+ 16°30′		+ 11°1′	+ 8°40′	0	— 10°47′

On voit qu'au-dessus de 60° environ, tous les axes s'ouvrent dans le plan g^1 et que, pour toutes les couleurs, le symbole optique est alors $p(\mathfrak{ba})$.

Pour tirer parti de ces nombres, nous remarquons qu'à cause de la petitesse de l'angle, on peut admettre $\operatorname{tg} E = \beta \operatorname{tg} V$, et par conséquent

$$\operatorname{tg}^2 E = \beta^2 \frac{\omega}{\nu}.$$

Les nombres ci-dessus donnent

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}^2 E &= 0.0068 - 0.0299t && \text{bleu} \\ &\ 0.0118 - 0.0293t && \text{vert} \\ &\ 0.0164 - 0.0293t && \text{jaune} \\ &\ 0.0207 - 0.0292t && \text{rouge.} \end{aligned}$$

Ces formules, calculées en partant des observations faites à — 1°,7 et à 85°,2 donnent, pour les températures auxquelles $\operatorname{tg}^2 E$ devient égal à zéro, les nombres ci-dessous :

	CALCULÉ	OBSERVÉ
Bleu.	20°.2	17°8
Vert.	34.7	35.7
Jaune	47.8	45.8
Rouge	60.9	58.2

Les différences ne paraissent pas dépasser les erreurs probables d'observation.

CHAPITRE XIV

PHÉNOMÈNES MAGNÉTIQUES

Magnétisme et diamagnétisme des corps. — On sait, depuis Faraday, que tous les corps de la nature sont sensibles aux actions magnétiques. Les uns sont *paramagnétiques* (ou, pour abréger le langage, *magnétiques*), comme le fer doux, et sont *attirés* par les aimants; les autres, comme le bismuth, sont *diamagnétiques*, et *repoussés* par les aimants. Sauf le sens de l'action, les lois du diamagnétisme sont identiques à celles du paramagnétisme.

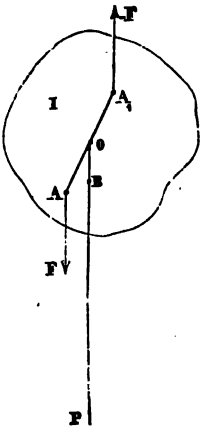


Fig. 162.

Sous l'influence d'un pôle d'aimant, un corps quelconque est soumis à l'action de deux forces de sens contraire, appliqués en des points différents. Ces deux forces se décomposent en un *couple* et une force. Cette force est attractive, si le corps est magnétique; elle est répulsive, si le *corps* est diamagnétique. Si le pôle P (fig. 162) est suffisamment éloigné du corps pour qu'on le puisse considérer comme placé à l'infini, les deux forces exercées aux points A et A_1 sont parallèles et dirigées suivant la direction OP qui unit à P un point O du corps: elles sont égales et de signe contraire; le couple subsiste donc seul, et la force, attractive ou répulsive, disparaît. Le pôle d'aimant n'exerce plus sur le corps qu'une action directrice.

La terre joue le rôle d'un pôle d'aimant situé à l'infini.

On peut aussi exercer sur un corps une action sensiblement identique à celle d'un pôle situé à l'infini, en le plaçant entre deux pôles d'aimant, du nom contraire, d'égale intensité, et situés à égale distance du corps

s forces exercées par chacun des deux pôles se détruisent comme ales et de sens contraire, il ne reste plus que les couples qui s'autent comme égaux et de même sens.

Les phénomènes magnétiques sont *particulaires*, en ce sens qu'une *rticule* du corps, quelque petite qu'elle soit, est susceptible de prendre eux pôles, comme le corps tout entier.

On représente les particularités diverses du phénomène, en disant que e pôle d'aimant décompose le fluide magnétique, supposé à l'état neutre, le la particule, attire le fluide de nom contraire si le corps est magnétique, le fluide de même nom si le corps est diamagnétique. Avec un certain état de décomposition des deux fluides, les résultantes des actions du pôle d'aimant sur chacun des deux fluides sont appliquées en deux points qui sont les pôles de la particule. Si l'on considère le corps tout entier, les forces positives donnent une résultante appliquée en un certain point A ; les forces négatives donnent une résultante égale appliquée en un certain point A_1. Les deux points A et A_1 sont les pôles du corps. La position de ces pôles change avec l'orientation du corps par rapport au pôle d'aimant P.

Si le corps est filiforme, c'est-à-dire si les particules sont alignées suivant une même droite, les pôles A et A_1 sont toujours situés sur cette droite.

Lorsque le corps filiforme est magnétique, il est clair que, pour être en équilibre en présence du pôle P, il faut que la direction A A_1 soit dirigée suivant OP, le pôle de nom contraire, sollicité par une force attractive, étant dirigé vers P. On dit alors avec Faraday, que l'aiguille se place dans la direction *axiale*.

Si l'aiguille est diamagnétique, le pôle tourné vers P est repoussé, la direction axiale n'est donc plus une position d'équilibre. L'aiguille est en équilibre, lorsque sa direction est perpendiculaire à OP, puisqu'alors les actions exercées par P sur chacune des particules se détruisent. Le corps est dit alors prendre la position *équatoriale*.

Théorie de l'induction magnétique. Ellipsoïde d'induction. — Si le corps, toujours supposé isotrope, a une forme quelconque, il est clair qu'il prendra, en présence d'un pôle d'aimant, une orientation déterminée par la position de ce pôle, par la forme et la nature magnétique du corps, par le mode suivant lequel le corps est forcé de se mouvoir. Nous allons chercher à déterminer cette orientation.

Supposons un corps quelconque soumis à l'influence d'un pôle d'aimant situé à l'infini, de telle sorte qu'en tous les points de l'espace l'action exercée par ce pôle soit égale et parallèle ; le corps est dit

placé dans un *champ magnétique uniforme*[1]. Sur chacune des particules du corps, l'induction de l'aimant, jointe à celle des particules environnantes, développe une certaine distribution du magnétisme telle que deux pôles de nom contraire se produisent en deux points séparés par la distance $2l$.

En chacun de ces points se trouve accumulée une certaine quantité m de fluide. La quantité m est la même, mais l'espèce du fluide est opposée pour les deux pôles. L'action exercée par la force magnétique F sur la particule est un couple dont le moment est F : $2lm. \cos u$, si u est l'angle compris entre les directions de F et de l. Si nous portons sur la direction du bras de levier du couple, une longueur 2μ qui représentera, à une échelle conventionnelle, le produit $2lm$, le moment du couple sera $2\mu F$. La quantité μ est le *moment magnétique* de la particule. On peut encore la désigner sous le nom *d'intensité de la magnétisation*, car il est évident qu'elle sert de mesure à la magnétisation de la particule. Nous adopterons cette dernière dénomination pour ne pas introduire de confusion entre le *moment* magnétique et le *moment* du couple directeur.

On admet comme démontré par l'expérience que l'intensité μ de la magnétisation varie d'une particule à une autre, mais que, pour *toutes* les particules situées dans un champ magnétique uniforme, elle a la même direction. On admet en outre que, pour une particule *donnée*, dans un corps donné, elle est proportionnelle à la force magnétique F qui agit dans le champ. Elle varie d'ailleurs avec la direction de F.

Le couple directeur total qui agit sur le corps a pour moment la somme des moments de chacun des couples particulaires dont les plans sont tous parallèles entre eux. Les bras de ces couples étant aussi tous parallèles et la force F étant pour chacun d'eux égale et parallèle, le couple total a pour force F et pour bras de levier une longueur égale à $2\Sigma\mu = 2L$, dont la direction est parallèle à celle de tous les bras des couples particulaires de levier. La longueur 2L représente en grandeur et en direction ce que nous appellerons *l'intensité de la magnétisation* du corps.

Cette quantité varie proportionnellement à F. Si donc par le point O (fig. 162), nous menons une longueur OB égale et parallèle à F, et si OA représente L en grandeur et en direction, nous avons entre OA et OB la relation bien connue qui existe entre la force élastique et le déplacement, etc. La théorie développée dans le chapitre I nous montre alors

1. W. Thomson. *On the theory of magnetic Induction in crystalline and non crystalline substances. Phil. Mag.* (4) I, 177 (1851).

que lorsque le point B décrit une sphère, c'est-à-dire lorsqu'on tourne le corps dans le champ magnétique de manière à lui faire prendre toute les orientations possibles par rapport à F, le point A décrit un ellipsoïde, que nous appellerons *l'ellipsoïde d'induction*.

Si le corps est sphérique, il est clair que lorsque nous le supposerons en outre isotrope, l'action magnétique étant la même dans toutes les directions, l'ellipsoïde d'induction sera une sphère. Mais si le corps est cristallisé, l'action magnétisante pourra s'exercer d'une façon différente suivant des directions cristallographiques différentes, et la surface d'induction sera en général un ellipsoïde dont la grandeur et la direction des axes seront déterminées, pour chaque corps de forme sphérique, par les orientations des axes cristallographiques et les propriétés particulières de la substance.

Cet ellipsoïde sera soumis aux conditions générales de symétrie bien connues. Il est une sphère dans le cas d'un corps isotrope ou cubique; un ellipsoïde de révolution pour les cristaux uniaxes; un ellipsoïde à trois axes inégaux pour les autres systèmes. Dans les cristaux rhombiques, les axes de l'ellipsoïde coïncident avec les axes de symétrie binaire; dans les cristaux clinorhombiques, un axe de l'ellipsoïde coïncide avec un axe de symétrie, les deux autres occupent dans le plan de symétrie une position que la cristallographie ne suffit plus à déterminer; dans les cristaux anorthiques, la cristallographie ne détermine plus l'orientation d'aucun des trois axes.

La théorie mathématique du magnétisme est due à Poisson [1]. Cet illustre savant a envisagé seulement le cas des solides isotropes, mais il avait nettement indiqué l'application possible de ses formules générales au cas des substances cristallisées, en réclamant des expériences qui manquaient encore au moment où il écrivait.

Cet appel à l'expérimentation ne trouva pas d'écho. Les particularités de l'induction magnétique des cristaux ne furent découvertes et publiées qu'en 1847 par Plücker [2]. A la suite de ce premier mémoire parurent successivement sur le même sujet un assez grand nombre de travaux qui eurent pour auteur Plücher lui-même [3], Plücker et Beer [4], Knoblauch et Tyndall [5].

1. *Mém. de l'Inst.*, 1821-22.
2. *Pogg. Ann.*, 72, 315 (1847).
3. *Pogg. Ann.*, 76, 576 (1849). — 77, 447 (1849). — 26, 1 (1852).
4. *Pogg. Ann.*, 81, 114 (1850). — 82, 42 (1851).
5. *Pogg. Ann.*, 79, 232 (1850). — 81, 481 (1850).

Couple directeur agissant sur un corps placé dans un champ magnétique uniforme. — En 1858[1] Plücker publia une théorie des phénomènes d'induction cristalline. Cette théorie se déduit très simplement de l'existence de l'ellipsoïde d'induction. Appelons en effet a^2, b^2, c^2 les axes de cet ellipsoïde; $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ seront ceux de l'ellipsoïde inverse.

Supposons une sphère cristalline suspendue par son centre de manière à ne pouvoir tourner qu'autour d'un axe vertical. Nous supposerons la force magnétique horizontale et dirigée suivant un diamètre ρ' de l'ellipse découpée dans l'ellipsoïde inverse par le plan horizontal. Les axes de cette ellipse sont $\frac{1}{r'}$ et $\frac{1}{r''}$. La force F est, au moment considéré, dirigée parallèlement à un diamètre de l'ellipsoïde qui a pour longueur ρ'.

On sait que si, par l'extrémité de ρ', on mène le plan tangent à l'ellipsoïde inverse et si on abaisse du centre une perpendiculaire sur ce plan, celle-ci détermine la direction du diamètre ρ_0 de l'ellipsoïde d'induction à l'extrémité duquel la force F, parallèle à ρ', est appliquée et produit le couple directeur. Nous appellerons U l'angle de ρ avec ρ_0.

Le moment du couple directeur est

$$2F\rho_0 \sin U.$$

En se reportant à l'équation (17) de la page 16, (dans laquelle les mêmes notations sont employées), on verra que

$$\rho_0 \cos U = \frac{1}{\rho'^2},$$

ce qui donne pour le moment du couple

$$\frac{2F \operatorname{tg} U}{\rho'^2}.$$

Si nous supposons que la sphère cristalline ne peut se mouvoir qu'autour d'un axe perpendiculaire au plan de l'ellipse dont ρ' est un rayon, elle n'est sollicitée au mouvement que par la projection du couple sur ce plan, soit par le moment

$$\frac{2F}{\rho'^2} \operatorname{tg} U \cos\alpha,$$

α étant l'angle du plan de l'ellipse, avec celui qui contient ρ_0 et ρ'.

1 *Phil. mag.* (4) I, 177 (1851).

U′ est l'angle que fait avec ρ' la projection de ρ_0, le moment du couple moteur est

$$M = \frac{2F}{\rho'^2} \operatorname{tg} U'.$$

D'après la construction qui donne la direction de ρ_0 lorsqu'on connaît celle de ρ', il est clair que la projection de ρ_0 est la normale à la tangente qui, dans le plan horizontal, touche l'ellipse à l'extrémité de ρ'. L'angle U′ est donc, dans cette ellipse, l'angle compris entre le rayon et la normale à la tangente menée à l'extrémité du rayon. Il est aisé de voir qu'on a

$$\operatorname{tg} U' = \rho'^2 (r'^2 - r''^2) \sin\omega \cos\omega,$$

ω et U′ étant comptés, à partir de ρ', c'est-à-dire de la direction de la force F, dans le sens des aiguilles d'une montre. Le couple directeur est ainsi

$$M = F(r'^2 - r''^2) \sin 2\omega.$$

Lorsque M est positif, le couple tend à tourner en sens inverse des aiguilles.

Pour qu'il y ait équilibre, il faut que $\omega = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire que l'un des deux axes de l'ellipse soit dans la direction de la force magnétique.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut que $\frac{dM}{d\omega}$ soit positif ou que

$$2F(r'^2 - r''^2) \cos 2\omega > 0.$$

Si le corps est magnétique, F est positif, et l'équilibre n'est stable que pour $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque l'axe minimum $\frac{1}{r'}$ de l'ellipse inverse est dans la direction de la force magnétique; r' se place *axialement*.

Si au contraire le corps est diamagnétique, F est négatif et l'équilibre n'est stable que lorsque c'est le plus grand axe de l'ellipse inverse qui coïncide avec la direction de la force; r' se place *équatorialement*.

Lorsque la sphère tourne autour d'un axe quelconque, le couple moteur n'étant pas perpendiculaire à l'axe, il ne peut y avoir équilibre qu'autant que, par des liaisons suffisantes, on oblige la sphère à

tourner autour de l'axe. Ces liaisons sont inutiles lorsque le corps tourne autour d'un des trois axes de l'ellipsoïde.

Si, par exemple, l'axe de rotation est l'axe $\frac{1}{c}$ de l'ellipsoïde inverse ou c de l'ellipsoïde principal, l'équilibre est obtenu, avec les substances magnétiques, lorsque l'axe a se place dans la direction de la force ou axialement, l'axe b se plaçant équatorialement. L'inverse a lieu avec une substance diamagnétique.

Si, lorsque la sphère cristalline est obligée de tourner autour d'un axe quelconque, on la laisse osciller autour de sa position d'équilibre, la durée T de l'oscillation est donnée par la relation

$$T^2 = \frac{\pi^2 I}{2F(r'^2 - r''^2)},$$

I étant le moment d'inertie de la sphère.

Si on fait tourner la sphère autour de l'axe a, la durée T_a de l'oscillation est :

$$T_a = \frac{\pi^2 I}{2} \cdot \frac{1}{b^2 c^2}.$$

Autour des axes b et c, les durées d'oscillation sont respectivement

$$T_b^2 = \frac{\pi^2 I}{2F} \cdot \frac{1}{a^2 - c^2},$$

$$T_c^2 = \frac{\pi^2 I}{2F} \cdot \frac{1}{a^2 - b^2},$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{T_b^2} = \frac{1}{T_a} + \frac{1}{T_c^2}.$$

Axes magnétiques. — Nous appellerons *axes magnétiques* les droites analogues aux *axes optiques*, c'est-à-dire les perpendiculaires aux sections circulaires de l'ellipsoïde inverse. Si l'on appelle 2V l'écartement angulaire de ces axes autour de l'axe a, on a :

$$\sin^2 V = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2} = \frac{T_b^2}{T_a^2},$$

$$\cos^2 V = \frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2} = \frac{T_b^2}{T_c^2},$$

$$\operatorname{tg}^2 V = \frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2} = \frac{T_c^2}{T_a^2}.$$

θ' et θ'' sont les angles que fait, avec chacun des axes magnétiques un axe quelconque de rotation, on a :

$$r'^2 - r''^2 = (a^2 - c^2) \sin\theta' \sin\theta'',$$

et par conséquent

$$T^2 = \frac{\pi^2 I}{2F(a^2 - c^2)} \frac{1}{\sin\theta' \sin\theta''} = \frac{T_b^2}{\sin\theta' \sin\theta''}.$$

Expériences de Plücker vérifiant les formules théoriques. — Pour vérifier la théorie et l'appliquer aux faits observés, on suspend le cristal entre deux pôles d'un électro-aimant (fig. 163). Plücker employait un large électro-aimant actionné par 6 éléments Grove, et dont les pôles étaient distants de 1,6 pouces.

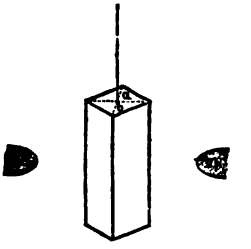


Fig. 163.

L'espace qui comprend les pôles et le cristal peut être garanti par une cage de verre contre l'influence des courants d'air. Le cristal, oscillant à égale distance des deux pôles, est suspendu par le double fil de cocon d'une balance de torsion.

Le cristal peut être tourné de manière a former une sphère, mais la taille est difficile, et l'on peut se borner à rendre la section symétrique dans le plan perpendiculaire à l'axe. On forme alors un cylindre à base circulaire dont l'axe est celui de rotation. On peut aussi tailler une lame à contours circulaires qu'on fait tourner soit autour d'un axe perpendiculaire à la lame, soit autour d'un axe situé dans le plan de la lame. Si le pôle de l'aimant n'est pas trop près du cristal, si celui-ci est petit, sa forme n'influe pas beaucoup sur son orientation, et on peut lui laisser sa forme naturelle. Lorsqu'on n'a pour but que de voir suivant laquelle, de deux directions connues, le cristal s'orientera, on peut tailler de petits cubes dont les faces sont perpendiculaires à ces deux directions.

Il est bien entendu que, dans la taille artificielle du cristal, la trace des directions cristallographiques doit toujours être conservée.

L'observation montre que, conformément à la théorie, les cristaux cubiques prennent des orientations qui ne dépendent que de leur forme et nullement des directions de leurs axes cristallographiques.

Les cristaux à un axe principal ne prennent pas non plus d'orientation déterminée lorsqu'ils tournent autour de cet axe. Au contraire lorsque l'axe de rotation est perpendiculaire à l'axe principal, celui-ci se place, suivant les cas, soit axialement, soit équatorialement. Nous

aurons à distinguer dans ces cristaux ceux qui sont paramagnétiques et ceux qui sont dimagnétiques. Nous désignerons les premiers par la lettre π, les seconds, par la lettre δ. Nous noterons les axes de l'ellipsoïde principal magnétique $\mathfrak{a}, \mathfrak{c}$, avec $\mathfrak{a} > \mathfrak{c}$. Lorsque $\mathfrak{a}$ est dirigé suivant l'axe principal, on peut dire, par analogie avec les phénomènes optiques, que le cristal est négatif, on peut donc le noter $-\pi$ ou $-\delta$, suivant le sens du magnétisme. Il sera noté $+\pi$ ou $+\delta$ si c'est l'axe minimum d'induction $\mathfrak{c}$ qui coïncide avec l'axe principal.

Pour les cristaux orthorhombiques, les axes de l'ellipsoïde d'induction coïncident avec ceux de symétrie. Si l'on suspend le cristal de manière que l'un des axes cristallographiques, *c* par exemple, soit vertical, on constate que l'équilibre n'est obtenu que dans la position où l'un des deux axes perpendiculaires se place axialement, et le second équatorialement. Supposons que l'on ait fait successivement les trois observations suivantes :

AXES DE ROTATION	ORIENTATION	
	AXIALE	ÉQUATORIALE
a	*c*	*b*
b	*a*	*c*
c	*a*	*b*

le cristal étant diamagnétique. On en conclura que l'axe d'*induction* dirigé suivant *b* est plus grand que celui qui est dirigé suivant *c*, et que celui-ci est plus grand que celui qui est dirigé suivant *a*. Par analogie avec une notation employée pour les propriétés optiques, on pourra donc noter ce cristal

$$\delta(\mathfrak{cab}).$$

Il serait noté au contraire

$$\pi(\mathfrak{bca}).$$

si, les observations d'orientation restant les mêmes, le cristal était paramagnétique.

Si le cristal était clinorhombique, on déterminerait les deux directions des axes d'induction situés dans le plan de symétrie en faisant osciller le cristal autour de l'axe de symétrie. Les observations ne peuvent pas avoir, on le conçoit, une grande rigueur.

On peut, comme l'a fait Plücker, pousser un peu plus loin l'observation et la vérification de la théorie, en faisant osciller les cristaux autour de leurs positions d'équilibre, et mesurant, dans chaque cas particulier, la durée T de leurs oscillations.

1° *Formiate de cuivre.* — Supposons d'abord que nous expérimentions avec le *formiate de cuivre*, qui cristallise dans le système clinorhombique. On a $p/h^1 = 78^\circ 55'$ et $m/m = 89^\circ 8'$; un clivage facile est parallèle à p. Le cristal est paramagnétique.

On taille une lame circulaire parallèle au plan de symétrie; sur cette lame, on note la direction du clivage p; on suspend la lame horizontalement entre les deux pôles, et on constate que la direction axiale fait un angle de 3° environ avec une normale au clivage (fig. 164). On constate ensuite que l'axe d'induction qui coïncide avec l'axe de symétrie est l'axe moyen, et par conséquent que celui qui est à peu près perpendiculaire à p est l'axe maximum a.

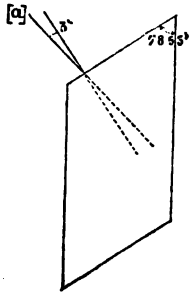


Fig. 164.

On prend alors une sphère de 1 centimètre environ de diamètre taillée dans un beau cristal; on la pose sur un petit anneau de mica très mince, rattaché par trois fils de soie à la balance de torsion, et on la fait osciller successivement autour de chacun des axes d'induction, en comptant le nombre des oscillations, ce qui donne $\frac{1}{T}$. Dans deux séries d'observations, faites l'une avec 6 éléments, l'autre avec 12 éléments de pile, on trouve les résultats suivants :

AXES DE SUSPENSION	AVEC 6 ÉLÉMENTS	AVEC 12 ÉLÉMENTS	
a	22.5 à 23 oscill.	31 à 31.5 oscill.	$\frac{1}{T_a}$
b	55	73	$\frac{1}{T_b}$
c	49	67	$\frac{1}{T}$

On constate qu'on a, avec la première série :

$$\frac{1}{T_a^2} + \frac{1}{T_c^2} = 2918, \qquad \frac{1}{T_c^2} = 2809,$$

avec la seconde

$$\frac{1}{T_a^2} + \frac{1}{T_c^2} = 5166, \qquad \frac{1}{T_c^2} = 5329;$$

ce qui vérifie, avec une exactitude satisfaisante, la relation théorique

$$\frac{1}{T_a^2} + \frac{1}{T_c^2} = \frac{1}{T_b^2}.$$

On déduit d'ailleurs de ces nombres

$$\operatorname{tg} V = \frac{T_c}{T_a} = \frac{23}{49} = \frac{67}{31}.$$

d'où sensiblement $V = 25^\circ,8$.

On peut aussi trouver V, comme on le fait pour les propriétés optiques (V. page 395), en déterminant les *sections principales*, c'est-à-dire les deux directions axiale et équatoriale, d'une lame suspendue de manière que son plan soit horizontal, et taillée obliquement aux axes de l'ellipsoïde. Plücker a trouvé par ce procédé, en se servant d'une lame parallèle au plan $b^{\frac{1}{2}}$, $V = 25^\circ,3$.

Il nous reste à savoir quel est le signe de la bissectrice aiguë, c'est-à-dire si l'angle aigu des axes est bissèqué par *a* (—) ou par *c* (+).

Soit, dans le plan qui contient les axes magnétiques, Oac (fig. 165) l'ellipse principal, OI la direction d'un des axes magnétiques; Oi le diamètre perpendiculaire à OI est égal à b. Soit encore OS une direction comprise entre OI et Oa; le diamètre perpendiculaire, Os est plus petit que b. Si l'on découpe dans le cristal une lame perpendiculaire au plan ac, et passant par Os, cette lame a pour axes *os* et la perpendiculaire à Os qui est égale à b et par conséquent plus grande que Os. Si le *cristal* est magnétique, par exemple, c'est donc la perpendiculaire à Os (*c'est-à-dire* à la trace du plan des axes sur le plan de la lame) qui se placera axialement.

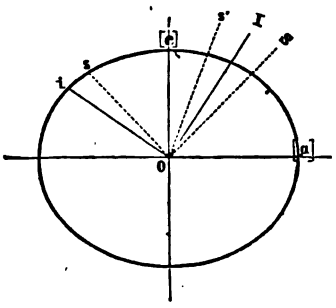


Fig. 165.

Les choses se passeront en sens inverse si la lame est taillée perpendiculairement à une droite OS′ située entre OI et Oc; c'est alors, le cristal étant toujours supposé magnétique, la trace du plan des axes qui se dirigera axialement. On a donc le moyen de s'assurer si une direction donnée est comprise entre a et l'axe ou entre c et l'axe. On peut ainsi voir si la bissectrice aiguë est négative, a, ou positive, c.

En appliquant le procédé au formiate, on constate que la bissectrice aiguë est négative.

2° *Sulfate de fer.* — Le *sulfate de fer* appartient au système clinorhombique; mais, au point de vue magnétique, il peut être considéré comme étant uniaxe, c'est-à-dire que son ellipsoïde d'induction est presque exactement de révolution autour d'une certaine droite, qui est l'axe principal d'induction. Cet axe est situé dans le plan de symétrie, et fait dans l'angle obtus ph^1, un angle de 75° environ avec la face de clivage p. Il paraît se confondre presque exactement avec l'axe maximum d'élasticité optique, car le symbole optique est $p\ \underset{+}{b}c = -14^\circ\ 45'$.

La substance est très énergiquement magnétique, et, l'axe principal se dirigeant équatorialement, elle est positive.

On taille dans un cristal une sphère qu'on vernit en traçant sur sa surface le grand cercle parallèle au plan g^1 du cristal, qui passe par l'axe principal magnétique.

Cette sphère est d'abord suspendue de manière que l'axe principal d'induction soit incliné de 45° sur l'axe de suspension. On la fait osciller et on trouve en moyenne une durée d'oscillation T représentée par 62,8. La même sphère, oscillant de manière que l'axe principal d'induction soit horizontal donnait une durée d'oscillation T_c représentée par 45.

On doit avoir, d'après une formule donnée plus haut,

$$\frac{T_c}{T} = \sin 45^\circ = 0.707.$$

Or les nombres précédents donnent pour le même rapport le nombre 0,715. La vérification est donc encore très satisfaisante.

3° *Bismuth.* — Plücker a fait une autre série d'expériences avec le *bismuth* cristallisé. Ce métal cristallise en rhomboèdres de 87° 40′ avec un clivage perpendiculaire à l'axe ternaire. On se servait d'une sphère de 2 centimètres de diamètre, sur la surface de laquelle on avait marqué le grand cercle parallèle au clivage. La sphère était posée sur un anneau de fil de cuivre, métal diamagnétique comme le bismuth.

Les oscillations de la sphère en présence de l'aimant auraient développé dans celle-ci des courants induits qui auraient troublé les résultats. On procédait donc comme il suit.

Le grand cercle parallèle au clivage, qui marquait la direction de l'équateur dans l'ellipsoïde d'induction, étant placé verticalement, l'axe qui était alors horizontal, se plaçait *axialement;* l'ellipsoïde d'induction est donc aplati, et le bismuth est positif. La position d'équilibre étant

obtenue, on tordait le fil de la balance de torsion de manière à faire tourner la sphère. Si, pour tourner l'axe d'un angle ω, on est obligé de tourner le fil de δ, le moment du couple directeur fait équilibre au moment de torsion proportionnel à $\delta - \omega$.

On répète cette observation : 1° lorsque l'axe principal est horizontal ; le moment directeur est alors $F(a^2 - c^2)\sin 2\omega$; 2° lorsque l'axe est incliné d'un angle θ, le moment directeur étant $F(a^2 - c^2)\sin^2\theta \sin 2\omega'$.

Si les deux observations correspondent respectivement à des angles de torsion $\delta - \omega$, et $\delta' - \omega'$, on doit avoir

$$\frac{\delta' - \omega}{\delta - \omega'} = \frac{\sin 2\omega}{\sin 2\omega'} \frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Si l'on s'arrange pour que $\omega = \omega'$ et $\theta = 45°$, on trouve, conformément à la théorie,

$$\frac{\delta - \omega}{\delta' - \omega'} = 2.$$

Résultats des observations faites par les divers auteurs sur le magnétisme cristallin. — Les tableaux suivants comprennent à peu près toutes les observations que Plücker, Knoblauch, MM. Grailich et von Lang ont faites sur diverses substances cristallisées dans le but de fixer l'orientation des axes de l'ellipsoïde d'induction.

I. — CRISTAUX MAGNÉTIQUEMENT PSEUDOCUBIQUES
C'EST-A-DIRE DONT L'ELLIPSOIDE D'INDUCTION EST PRESQUE UNE SPHÈRE.
(D'après Plücker.)

Fer oligiste (Fe^2O^3)	Rhomboèdre de 86°
Ferrocyanure jaune de potassium.	
Cyanure de cuivre et de potassium.	
Quartz.	
Topaze.	

II. — CRISTAUX UNIAXES.

	SYST. CRIST.	AXE VERTIC. AXE HOR. = 1	CLIVAGE	SIGNE OPTIQUE	SIGNE THERMIQUE[1]	SIGNE MAGNÉTIQUE
Antimoine	3	1.324	a^1	»	+	+ ?
Arsenic	3	1.402	a^1	»		− ?
Bismuth	3	1.303	a^1	»	+	− ?
Calcite	3	0.854	p	—	—	+ ?
Sidérose	3	0.817	p	—	+	+ ?
Azotate de soude	3	0.828	p	—		+ ?
Glace	3	»		+		− ?

1. On a donné le signe + aux cristaux dont l'axe principal coïncide avec l'axe de plus grande conductibilité.

	SYST. CRIST.	AXE VERTIC. AXE HOR. = 1	CLIVAGE	SIGNE OPTIQUE	SIGNE THERMIQUE[1]	SIGNE MAGNÉTIQUE
Tourmaline	3	0.447	»	—	+	$-\pi$
Émeraude	6	0.500	p	—	—	$-\pi$
Dioptase.	3	0.528	p	+		$-\pi$
Paranthine.	4	0.440	m	—	—	$+\pi$
Idocrase.	4	0.537		—	—	$-\pi$
Zircon.	4	0.640		+	—	$-\delta$
Mellite	4	0.745		—		$-\delta$
Wulfénite	4	1.574		—		$+\delta$
Mimétèse.	6	0.728		—		$+\delta$
Chalcophyllite	3	2.554	a^1	—		$+\pi$
$NiSO^4 + 6aq$	4	1.906	p	—	+	$-\pi$
H^2AmAsO^4	6	0.715	»	—	+	$-\delta$
$HgCy^2$.	4	0.460				$-\delta$
$2AmCl + CuCl^2 + 2aq$ . .	4	0.740		+	—	$-\pi$

III. — SUBSTANCES CRISTALLOGRAPHIQUEMENT DÉPOURVUES D'AXE PRINCIPAL MAIS MAGNÉTIQUEMENT PRESQUE UNIAXES.

Sulfate de fer $FeSO^4,7aq$	$+\pi$ très énergique	p^1 axe magn. $= +70°1'$. Symb. $p\overset{+}{b}c = -14°45'$. L'axe magnétique coïncide ainsi presque exactement avec l'axe d'élasticité optique a.
Borax	$-\delta$	Axe magnétique perpendiculaire à g^1. Symbole optique $p\underline{b}a = -18°35'$.
Cyanure de nickel et de potassium $K^2NiCy^4 + aq$.	$-\delta$	Axe magnétique coïncide à peu près avec l'axe d'élasticité optique c situé dans le plan g^1. Plan des axes optiques g^1.
Acide succinique . . .	$+\delta$ énergique	Axe magnétique coïncide à peu près avec axe d'élasticité optique a.

1. Plücker se borne à dire que l'axe magnétique coïncide *à peu près* avec l'axe d'él. opt. maximum, qui fait avec p, dans l'angle obtus ph^1, un angle égal à 75° environ. Il est à remarquer qu'on peut placer les cristaux de vitriol de manière à être sensiblement orthorhombiques, en faisant du plan de clivage le plan o^1, et de l'ancien plan a^1 le nouveau plan h^5. Les paramètres sont alors 1,042 : 1 : 0,553; $p/h^1 = 88°44'$ (Ramm). Les cristaux sont dans cette position presque carrés, et l'axe magnétique indiqué par Plücker fait, avec l'axe pseudo-quadratique, un angle de 13° seulement. Ne serait-ce pas cet axe pseudo-quadratique qui serait le véritable pseudo-axe principal magnétique ?

	AXES CRISTALLOGR. $a=1$			SYMB.	SYMBOLE
	b	c	CLIVAGES	OPTIQUE	MAGNÉTIQUE
Aragonite $CaCO^3$	0.623	0.721	»	$\underset{-}{cba}$	δ (cba)
Salpêtre	0.591	0.701	g^1, *m* ind.	$\underset{-}{cba}$	δ (cba)
Anhydrite $CaSO^4$	0.994	0.890	p, g^1, h^1	$\overset{+}{abc}$	δ (abc) ?
Barytine $BaSO^4$	0.621	0.762	p, m	$\overset{+}{acb}$	δ (bac)
Célestine $SrSO^4$	0.609	0.779	p, m	$\overset{+}{acb}$	δ (bac)
Am^2SO^4	0.564	0.731	p	$\overset{+}{bca}$	δ (cba)
K^2SO^4	0.573	0.746	g^1, p	$\overset{+}{abc}$	δ (cba)
K^2CrO^4	0.570	0.730	»	$\underset{-}{abc}$	δ (cba)
$MgSO^4$,7aq	0.990	0.571	g^1	$\underset{-}{acb}$	δ (cba)
Zn —	0.980	0.563	g^1	$\underset{-}{acb}$	δ (cba)
Ni —	0.982	0.566	g^1	$\underset{-}{acb}$	δ (cba)
$MgCrO^4$,7aq	0.990	0.574	g^2	$\underset{-}{acb}$	π(abc)
$MgCl^2$,2$CdCl^2$,12aq	0.913	0.304	»	$\overset{+}{abc}$	δ (bac)
Ni —	0.913	0.343	»	$\overset{+}{abc}$	π(bac)
CO —	0.913	0.343	»	$\overset{+}{abc}$	π(bac)
$HKSO^4$	0.861	1.935	»	$\overset{+}{acb}$	δ (bca)
$UO^2Az^2O^6$,6aq	0.874	0.609	»	$\overset{+}{bac}$	δ (cab)
$Na^2S^2O^6$,2aq	0.991	0.600	m	$\overset{+}{acb}$	δ (acb)
$CaPtCy^4$,3aq	0.900	0.337	h^1	$\overset{+}{bac}$	δ (bac)
$Na^4Fe^2Cy^{10}$,Az^2O^3,4aq	0.765	0.411	»	$\overset{+}{abc}$	δ (abc)
Form. de bar. $BaC^2H^2O^4$	0.765	0.864	m	$\overset{+}{bca}$	δ (abc)
Form. de str. $StC^2H^2O^4$,2aq	0.608	0.595	»	$\overset{+}{bca}$	δ (cab)
Malate d'amm. $(HAm)C^4H^4O^5$	0.778	0.723	h	$\underset{-}{bac}$	δ (bac)
Citrate de soude $Na^3C^6H^5O^7$,5aq	0.629	0.245	g^1, h^1	$\underset{-}{bac}$	δ (abc)
Acétate de lith. $LiC^2H^3O^2$,2aq	0.626	?	e^1	$\underset{-}{bac}$	δ (cab)
Sel de Seignette ammoniacal	0.823	0.420	»	$\underset{-}{cba}$	δ (cab)
Sel de Seignette potassique	0.832	0.430	»	$\overset{+}{bca}$	δ (cab)
Mica	0.577	?	p	»	π(*b* axial)
Staurotide	0.480	0.676	g^1	$\overset{+}{abc}$	π(acb)
Topaze	0.529	0.954	p	$\overset{+}{bac}$	δ (abc)
Cordiérite	0.587	0.359	»	$\underset{-}{bca}$	*b* axial

V. — CRISTAUX CLINORHOMBIQUES.

de symétrie cristallo-phique coïncide avec axes magnétiques	SUBSTANCES PARAMAGN.	SUBSTANCES DIAMAMAGN.
a	Diopside. . . . . Ferricyanure de pot.	Hyposulfite de soude.
c	. . . . .	Acétate de soude. — plomb.
b	Formiate de cuivre. Acétate de cuivre.	

rricyanure de potassium.	1 : 1,288 : 0,801. — $p/h^1 = 89^o 54'$. — Clivage h^1.	
	Symb. magn.	$h^1ac = 0$ presque rigoureusement rhombique au point de vue magnétique.
		2V magn. = 40° environ (Plücker)
ormiate de cuivre	Symb. magn.	$\pi(pba) = 3^o$.
		2V magn. = 50° environ (Plücker).
	Symb. optiq.	$(100)\,ba = 62^o$ 2E = 54 à 55°.

VI. — CRISTAUX ANORTHIQUES.

Dichroïte. — Magnétisme cristallin énergique. — Suspendus à l'extrémité d'un fil, les prismes de cette substance s'orientent même sous l'action de la terre.

Bichromate de potasse. — Paramagnétisme cristallin.

Acide racémique. — Diamagnétisme cristallin.

Il faut remarquer que les expériences dont les résultats sont contenus dans les tableaux qui précèdent sont souvent délicates. D'un côté les forces attractives ou ce qu'on pourrait appeler le magnétisme cristallin est souvent très faible. En outre les impuretés dont les cristaux, surtout les cristaux naturels, sont fréquemment souillés, peuvent troubler les résultats, et même les modifier profondément. C'est ainsi que le spath d'Islande est toujours diamagnétique positif, tandis que des cristaux impurs d'autres localités se montrent magnétiques négatifs.

Expériences de MM. Knoblauch et Tyndall sur les substances amorphes comprimées. — Avant d'étudier les données expérimentales, malheureusement, comme on le voit, bien peu nombreuses, que l'on possède actuellement sur le magnétisme cristallin, il est nécessaire de faire connaître des expériences intéressantes au moyen desquelles MM. Knoblauch et Tyndall ont prétendu l'expliquer.

Un disque circulaire de pâte de farine, traversé par de petits fils de

fer perpendiculaires à son plan, se comporte naturellement comme un disque diamagnétique et se place équatorialement. Si l'on remplace les fils de fer magnétiques par des fils de bismuth diamagnétiques, le résultat est inverse, comme on devait s'y attendre.

Un petit cylindre formé d'une pâte de gomme dans laquelle on a incorporé du bismuth réduit en poudre se comporte comme un cylindre de bismuth et se place équatorialement. On le comprime énergiquement, et après cette compression, il se place axialement, bien que la longueur soit encore dix fois plus grande que le diamètre. L'inverse a lieu en substituant à la poudre diamagnétique, une poudre magnétique formée de graines de carbonate de fer.

On déduit de là que si l'on a des grains magnétiques ou diamagnétiques, mais isotropes, et si on les dispose de manière qu'ils ne soient pas également répartis dans l'espace, la masse ainsi constituée se comporte comme un cristal; la direction suivant laquelle la distance qui sépare les grains est la plus petite, étant la ligne d'énergie maxima des forces magnétiques.

C'est là une conséquence naturelle, et qu'on pouvait prévoir, de l'induction mutuelle que les grains de la substance exercent les uns sur les autres.

On arrive à des conséquences analogues en comprimant des cubes de bismuth, qui se placent, après la compression, de manière que la ligne de pression soit axiale. Cette ligne de pression correspond donc au minimum d'induction, le bismuth étant diamagnétique.

MM. Knoblauch et Tyndall concluent de ces observations que la cause qui, dans les cristaux, fait varier la capacité d'induction avec l'orientation, est simplement l'inégalité des distances intermoléculaires. Les molécules seraient magnétiquement isotropes, et la structure seule du réseau cristallin transformerait en un ellipsoïde la sphère d'induction magnétique.

Les deux savants appuient leur manière de voir sur une règle générale qu'ils croient établie par les faits observés avec les substances cristallisées. Cette règle serait analogue à celle que M. Jannettaz a appliquée plus tard aux propriétés thermiques. Elle aurait l'énoncé suivant : Lorsqu'il n'y a qu'un seul clivage, la direction d'induction maxima est parallèle à ce clivage.

La règle serait en effet en accord avec le principe posé plus haut, puisque le plan de clivage doit être considéré comme le plan de densité réticulaire maxima.

On imite d'ailleurs artificiellement les propriétés d'un cristal ne possédant qu'un seul clivage en superposant des feuilles de papier à émeri (substance magnétique). On découpe ensuite, dans la masse des feuillets superposés, un cylindre dont l'axe est perpendiculaire à ces feuillets; ce cylindre se place équatorialement, les feuillets étant alors axiaux.

Avec un papier couvert de poudre de bismuth, le plan des feuillets se dispose au contraire équatorialement.

Cette manière de concevoir les phénomènes magnétiques des cristaux est très simple, et elle a séduit un grand nombre de physiciens. Cependant les expériences sur lesquelles elle est fondée, quelque ingénieuses qu'elles soient, sont bien loin d'en démontrer l'exactitude. Elles sont analogues à celles qui transforment par la pression, en ellipsoïde, les sphères thermique et optique d'un corps isotrope. Elles montrent que, parmi les causes qui donnent à la surface magnétique d'un cristal la forme d'un ellipsoïde, la structure réticulaire de ce cristal doit entrer pour une certaine part; ce résultat est d'ailleurs par lui-même très intéressant. Mais pour démontrer que la forme de l'ellipsoïde dépend *exclusivement* de cette structure réticulaire et que la structure de la molécule n'intervient pas dans le phénomène, les expériences de MM. Knoblauch et Tyndall sont manifestement insuffisantes; la question ne peut être décidée que par l'étude directe des propriétés magnétiques des cristaux. Si cette étude, que nous allons faire, nous apprend qu'il n'y a pas toujours accord entre la structure réticulaire, telle que nous la fait connaître la cristallographie géométrique, et les propriétés magnétiques qui devraient en découler, nous serons forcés de reconnaître l'influence de la structure moléculaire.

Discussion des données fournies par l'observation. — Nous n'insisterons pas sur le rapport qui existe entre le sens du magnétisme et la composition chimique. C'est là un phénomène dans lequel la structure cristalline n'entre pour rien et qui sort par conséquent du cadre de notre étude. Presque toutes les substances qui contiennent un métal magnétique, fer, cobalt ou nickel, sont magnétiques. Il y a cependant des exceptions remarquables. C'est ainsi que le nitroprussiate de soude, dans lequel le fer est engagé dans un radical organique, est énergiquement diamagnétique. Les substances diamagnétiques sont d'ailleurs de beaucoup les plus nombreuses.

Il suffit de jeter les yeux sur les symboles optiques et magnétiques d'une même substance pour voir qu'il n'y a aucune relation directe entre les phénomènes optiques et les phénomènes magnétiques, ce qui

n'a d'ailleurs rien de très surprenant. Il y a cependant des coïncidences remarquables, et elles avaient induit Plücker, à la suite de ses premières recherches, à poser en principe que les propriétés optiques et magnétiques étaient en parfait accord.

Le même désaccord réel persiste entre les propriétés thermiques et les propriétés magnétiques, comme cela résulte du tableau qui comprend les cristaux uniaxes, où les signes de la substance, aux trois points de vue optique, thermique et magnétique, ont été mis en regard.

Mais ce qu'il y a de plus intéressant est de rechercher si, conformément aux vues de MM. Knoblauch et Tyndall, il y a toujours accord entre la structure réticulaire et les propriétés magnétiques, c'est-à-dire si la direction d'induction maxima est toujours celle de la rangée dont le paramètre est le plus petit.

Si cela est exact, il faut en premier lieu que les substances qui ont des paramètres cristallographiques sensiblement égaux, c'est-à-dire qui sont *isomorphes*, aient des ellipsoïdes d'induction orientés de *la même* façon. C'est en effet ce qu'on a trouvé jusqu'à présent dans la plupart des séries isomorphes étudiées, comme le montre le tableau *suivant* :

$CaCO^3$ (Calcite)		δ	+	
Fe—		π		
$NaAzO^3$		δ		
$CaCO^3$ (Aragonite)		δ	(cba)	
$KAzO^3$		δ		
Ba	SO^4	δ	(bac)	
Sr		δ		
Am^2	SO^4	δ	(cba)	
K^2		δ		
K^2CrO^4		δ		
Mg	SO^4,7aq	δ	(cba)	
Zn		δ		
Ni		π		
Mg	Cl^2, $2CdCl^2$, 12aq	δ	(bac)	
Ni		π		
Co		π		
Am^2	Na^2, $2C^4H^4O^6$, 8aq	δ	(cab)	
K^2		δ		

On ne peut pas cependant considérer cet accord entre les orientations de l'ellipsoïde magnétique des substances isomorphes comme un argument d'un poids décisif, car dans un très grand nombre de groupes iso-

morphes, le même accord existe entre les orientations des ellipsoïdes optiques. Les exceptions qu'on connaît pour ce dernier cas se multiplieraient peut-être aussi pour le magnétisme si nos connaissances n'étaient pas aussi bornées en cette matière. On peut cependant citer une exception, dans la série suivante :

Antimoine	+ δ
Arsenic.	— δ
Bismuth	— δ.

Quoi qu'il en soit, il faut remarquer qu'il résulte du tableau précédent que deux substances isomorphes, l'une dia, l'autre para-magnétique, ont le même symbole, c'est-à-dire que les axes d'induction maxima sont orientés de la même façon dans les deux substances, quoiqu'ils correspondent à une répulsion maxima dans un cas, à une attraction maxima dans l'autre. Cela est bien d'accord avec les expériences faites sur des cylindres comprimés. Nous en conclurons que, pour comparer, comme nous allons le faire, la structure réticulaire avec l'ellipsoïde d'induction, on peut faire abstraction du sens de l'action magnétique.

D'après la règle de Knoblauch et Tyndall, l'axe de plus petite induction c devrait toujours être perpendiculaire au clivage le plus facile. Voyons quelles sont les substances qui sont d'accord avec cette règle, et celles qui font exception.

SUBSTANCES	
EN ACCORD AVEC LA RÈGLE.	EN DÉSACCORD AVEC LA RÈGLE.
Antimoine.	Arsenic.
Paranthine.	Bismuth.
Chalcophyllite.	Émeraude.
Sulfate de fer.	Sulfate de nickel quadr.
Salpêtre.	Sulfate d'ammoniaque.
Barytine.	Nitrate d'ammoniaque.
Célestine.	
Sulfate de magnésie.	
— de zinc.	
— de nickel rhomb.	
Platinocyanure de calcium.	
Staurotide.	

Les substances qui sont d'accord avec la règle paraissent plus nombreuses que celles qui font exception. L'influence de la structure réticulaire, qui d'ailleurs est théoriquement incontestable, se fait donc

sentir d'une manière très nette. Mais les exceptions, qui se multiplieraient dans doute si les données étaient plus nombreuses, suffisent à témoigner que la structure réticulaire n'influe pas seule, et que la molécule, si l'on pouvait l'isoler et l'observer, a, elle aussi, un ellipsoïde d'induction, et ne peut être considérée comme magnétiquement isotrope.

Des conclusions tout à fait analogues se tirent de l'examen des phénomènes de conductibilité thermique. La conductibilité thermique et l'induction magnétique dépendent donc à la fois et de la nature de la molécule et de la structure réticulaire. La raison d'être de cette dernière influence se comprend aisément puisque, pour l'une et pour l'autre propriété, il faut tenir compte de l'action d'une molécule sur sa voisine.

Les phénomènes optiques au contraire paraissent presque *uniquement* régis par la nature de la molécule et être presque entièrement indépendants de la structure réticulaire. Nous avons vu *en effet* que chaque molécule pouvait être considérée, au point de vue optique, comme un petit corps réfringent placé dans un milieu non réfringent.

CHAPITRE XV

PHÉNOMÈNES ÉLECTRIQUES.

CONDUCTIBILITÉ ÉLECTRIQUE.

La structure cristalline des corps doit nécessairement intervenir pour modifier les phénomènes électriques dont ils sont le siège. Les premières expériences qui ont eu pour but de constater cette influence d'une manière méthodique ont été entreprises presque à la même époque par Sénarmont[1] et par M. Wiedemann[2]. Chacun des deux savants se proposait de constater que la structure cristalline avait sur la *conductibilité électrique* une influence analogue à celle qu'elle exerce sur la *conductibilité calorifique*, et que Sénarmont venait de découvrir. Ce rapprochement entre les deux conductibilités électrique et calorifique était peu fondé, car la plupart des cristaux ne conduisent pas l'électricité; ils sont, comme le verre, ce qu'on appelle des *diélectriques*. Or, au point de vue de la propagation, les corps diélectriques diffèrent considérablement des corps conducteurs, qui sont les seuls dans lesquels la propagation électrique peut être comparée à la propagation calorifique. Aussi les expériences de Sénarmont et de M. Wiedemann, se rapportant à un phénomène très complexe, n'ont pu conduire à des conclusions théoriques bien nettes.

Sénarmont et Wiedemann se servaient, d'ailleurs, l'un et l'autre d'un procédé expérimental calqué en quelque sorte sur celui que Sénarmont avait appliqué à la conductibilité calorifique.

Expériences de Sénarmont. — Sénarmont enveloppait la plaque cristalline à expérimenter d'une mince feuille de clinquant dans la-

1. *Ann. chim. et phys.* (3) 28, 257 (1850).
2. *Pogg. Ann.* 76,406 (1849) et *Ann. chim. et phys.*, (3) 29, 229.

quelle on avait découpé, sur une des faces, un trou circulaire laissant la lame à nu. Au centre de ce cercle on appuyait la pointe d'un conducteur en communication avec une machine électrique donnant de l'électricité positive. Celle-ci, s'échappant de la pointe, se dirigeait vers le disque de clinquant, mis en communication avec le sol, en suivant une ligne que Sénarmont jugeait être celle de la plus facile conductibilité du cristal. Les expériences se faisaient dans l'obscurité, afin de distinguer plus nettement le trait de feu qui marquait le chemin suivi par l'électricité; elles se faisaient sous une cloche en communication avec une machine pneumatique, parce qu'on avait constaté que les expériences étaient, en général, plus régulières lorsqu'on opérait dans de l'air à basse pression. Les expériences ne réussissaient pas ou étaient fort irrégulières lorsqu'on substituait l'électricité négative à l'électricité positive.

Voici les principaux résultats publiés par Sénarmont.

Lorsqu'on opérait avec une lame découpée dans un cristal *cubique* ou perpendiculairement à l'axe principal d'un cristal uniaxe, l'électricité, au lieu de gagner les bords du cercle de clinquant en suivant un chemin rectiligne, s'épanouissait en quelque sorte, dans l'espace circulaire libre, suivant une lame à peu près uniforme.

Dans les lames taillées parallèlement à l'axe d'un cristal uniaxe, l'électricité suivait tantôt la direction de l'axe *h*, tantôt la direction perpendiculaire.

CONDUCTIBILITÉ MAXIMA

Parallèle à l'axe.	Perpendiculaire à l'axe.
Idocrase	Cassitérite
Calcite	Rutile
Apatite	Quartz.
Tourmaline	
Émeraude	
Corindon?	

Avec les cristaux rhombiques, on employait des lames parallèles aux plans cristallographiques *p*, g^1 ou h^1. La conductibilité maxima était dirigée suivant l'un des axes binaires contenus dans le plan de la lame, c'est-à-dire suivant la plus grande diagonale du rhombe de la base, *a*, ou la plus petite diagonale de ce rhombe, *b*, ou la hauteur du prisme, *h*.

CONDUCTIBILITÉ MAXIMA.

	Avec une lame p.	Avec une lame g^1.	Avec une lame h^1.
Barytine	b		
Célestine.	b		
Soufre.	b		
Topaze.		a	
Stibine.		a	
Aragonite		b	
Staurotide	a	b	a
Sel de Seignette. .	h suivant la face m.		
Muscovite.	perpendiculaire au plan des axes optiques.		

Sénarmont a en outre étudié les substances clinorhombiques suivantes :

Gypse.	Lame de clivage g^1. — Conductibilité maxima perpendiculaire à h^1 (clivage vitreux). — En taillant l'ouverture de la lame de clinquant suivant la forme d'une ellipse dont les axes sont dans le rapport de 1,34 à 1, la lueur électrique s'épanouit régulièrement.		
Borax.	Lame g^1 conductibilité maxima faisant un angle de 83° à 85° avec la hauteur, de 11° à 14° avec la base.		
Borax.	Lame h^1. — Conductibilité maxima, suivant h.		
—	Lame p	—	— a (diag. inclinée).
Orthose.	Lame p	—	— a.
—	Lame g^1	—	— presque perp. à h.
Épidote.	Lame p	—	— a.
Glaubérite.	Lame perp. à la bissectrice optique		— perp. à l'axe de symétrie.

Expériences de M. G. Wiedemann. — Le procédé expérimental de M. G. Wiedemann se rapproche, beaucoup plus que celui de Sénarmont, du procédé qu'avait employé Sénarmont lui-même pour l'étude de la conductibilité calorifique. Il saupoudrait de poudre de lycopode la lame cristalline, et il posait sur celle-ci une pointe en communication avec une source d'électricité positive. L'électricité, en se répandant à la surface de la lame, chassait la poudre, qui allait former, à quelque distance, un bourrelet elliptique. Le plus grand axe de cette ellipse indiquait le sens suivant lequel la propagation électrique était la plus facile.

Les résultats de M. Wiedemann sont, au reste, d'accord avec ceux de Sénarmont, sauf pour le quartz dans lequel M. Wiedemann a indiqué la conductibilité maxima suivant l'axe, et Sénarmont suivant une direction

perpendiculaire. Mais M. Wiedemann note que les expériences ont été difficiles.

Avec certaines substances telles que le feldspath et l'asbeste, la poudre de lycopode n'était pas repoussée par la pointe; elle adhérait, au contraire, à la lame cristalline, et en retournant celle-ci, on faisait tomber toute la poudre qui n'avait pas subi l'action électrique, tandis que celle qui avoisinait la pointe restait adhérente et était limitée par une courbe elliptique dont le grand axe était encore considéré comme dirigé suivant la conductibilité maxima. M. Wiedemann attribue cette particularité à la conductibilité notable de l'orthose.

Les phénomènes mis en jeu par Sénarmont et M. G. Wiedemann sont analogues à la production des figures dites de Lichtenberg. Or la production de ces figures, quoiqu'elle ait été l'objet d'assez nombreuses recherches, est encore peu expliquée. On comprend donc qu'il soit impossible de dire, avec précision, quelle est, avec les propriétés électriques de la matière, la relation des directions de plus facile conductibilité superficielle observés par ces deux savants.

II. INDUCTION ÉLECTRIQUE.

Expériences de Knoblauch. — Les expériences de Knoblauch[1], malheureusement fort incomplètes, présentent beaucoup plus d'intérêt que les précédentes. Faites à l'imitation de celles qui avaient été exécutées par Plücker et par Knoblauch lui-même sur les propriétés magnéto-cristallines, elles avaient pour but de chercher comment un cristal s'oriente sous l'influence d'un corps électrisé extérieur.

Le cristal naturel ou artificiellement taillé était suspendu à l'extrémité d'un fil de soie très fin de 1 mètre de longueur, entre les pôles opposés d'une pile sèche formée par 400 couples zinc et papier ou 2000 couples de papier d'argent et d'oxyde de fer. Le corps cristallisé était ordinairement taillé en forme de disque aplati, et on notait quelle était la direction du disque qui se plaçait *axialement*, c'est-à-dire suivant la ligne des pôles, ou *équatorialement*, c'est-à-dire perpendiculairement à cette ligne. Les observations ont été fort peu nombreuses, elles ont donné les résultats suivants :

1. *Pogg. Ann.* 83, 289 (1851).

Calcite.	Disque parallèle à l'axe	Axe équatorial
Sidérose	id.	id.
Tourmaline	id.	Axe axial.
Émeraude	id.	id.
Bismuth	id.	id.
Aragonite.	Disque parallèle à l'axe vertical	*h* équatorial
Salpêtre.	id.	id.
Barytine.	Plan de clivage *p*	*b* équatorial
Gypse.	Plan de clivage g^1.....	Diag. de l'angle obtus des deux clivages à peu près équatoriale.

Knoblauch remarque que le quartz[1], la topaze et la tourmaline restent électrisés après l'influence, ce dont on s'assure en constatant que le cristal, étant retourné de 180°, revient à sa première position d'équilibre. La raison n'est pas péremptoire, et il est bien possible que l'extrémité de la tourmaline qui se tourne vers le pôle positif, par exemple, soit déterminée par la cristallisation même. Ce point qu'il aurait été si curieux de constater ne paraît avoir été l'objet d'aucune observation.

Knoblauch a appliqué à l'orientation électrique des cristaux les mêmes procédés d'explication qu'il avait antérieurement appliqués à l'orientation magnétique. Il admettait que cette orientation était exclusivement due à la position des clivages, un plan de clivage se plaçant toujours perpendiculairement à la ligne des pôles, comme le fait entre les pôles magnétiques un cristal dimagnétique.

Cette explication était appuyée sur les quelques observations que nous avons rapportées. C'est ainsi que l'émeraude et le bismuth ayant un clivage perpendiculaire à l'axe, cet axe dans ces substances se place axialement, le clivage étant équatorial.

De même que pour les propriétés magnétiques, Knoblauch appuyait son explication sur des imitations artificielles de cristaux.

De la poudre de barytine coagulée par de la gomme était soumise à la compression, et, après la solidification, on découpait dans la masse un disque dont le plan contenait la direction de la pression. Ce disque, suspendu horizontalement entre les pôles, s'orientait de telle sorte que cette direction fût *équatoriale*. C'est ce qu'on avait constaté pour l'orientation magnétique de la poudre de bismuth (*diamagnétique*) comprimée.

Nous ferons ici les mêmes réserves qu'à l'occasion des phénomènes magnétiques. Il est certain que l'écartement des molécules, et par

1. Knoblauch n'indique pas quelle a été la direction d'orientation des disques de quartz.

conséquent la structure réticulaire des cristaux, exerce une influence sur l'orientation électrique ainsi que sur l'orientation magnétique, et, comme nous le verrons tout à l'heure, par une raison identique. Mais il n'est nullement prouvé que la forme et la nature de la molécule n'aient pas sur le phénomène leur part d'influence. Il est probable que celle-ci apparaîtrait si les observations étaient plus multipliées. On peut déjà remarquer que, pour satisfaire à la règle, ce n'est pas la bissectrice de l'angle *obtus*, mais celle de l'angle *aigu* des clivages *m* de la barytine qui devrait se placer équatorialement. Il en est de même pour le gypse.

Réflexions générales sur l'induction cristalline. — Ellipsoïde d'induction électrique. — Knoblauch paraît avoir pensé que, dans ses expériences, il mesurait la conductibilité. Si en effet, sur un disque léger non conducteur, on colle une petite bande très mince de clinquant, le disque s'oriente de manière que cette bande, qui représente la direction la plus conductrice de la lame, se place axialement.

Mais la plupart des cristaux n'étant pas conducteurs, on ne voit pas très bien ce que signifie, pour ces corps, l'expression : de plus facile conductibilité. En réalité, l'expérience de Knoblauch met en jeu, au moins pour les cristaux diélectriques, une propriété spéciale sur laquelle on n'est bien fixé que depuis peu de temps.

On admet maintenant que les corps qui sont diélectriques, comme le verre, subissent, lorsqu'ils sont soumis à l'action extérieure d'un corps électrisé, une polarisation analogue de tous points à celle qu'un morceau de fer doux subit sous l'action d'un pôle d'aimant. Dans chaque molécule du diélectrique le fluide neutre (pour employer le langage convenu) se décompose; le fluide de nom contraire à celui du corps extérieur se portant vers l'extrémité de la molécule tournée du côté de ce corps, le fluide de même nom se portant vers l'autre extrémité. Cette polarisation, soumise aux mêmes lois que celle du fer doux, persiste tant que l'influence extérieure persiste; elle cesse instantanément dès que cette influence disparaît.

Lorsqu'un cristal est soumis à l'action directrice d'un pôle électrique situé à l'infini, ou, ce qui équivaut, d'un champ électrique uniforme, il est clair que les lois auxquelles est soumise cette action doivent être les mêmes que celles auxquelles est soumise l'action directrice d'un champ magnétique uniforme. Nous n'aurions qu'à répéter mot pour mot, en changeant *magnétique* en *électrique*, la théorie exposée dans le chapitre précédent. Il y a donc pour chaque cristal un ellipsoïde d'induction

électrtique analogue à l'ellipsoïde d'induction magnétique, et la connaissance de cet ellipsoïde permettrait de résoudre, comme nous l'avons fait à propos du magnétisme, tous les problèmes que soulève la direction électrique d'un cristal.

Il est malheureux que cette théorie n'ait pas encore été directement vérifiée par l'expérience. Les physiciens trouveraient sans nul doute dans cette étude le moyen de perfectionner et d'étendre les données que l'on possède déjà sur la polarisation des diélectriques.

Une lacune non moins regrettable se rapporte aux cristaux, qui, comme la tourmaline, la calamine, etc., sont dépourvus de centre et présentent deux extrémités distinctes au point de vue des propriétés électriques comme au point de vue des propriétés cristallographiques. Ces cristaux placés dans un champ électrique uniforme et laissés libres de se mouvoir ne s'orientent-ils pas de manière à présenter toujours la même extrémité au pôle positif? Il serait très important qu'on pût répondre à cette question, et l'on doit souhaiter vivement que les expériences de Knoblauch, si intéressantes, mais si incomplètes, soient reprises et considérablement étendues.

Jusqu'ici nous n'avons parlé que des cristaux diélectriques, qui sont les plus nombreux. Quelques-uns cependant, comme le bismuth, sont conducteurs. Il est très remarquable que, d'après Knoblauch, une sphère de bismuth, placée dans un champ magnétique uniforme, s'oriente à la façon d'un cristal diélectrique. On est amené à penser que la distribution de l'électricité, sur une semblable sphère conductrice, mais cristallisée, ne se fait pas suivant la même loi que celle que l'on a observée pour une sphère métallique amorphe. Il y aurait là encore sans doute un sujet d'étude des plus intéressants pour la théorie générale des phénomènes électriques.

III. ÉLECTRICITÉ DÉGAGÉE PAR LES CRISTAUX.

1° ÉLECTRICITÉ DÉGAGÉE PAR UNE ACTION MÉCANIQUE. — PIÉZO-ÉLECTRICITÉ.

Électricité dégagée par le clivage. — Les cristaux peuvent être, dans certaines conditions, de véritables sources d'électricité. Les cristaux non conducteurs peuvent, comme tous les corps analogues, se charger d'électricité par le frottement, mais jusqu'à présent on n'a signalé aucun fait qui fasse penser que ce phénomène puisse être mis en rapport avec la structure cristalline. Il ne serait pas cepen-

dant impossible que certaines faces d'un même cristal prissent par le frottement, les unes l'électricité négative, les autres, la positive.

Les cristaux peuvent aussi, d'après Becquerel[1], s'électriser par clivage. Si l'on clive rapidement une lame de mica dans l'obscurité, on observe une lueur phosphorescente, et il se produit en même temps un dégagement d'électricité, chaque lame emportant des électricités contraires. L'intensité électrique est d'autant plus grande que la séparation a été plus rapide. Becquerel recommande, pour que l'expérience réussisse, de bien dessécher la surface du mica.

Lorsqu'on rapproche les lames clivées et qu'on les sépare de nouveau après les avoir légèrement pressées jusqu'à les faire adhérer, les lames reprennent la même électricité qu'elles avaient prise au moment du clivage. L'effet est particulièrement marqué, ajoute cependant Becquerel, quand on élève légèrement la température de la lame qui présentait l'état négatif en sortant du clivage.

Cette expérience curieuse mériterait d'être reprise, car elle donne lieu à une grave difficulté. Le plan de clivage du mica étant un plan de symétrie[2], on ne voit pas bien quelle est la raison qui peut donner à l'une des lames une certaine électricité, et à l'autre une électricité contraire. On est obligé d'admettre que ce sont les conditions accidentelles de l'expérience qui règlent le phénomène, et celui-ci perd alors beaucoup de son importance.

Becquerel en tirait la conclusion que le mouvement relatif de deux molécules à l'état libre pouvait développer de l'électricité dans chacune d'elles. Certaines expériences portent à croire qu'il peut en être ainsi, mais seulement lorsque les faces des molécules qui se regardent ne sont pas semblables.

La pression peut aussi développer de l'électricité dans les cristaux. Haüy[3] dit avoir constaté, par exemple, qu'en pressant un rhomboèdre de spath entre les doigts, on lui communique de l'électricité négative qu'il peut garder ensuite pendant très longtemps. L'illustre créateur de la cristallographie dit même s'être servi de cette propriété pour construire un électroscope consistant simplement en une aiguille légère tournant horizontalement sur un pivot, et portant à une extrémité un

1. *Traité d'él.* I, 138 (1855).

2. Il est vrai que M. Tschermak croit avoir démontré qu'il n'en est pas ainsi. Mais alors il faudrait constater que le sens de l'électrisation est toujours en rapport avec l'orientation assignée par M. Tschermak.

3. *Ann. de chim. et de phys.* (2) 5,95.

morceau de spath, à l'autre un contrepoids. D'après Haüy, l'électrisation ne se produirait pas lorsque le corps qui presse le cristal est rigide, comme le bois par exemple.

Les assertions d'Haüy mériteraient d'être vérifiées. Il se pourrait bien que l'électricité développée dans ses expériences dût être simplement attribuée au frottement.

Piézo-électricité de la tourmaline. — Observations de MM. J. et P. Curie. — Nous avons dit (tome I, page 145) que la tourmaline cristallise dans le système ternaire avec un mode d'hémiédrie tel que l'axe ternaire et les trois plans de symétrie qui passent par cet axe étant conservés, le centre et les trois axes binaires perpendiculaires à ces plans sont supprimés. Il en résulte que la tourmaline se présente habituellement (fig. 166) sous la forme de prismes dont l'axe est parallèle à l'axe ternaire, rendus triangulaires par la prédominance des trois faces de l'hémiprisme hexaèdre e^2 dont les faces sont perpendiculaires aux plans de symétrie, et terminés par des pointements dissemblables aux deux extrémités. A l'une d'entre elles prédominent les faces du rhomboèdre b^1, à l'autre, celles du rhomboèdre e^1.

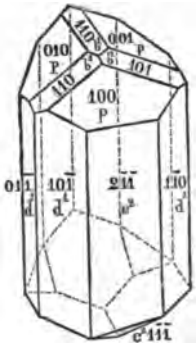


Fig. 166.

Il y a peu de temps, MM. Jacques et Pierre Curie[1] ont fait une découverte très importante et qui a considérablement étendu le cercle de nos connaissances sur les propriétés électriques des cristaux.

Ils ont observé que, lorsqu'on *comprime* une lame de tourmaline parallèlement à l'axe ternaire, les faces normales à cet axe se chargent d'électricités de noms contraires. La face tournée du côté de la forme e^1 se charge d'électricité positive ; celle qui est tournée du côté de la forme b^1, d'électricité négative.

Si, après avoir comprimé la lame et l'avoir ramenée à l'état neutre, on la *décomprime*, on produit l'effet inverse. Les pôles e^1 se chargent négativement, les pôles b^1 positivement.

Pour observer ces faits, on taille le prisme de tourmaline de manière qu'il se termine par deux bases planes. On recouvre celles-ci de deux lames d'étain. Pendant la compression l'une de ces lames est mise en communication avec la terre, l'autre avec un électromètre.

1. *C. R.* 91, 294, 383 (1880) ; 92, 186, 350 (1881). *Bull. de la Soc. des min.* 3, 90 (1880) et *Journ. de phys.* (2) 1,245 (1882).

La quantité d'électricité dégagée sur une des faces doit être naturellement, dans des limites convenables, proportionnelle, pour un cristal donné, au poids P qui la produit. Si nous mettons côte à côte deux cristaux dont les bases soient identiques, et si nous produisons sur l'ensemble des deux cristaux la même variation de poids P, les choses se passeront comme si chaque cristal était pressé par le poids $\frac{P}{2}$, et dans chacun d'eux la quantité d'électricité doit être moitié moindre; mais comme nous avons deux cristaux au lieu d'un, la quantité d'électricité totale n'est pas changée. Si q est la quantité, positive ou négative, d'électricité qui se dégage sur la base d'un cristal quelconque de tourmaline sous l'influence d'un poids P, nous pouvons donc écrire :

$$q = kP,$$

k étant une fonction, positive pour la base tournée du côté des faces e^1, négative pour l'autre, indépendante de la surface s de la base, et qui ne peut dépendre que de la hauteur du prisme de tourmaline, ou de sa nature.

MM. Curie ont vérifié l'exactitude de cette formule. Ils ont établi, en outre, que k est indépendant de la hauteur du prisme, de sorte que q est indépendant des dimensions de celui-ci et ne dépend que du

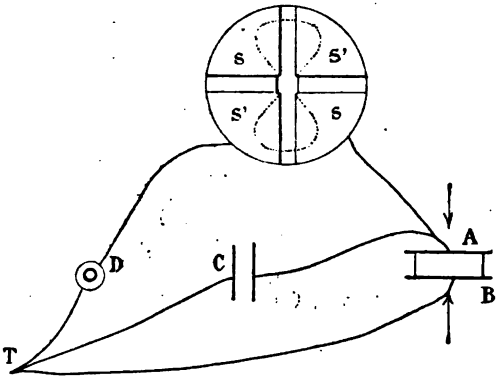


Fig. 167.

poids P. Ils ont enfin trouvé que, pour toutes les tourmalines, le coefficient k est le même et a ainsi une valeur spécifique. Cette valeur est telle que, pour une variation de poids égale à 1 kilogramme, la quantité d'électricité dégagée q est susceptible de porter une sphère

de $14^{cm},3$ au potentiel d'un daniell, c'est-à-dire qu'elle est égale à 0,053 unité C. G. S. électrostatique.

Pour obtenir ces résultats, MM. Curie ont employé la disposition expérimentale suivante. Une des lames d'étain A (fig. 167) qui couvrent les bases de la tourmaline, est reliée à la terre, l'autre lame B est reliée à l'une des lames d'un condensateur C dont la capacité est connue et dont l'autre lame communique avec le sol; elle est en même temps reliée avec l'un des couples de quadrants S de l'électromètre Thomson-Mascart[1]. L'autre couple de quadrants est relié à l'un des pôles d'une pile Daniell dont l'autre pôle est mis en communication avec le sol.

La lame B et les conducteurs qui la touchent étant isolés, l'aiguille de l'électromètre est déviée sous l'influence de la pile Daniell; on charge alors de poids le cristal, et, si l'on s'est arrangé pour que l'électricité développée ainsi agisse sur l'aiguille de l'électromètre en sens inverse de celle de la pile, on peut, en ajoutant des poids en quantité suffisante, ramener l'aiguille à zéro. A ce moment la lame B, le condensateur C et l'électromètre ont un potentiel égal à celui d'un Daniell.

On répète la même opération après avoir supprimé le condensateur, et, pour ramener l'aiguille au zéro, il faudra une charge moindre sur le cristal; la différence de poids représente la charge nécessaire pour porter le condensateur au potentiel d'un Daniell et pour dégager, par conséquent, une quantité d'électricité connue.

Piézo-électricité de la calamine. — La tourmaline n'est pas le seul cristal dans lequel on puisse constater, sous l'influence de la pression, la production de deux pôles électriques opposés.

1. L'électromètre de sir W. Thomson, modifié par M. Mascart, contient une aiguille plate et très légère en aluminium, portée par une suspension bifilaire. L'aiguille, en forme de 8 pour que des légers déplacements n'influent pas notablement sur la symétrie de l'ensemble, oscille à l'intérieur d'une sorte de boîte métallique formée de quatre quadrants ou secteurs *ss*, *s's'*, (fig. 167). L'aiguille supporte un fil de platine plongeant dans une cuvette remplie d'acide sulfurique, et ce liquide communique avec les pôles d'une batterie formée par un grand nombre de petits éléments zinc et cuivre. On charge ainsi l'aiguille à un potentiel constant et assez élevé. Les déviations de l'aiguille sont observées par le procédé de Gauss au moyen d'une fente lumineuse réfléchie par un petit miroir que porte le fil de suspension.

On peut mettre le couple de secteurs *s* en communication avec une même source électrique; l'autre couple *s'* avec une source différente. Lorsque ces deux sources sont égales, l'aiguille est au zéro; dans le cas contraire, elle est déviée dans le sens de la plus forte.

Tout l'appareil, placé au centre d'un vase métallique, percé de fenêtres convenables et en communication avec le sol, est ainsi soustrait à toute influence électrique extérieure.

La calamine cristallise dans le système rhombique avec une antihémiédrie spéciale qui lui fait perdre deux de ses axes binaires, ainsi que le plan de symétrie perpendiculaire au troisième, tandis que ce troisième axe binaire et les plans de symétrie qui le contiennent sont conservés. A l'une des extrémités de cet axe binaire persistant, que l'on prend pour la hauteur du prisme, domine la base p; à l'autre extrémité dominent les faces de l'octaèdre e_3 (fig. 168). Lorsqu'on comprime un prisme perpendiculaire à l'axe binaire conservé, la base tournée vers le sommet où dominent les faces e_3 prend l'électricité positive, l'autre, l'électricité négative.

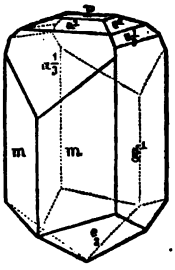


Fig. 168.

Piézo-électricité du quartz. — Mais tous les cristaux piézo-électriques n'acquièrent pas des pôles de noms contraires situés sur la direction de la pression.

On sait que le quartz cristallise dans le système rhomboédrique avec l'hémiédrie holoaxe. Il est donc dépourvu de centre et de plans de symétrie. Soit $A_1 A'_2$ (fig. 169) la coupe hexagonale, perpendiculaire à l'axe ternaire, d'un cristal de quartz; les diagonales telles que $A_1 A'_1$ sont les axes binaires. Nous supposerons que les sommets A_1, A_2, A_3 sont ceux qui ne portent pas les faces $s = (41\bar{2})$ (fig. 170). (Voir t. I, p. 143.) On taille dans ce cristal un prisme droit dont les côtés de la base rectangle sont respectivement parallèles ou perpendiculaires à l'axe binaire $A_1 A'_1$.

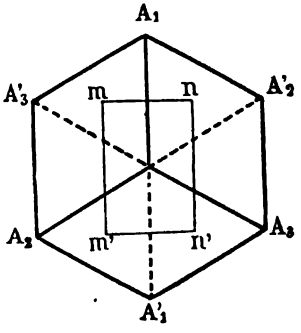


Fig. 169.

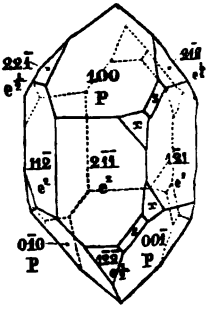


Fig. 170.

On comprime ce prisme normalement à la base, et aucune électricité ne se manifeste en aucun point de sa surface. On exerce la pression sur

s faces latérales mn, $m'n'$, perpendiculaires à l'axe binaire, et l'on bserve un dégagement d'électricité, positive sur mn, négative sur $m'n'$. ous dirons que l'extrémité A_1 de l'axe est positive, l'extrémité A'_1 égative, par compression.

On comprime maintenant suivant une direction normale aux faces mm', nn' qui sont parallèles à $A_1 A'_1$; on n'observe aucun dégagement sur es faces comprimées mm', nn', mais on constate que la face mn dégage le l'électricité *négative*, et la face $m'n'$, de l'électricité *positive*.

Dans ce dernier cas, la formule qui donne la quantité d'électricité dégagée en fonction de la pression reste théoriquement la même, mais elle subit une modification importante. La quantité d'électricité q est toujours, en effet, en principe, indépendante de la distance comprise entre les deux faces pressées; elle est toujours proportionnelle à $\frac{P}{s'}$ (s' étant la surface pressée), et à la surface s qui dégage l'électricité. Seulement dans ce cas s' n'est plus nécessairement égale à s; si nous appelons m la longueur mm', n la longueur nn' et h la dimension du prisme parallèle à l'axe ternaire, on a $s' = m.h$ et $s = n.h$, on a donc

$$q = k.n.h.\frac{P}{m.h} = k.P.\frac{n}{m}.$$

La quantite d'électricité est proportionnelle au poids comprimant et au rapport de celle des dimensions du prisme qui est parallèle à l'axe binaire à la dimension qui lui est perpendiculaire.

Dans le cas où la pression est exercée suivant la face mn normale à l'axe, on a

$$q' = k'P.$$

MM. Curie ont vérifié ces deux formules, et ont constaté de plus que $k = -k'$. Lorsque la face du prisme est carrée, c'est-à-dire lorsque $m = n$, on a donc $q = -q'$. Les quantités d'électricité dégagées par un même poids s'exerçant soit parallèlement, soit perpendiculairement à l'axe binaire sont, dans ce cas, égales et de signe contraire.

Pour une pression de 1 kilogramme exercée dans la direction de l'axe binaire, la quantité d'électricité dégagée est susceptible de porter une sphère de $16^{cm},8$ au potentiel d'un daniell, c'est-à-dire qu'elle est égale à 0,063 unité C. G. S. électrostatique. La piézo-électricité du quartz est donc plus grande que celle de la tourmaline.

Pour expliquer l'opposition des signes dans le cas d'une pression dirigée suivant l'axe binaire et dans celui d'une pression dirigée per-

pendiculairement à cet axe, on peut remarquer que lorsqu'on comprime normalement à *mn*, les molécules sont rapprochées suivant la direction de l'axe binaire, tandis qu'elles sont écartées suivant la même direction, lorsqu'on comprime normalement à *mm'*.

Toutefois, cette règle ne peut pas être regardée comme générale, car MM. Curie ont observé que lorsqu'on comprime un prisme de tourmaline normalement à l'axe ternaire, l'électricité se dégage encore, comme dans le cas de la compression suivant l'axe, sur les faces normales à cet axe, mais la face qui est positive dans un cas l'est encore dans l'autre.

Lois générales de la piézo-électricité. — Des faits qui précèdent, comme de tous ceux qui ont été observés par MM. Curie, il résulte qu'on peut admettre, d'une manière générale, que tous les cristaux non conducteurs dépourvus de centre de symétrie, et ceux-là seulement, sont piézo-électriques, c'est-à-dire sont susceptibles de prendre deux pôles électriques de nom contraire lorsqu'on les comprime ou qu'on les décomprime.

La loi générale de la quantité d'électricité est, dans tous les cas, celle que nous avons donnée plus haut :

$$q = ks. \frac{P}{s'}$$

P étant le poids, *s* l'aire de la face qui dégage l'électricité, *s'* celle de la face qui reçoit la pression. Mais, dans un même cristal, *k* varie à la fois et avec la direction de la pression, et avec la direction de la surface sur laquelle on exerce la pression. La loi des variations de *k* est sans doute fort complexe, et elle est très loin d'être connue. Il est probable que, dans chaque cas particulier, il faudrait connaître, en chaque point du cristal, la déformation, ou le déplacement relatif des molécules, produite par la pression piézo-électrique, et connaître aussi le coefficient électrique par lequel il faudrait multiplier cette déformation.

Mais en l'absence d'une théorie générale, on peut tout au moins tirer parti des relations de symétrie qui existent dans le cristal.

Remarquons d'abord que la piézo-électricité a pour résultat de produire à la surface une répartition des deux fluides identique à celle qu'on obtiendrait en plaçant ce cristal dans un champ magnétique uniforme. Le phénomène serait complètement connu si nous connaissions dans chaque cas particulier la direction de la force électrique de ce champ, en donnant à ce mot de direction son sens géométrique précis, qui distingue dans une même droite deux directions opposées. Si cette direction

tait connue et si l'ellipsoïde d'induction l'était aussi, nous en déduiions la ligne des pôles électriques. Cette ligne ne se confond pas en énéral avec la direction de la force, mais il est à présumer qu'elle ne ait jamais avec elle un bien grand angle, et nous négligerons la différence.

La ligne des pôles étant connue, il y aura un plan, que nous pourrons upposer perpendiculaire à cette ligne, séparant la partie négative de a partie positive du cristal, et que nous appellerons le plan de nulle électricité.

Toute face taillée dans le cristal suivant une direction oblique ou parallèle au plan de nulle électricité, dégage de la piézo-électricité. Toute face normale au plan de nulle électricité ne dégage d'électricité ni par compression ni par décompression.

Si nous taillons le cristal sous la forme d'une sphère, et si nous exerçons la pression aux deux extrémités d'un diamètre, le plan de nulle électricité partagera la surface de cette sphère en deux hémisphères de signes opposés; la ligne des pôles sera perpendiculaire à ce plan et ses extrémités seront les points de dégagement électrique maximum.

Si nous restreignons expressément la piézo-électricité au cas où *la pression s'exerce sur des faces égales* et opposées, la pression est un phénomène symétrique par rapport à un point. Si le cristal est symétrique par rapport à un centre, la pression symétrique que nous imaginons ne peut développer aucun phénomène dyssymétrique. Or, comme la production d'un champ électrique uniforme, qui a une direction déterminée, est un phénomène essentiellement dyssymétrique, nous en conclurons que tous les cristaux dans lesquels on observera la piézo-électricité seront nécessairement dépourvus de centre, soit que cette particularité de la structure intérieure se dévoile dans la forme extérieure, soit que cette forme reste impuissante à la déceler.

Le même raisonnement nous permettra de conclure que, dans un cristal qui manifeste la piézo-électricité, et qui possède des axes avec des plans de symétrie, la ligne des pôles électriques, dont les deux directions sont physiquement distinctes, doit être dirigée suivant une droite dont les deux directions sont cristallographiquement différentes. Là aussi, il peut arriver que cette dyssymétrie de la direction existe dans la structure intérieure, mais ne se décèle pas dans la forme extérieure. Les phénomènes électriques concourront alors, avec l'observation de la forme extérieure, à nous dévoiler la structure intérieure du cristal.

Il résulte de cette règle la conséquence suivante : Lorsqu'un cristal piézo-électrique possède des axes ou des plans de symétrie la ligne des pôles électriques ne peut jamais être perpendiculaire ni à un axe pair, ni à un plan de symétrie.

D'ailleurs, si la pression est exercée suivant un axe de symétrie, ou perpendiculairement à un axe de symétrie binaire, ou bien si elle est comprise dans un plan de symétrie, ces éléments de symétrie persistent dans le phénomène.

Un axe de symétrie persistant coïncide nécessairement avec la ligne des pôles électriques.

Un plan de symétrie persistant passe par la ligne des pôles électriques ou coïncide avec le plan de nulle électricité.

Si ces règles qui déterminent la position de la ligne des pôles électriques sont contradictoires, il n'y a pas d'électricité développée par la pression.

Tel est, par exemple, le cas où la pression s'exerce suivant un axe d'ordre supérieur à 2, perpendiculaire à un plan contenant plusieurs axes binaires. Dans ce cas, en effet, tous les axes de symétrie persistent et chacun d'eux devrait coïncider avec la ligne des pôles.

Ces règles ne s'appliquent qu'au cas où la pression exercée sur le cristal est un phénomène s'exerçant suivant une droite et symétrique par rapport à un centre. Si cela n'avait pas lieu, non seulement ces règles n'auraient plus aucune raison d'être, mais il est très vraisemblable qu'on observerait des phénomènes piézo-électriques dans toutes les substances cristallisées, quelles qu'elles soient, et peut-être même aussi dans les corps amorphes. Les expériences manquent encore sur ce point. Il serait intéressant, à ce point de vue, d'examiner, par exemple, ce qui se passerait dans un cristal non hémiédre, ayant la forme d'un tétraèdre et soumis à la compression.

Expériences de M. W. Röntgen sur la piézo-électricité d'une sphère de quartz. — Nous allons appliquer la théorie précédente au cas, qui a été réalisé expérimentalement par M. W. C. Röntgen[1], d'une sphère de quartz pressée aux deux extrémités d'un même diamètre.

Comme nous l'avons déjà dit, le quartz conserve les axes de symétrie et a perdu les plans de symétrie. Supposons une sphère de quartz projetée sur un plan perpendiculaire à l'axe ternaire, O sera le pôle de cet axe; a_1, a_2, a_3 (fig. 171) ceux des pôles des axes binaires qui sont

1. *Wiedem Ann.* 19,319 (1883).

tournés vers les angles non modifiés par les faces rhombiques s; nous appellerons ces pôles *positifs*, parce qu'ils prennent l'électricité positive lorsqu'on comprime suivant la direction d'un axe binaire. Les pôles a'_1, a'_2, a'_3 sont les pôles négatifs des axes binaires. Nous menons les grands cercles tels que $p_1 p_4$, qui représentent les plans de symétrie supprimés par l'hémiédrie et sont respectivement perpendiculaires sur les axes binaires. Ces grands cercles partagent la surface de la sphère en six fu-

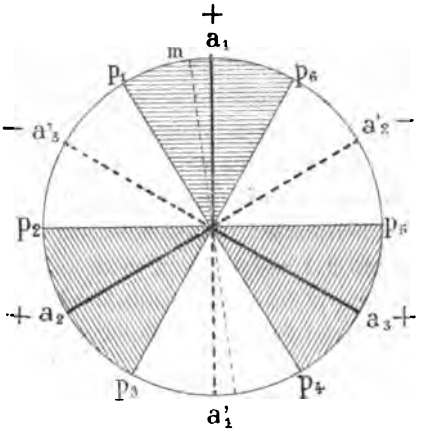


Fig. 171.

seaux qui renferment alternativement un pôle positif et un pôle négatif. Dans la figure on a haché les fuseaux positifs et laissé blancs les fuseaux négatifs.

On isole la sphère de quartz, d'un diamètre de 3 centimètres environ; on la place sur le porte-objet d'un microscope, de manière que le diamètre passant par le point d'appui soit exactement dans la direction de l'axe du microscope, et on exerce une pression sur la sphère en abaissant le tube de l'appareil qui a été chargé de poids; l'objectif a été remplacé par une pièce isolante, portant une petite pièce métallique qui vient presser la sphère. On peut à volonté faire reposer la sphère soit sur un disque métallique, soit sur un disque isolant. Pendant que la sphère est pressée, on en explore électriquement les diverses parties avec un fil terminé par un petit plan d'épreuve et relié à un électromètre. On observe ainsi les faits suivants :

1° Compression suivant l'axe ternaire. — Aucun signe électrique dans la sphère, ou traces faibles et irrégulières.

2° Compression suivant un axe binaire $a_1\ a'_1$. — a_1 est le pôle positif, a'_1 le pôle négatif, puisque cet axe binaire est conservé dans le phénomène.

3° Compression suivant la trace horizontale $p_2\ p_5$ d'un plan de symétrie supprimé. — L'axe binaire perpendiculaire $a_1\ a'_1$ est conservé, donc il est encore la ligne des pôles. Mais a_1 est le pôle *négatif*, et non plus le pôle positif, inversion que les considérations précédentes étaient impuissantes à faire prévoir.

4° Compression suivant un point quelconque du grand cercle $p_2\ p_5$. — La ligne des pôles est toujours $a_1\ a'_1$, mais l'intensité de l'électricité dégagée doit aller en diminuant lorsque le point sur lequel la pression est exercée va de p_2, où elle est maximum, à 0, où elle est nulle.

5° Compression appliquée en un point m situé entre l'extrémité d'un axe binaire a' et la trace d'un plan de symétrie supprimé. — Dans ce cas, les règles de symétrie sont insuffisantes, mais on doit considérer comme vraisemblable, et l'expérience confirme en effet, que la ligne des pôles est située dans le plan horizontal. Lorsque la pression est en a_1, le pôle positif est en a_1; lorsque la pression est en p_1, le pôle positif est en a'_2, se déplaçant ainsi de 60° dans le sens droit lorsque le point de pression se déplace de 30° dans le sens gauche. Pour un point de pression situé en m, le pôle positif doit être quelque part entre a_1 et p_6. Si le déplacement angulaire du pôle positif était proportionnel à celui du point de pression, lorsque m serait à égale distance de p_1 et de a_1, le pôle positif serait en p_6, à égale distance de a_1 et de a'_2; la ligne des pôles serait alors à 45° de la ligne de pression. Le pôle positif se trouve à 45° du point de pression en tournant du côté où se trouve le pôle positif développé par le premier suivant la trace la plus voisine du plan de symétrie déficient. L'observation confirme ces résultats

6° Compression suivant un point quelconque de la sphère. — Si le point de pression se trouve dans le fuseau positif qui comprend un pôle binaire positif a_1, la ligne des pôle est inclinée d'une certaine manière sur la ligne de pression; le pôle le plus rapproché de a_1 est le pôle positif. — Lorsque le point de pression est situé dans le grand cercle qui passe par un axe binaire et l'axe ternaire, le plan de nulle électricité est perpendiculaire à ce grand cercle qui contient, par conséquent, la ligne des pôles électriques.

Piézo-électricité du sel de Seignette. — Nous prendrons encore comme exemple un cristal du système rhombique, le sel de Seignette, par exemple, qui est hémiédrique holoaxe.

Les extrémités des axes binaires ne sont pas distinctes l'une de l'autre. et il en est de même de toutes les lignes comprises dans les plans principaux passant par deux de ces axes. Si a_1a_3, a_2a_4, $a_1a_2a_3a_4$ (*fig.* 171) sont les projections de ces trois plans principaux, une pression exercée en un point quelconque de ces trois grands cercles ne développe aucune électricité dans l'un quelconque d'entre eux, et par conséquent aucune électricité dans la sphère. Au contraire, les deux octants opposés suivant le sommet d'un des axes binaires correspondent aux deux faces du tétraèdre, et les octants adjacents aux sommets du même tétraèdre. Ces derniers deviennent positifs lorsqu'on exerce une pression en un point quelconque de leur surface; les autres deviennent négatifs. Le maximum d'électricité obtenue est évidemment quelque part vers le milieu de l'octant.

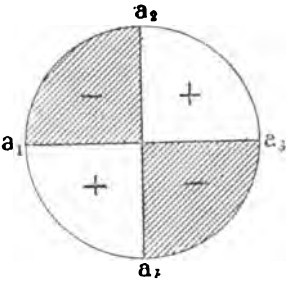


Fig. 171.

Ces déductions théoriques ont été vérifiées par les observations de MM. Curie.

Piézo-électricité d'un cristal cubique. — Les cristaux cubiques sont susceptibles de deux modes d'hémiédrie non centrés, tous deux caractérisés par la persistance de quatre axes ternaires et de trois axes binaires.

La surface d'un hémisphère se divise donc en quatre octants; deux d'entre eux, opposés par le sommet, contiennent les extrémités des axes ternaires positifs par compression, les deux autres contiennent les sommets ternaires négatifs. Une compression suivant une direction quelconque comprise dans un des plans passant par les axes perpendiculaires aux faces du cube, est dirigée perpendiculairement à un axe binaire; cet axe devrait donc être la ligne des pôles; mais comme les deux extrémités en sont identiques, il n'y aura pas d'électricité dégagée. Il n'y aura d'électricité dégagée que par une compression appliquée en un point situé dans l'intérieur d'un octant. Le pôle est alors du même signe que celui du pôle de l'octant.

Le chlorate de soude peut être pris comme exemple.

Phénomène réciproque de la piézo-électricité. — Loi de M. Lippmann. — Vérification de MM. Curie. — M. Lippmann, dans

un travail très intéressant pour la philosophie de la science[1], a fait remarquer que l'énergie électrique, c'est-à-dire le produit de la masse électrique par le potentiel, est une forme d'énergie entièrement analogue à celles que mesurent la masse multipliée par la hauteur de chute ou l'entropie calorifique multipliée par la température; que dans chacune de ces formes d'énergie, l'un des facteurs du produit, la masse matérielle, l'entropie ou la masse électrique, reste invariable en quantité. La théorie des deux fluides repose, en effet, sur ce fait que les quantités d'électricité dégagées dans un phénomène sont toujours égales et de signes opposés, de sorte que la somme algébrique en reste constante. Il en résulte que l'on peut appliquer à l'électricité, *mutatis mutandis*, tout ce qui a été démontré pour la chaleur, et en particulier le principe de Carnot, sous la forme que lui a donnée M. Clausius.

Lorsqu'on comprime un corps, il se développe de la chaleur; en partant du principe de la conservation de l'énergie et de celui de Carnot, on démontre que ce phénomène en implique un autre, à savoir, que le même corps échauffé doit se dilater. Les deux phénomènes sont *réciproques*.

Le phénomène réciproque, dans ce cas, et dans tous les cas analogues, est de sens tel qu'il tend à s'opposer au phénomène primitif. Si dans le premier cas, en effet, le corps transforme en chaleur le travail mécanique qui lui est appliqué, il doit restituer en travail mécanique la chaleur qui lui est communiquée. La loi de Lenz, relative à l'induction dynamo-électrique, n'est qu'un cas particulier de cette loi générale.

Quoi qu'il en soit, en appliquant cette conséquence aux phénomènes électriques, nous aurons le droit de dire que puisqu'un cristal hémièdre dépourvu de centre dégage de l'électricité par la compression, le même cristal, électrisé dans le même sens, doit se dilater. Si les pôles électriques produits de force dans le cristal occupent la même place que celle qu'ils occuperaient dans le phénomène de compression, la dilatation qu'amène cette électrisation aura la même direction que celle de la compression.

Cette conséquence théorique a été vérifiée par MM. Curie au moyen de la disposition expérimentale suivante.

Entre deux plaques de bronze massives maintenues par des colonnes en fer et serrées par une vis, on place un parallélipipède de quartz reposant sur une face taillée perpendiculairement à un axe binaire. Aux

1. *Ann. de ch. et de phys.* (5), 24,135.

leux extrémités de ce parallélipipède sur lesquelles on recueillerait l'électricité produite par compression, on applique deux lames de cuivre en communication avec chacun des deux pôles d'une machine de Holtz; le pôle positif étant appliqué à la face qui, par compression, donnerait de l'électricité positive. Le quartz étant soumis à cette induction doit faire effort pour se dilater entre les deux plaques de bronze entre lesquelles il est serré, et comme la dilatation est impossible, celle-ci doit se traduire par une augmentation de pression. MM. Curie la constataient en plaçant, au-dessous du quartz soumis à l'induction, un autre quartz sur lequel la compression donnait lieu à un dégagement électrique; ce dégagement était observé au moyen d'un électromètre.

On aurait pu tout aussi bien apprécier l'augmentation de pression et même en mesurer la grandeur en plaçant au-dessous du quartz induit un cube de verre sur lequel on aurait observé la biréfringence produite par la compression.

Vérification de la loi de M. Lippmann par l'emploi des phénomènes optiques biréfringents. — Expériences de M. Kundt. — MM. Kundt[1] et Röntgen ont eu l'idée d'observer, sur le quartz même soumis à l'induction, les effets de la dilatation ou de la contraction produits par l'induction électrique. Nous n'indiquerons que le mode d'observation de M. Kundt, qui est le plus simple. On taille un cube de quartz dont deux faces telles que *abcd* (*fig.* 172) sont perpendiculaires à l'axe ternaire. Les faces latérales sont, les unes perpendiculaires, les autres parallèles à un axe binaire 1 1'. Nous supposerons que la face *ab* est celle qui devient positive par la pression. On couvre les faces *ab* et *cd* de deux plaques de cuivre que l'on met en communication avec les deux pôles d'une machine de Holtz, et l'on observe, au moyen d'un microscope polarisant à lumière convergente, les anneaux produits, entre deux nicols croisés à angle droit, à travers les deux faces perpendiculaires à l'axe ternaire. Lorsqu'il n'y a pas d'induction, ces anneaux sont circulaires; lorsque l'induction se produit, le cristal se contracte ou se dilate suivant un sens déterminé, et les anneaux s'aplatissent suivant

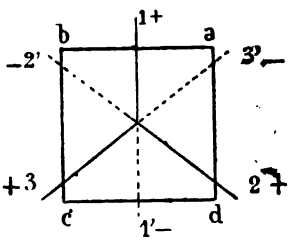


Fig. 172.

1. *Wiedem. Ann.* 18,228 (1883).

la direction de la pression en s'allongeant suivant une direction perpendiculaire. On fait ainsi les observations suivantes :

1° face *ab* électrisée +, face *cd* électrisée —. Dilatation suivant 11′ (fig. 173)
2° face *ab*..... —, face *cd*..... +. Contraction suivant 11′ (fig. 174)

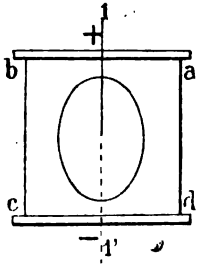


Fig. 173.

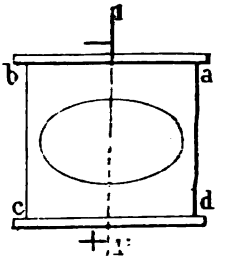


Fig. 174.

On applique ensuite les lames de cuivre sur les faces latérales *bc* et *ad*; nous avons vu que, pour obtenir de l'électricité suivant une direction telle que p_2p_5 perpendiculaire à un axe binaire, il faut comprimer suivant une direction *mm′* inclinée de 45° sur p_2p_5. On en conclut que lorsqu'on électrise les extrémités de p_2p_5, on doit avoir une dilatation ou une compression suivant une direction inclinée de 45° sur p_2p_5.

On observe, en effet, les faits suivants :

Face *bc* +, face *cd* —. Compression suivant 22′, dilatation suivant 33′ (fig. 175).
Face *bc* —, face *cd* +. Dilatation suivant 22′, compression suivant 33′ (fig. 176).

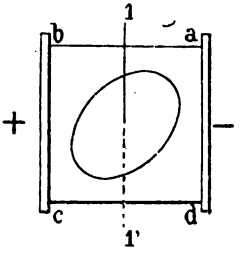


Fig. 175.

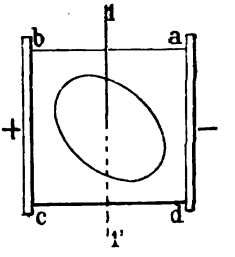


Fig. 176.

2° ÉLECTRICITÉ DÉGAGÉE PAR UNE ACTION THERMIQUE. — PYRO-ÉLECTRICITÉ.

Pyro-électricité de la tourmaline. — L'influence que la chaleur exerce sur les cristaux de tourmaline en les chargeant d'électricité de noms contraires aux deux extrémités de l'axe ternaire est connue depuis

fort longtemps. Leymerie en fait mention dans son Histoire de l'Académie des sciences en 1717[1]. Cette propriété, à laquelle on a donné le nom de *pyro-électricité*, a été étudiée par Æpinus en 1756, et depuis cette époque de nombreux observateurs se sont succédé soit pour en toutes les particularités, éclaircir davantage, soit pour l'étendre à d'autres substances cristallisées.

Voyons d'abord en quoi consiste le phénomène.

Si l'on prend un prisme de tourmaline et si on le saisit en son milieu par une petite pince isolée, on observe qu'en chauffant le cristal, et pendant tout le temps que dure l'échauffement, l'extrémité qui porte les faces b^1 prend l'électricité positive, tandis que celle qui porte les faces e^1 prend l'électricité négative. On peut s'assurer de cette circonstance, soit en essayant l'action exercée par chaque extrémité sur une aiguille mobile autour d'un axe vertical et chargée d'électricité de signe connu; soit en mettant une des extrémités du prisme en contact avec le sol, ce qui met en liberté l'électricité accumulée à l'autre pôle et permet de charger avec le cristal l'une des lames d'un condensateur. On peut encore suspendre le prisme de tourmaline en voie d'échauffement par un fil de soie, de manière que le prisme placé horizontalement puisse osciller dans un sens ou dans l'autre; on constate alors qu'un bâton de résine frotté attire une des extrémités et repousse l'autre.

Lorsque le cristal, après avoir été échauffé, est abandonné au refroidissement, et pendant tout le temps que dure ce refroidissement, on observe des phénomènes inverses des précédents; le pôle b^1 devient négatif, le pôle e^1 positif.

Dans tous les cas, lorsque toute la masse du cristal est en équilibre de température, on ne constate aucune action électrique.

Un phénomène très important est le suivant : Quand on brise un prisme de tourmaline en voie d'échauffement ou de refroidissement, et possédant deux pôles de nom contraire, chacun des fragments possède deux pôles, comme cela aurait lieu pour les fragments d'un aimant. La polarité des extrémités d'un prisme est donc liée à la polarité de chacune des molécules du cristal.

Lois établies par M. Gaugain. — M. Gaugain, dans un travail des plus remarquables[2], a le premier établi, sur des bases expérimentales

1. Jamin et Bouty. — *Traité de physique*. T. I, 299.
2 *Ann. de ch. et de phys.* (3), 57.

précises, les lois de la pyro-électricité de la tourmaline, obscurcies par l'imperfection des travaux antérieurs.

Le prisme de tourmaline était taillé à ses deux extrémités suivant deux bases planes perpendiculaires à l'axe ternaire. Sur chacune des bases, on appliquait une feuille d'étain dont l'une était mise en contact avec le sol, et l'autre avec un électromètre à feuilles d'or. Pendant l'échauffement, par exemple, l'électricité s'accumulant sur la lame du condensateur de l'électromètre, les feuilles divergeaient jusqu'à ce qu'elles vinssent à se décharger en touchant les boules extrêmes. Chaque décharge correspondait à l'écoulement d'une certaine quantité d'électricité, et le nombre des décharges pouvait ainsi devenir une mesure des quantités d'électricité dégagées à l'extrémité du cristal.

Les lois établies par M. Gaugain peuvent se résumer dans la formule suivante. Si q représente la quantité d'électricité pendant une variation ∂t de la température, si s est la surface de la base à travers laquelle l'électricité se dégage, on a

$$q = k.s.\partial t.$$

L'électricité est positive ou négative suivant le signe de q; k est indépendant du signe de ∂t, il est de signe contraire pour les deux extrémités du cristal.

On voit que la quantité q est indépendante de la distance des deux bases; elle est la même lorsque le prisme est réduit à quelques fractions de millimètre, ou lorsqu'il a une longueur de plusieurs centimètres. Si l'on ajoute que q est proportionnel à s, on en déduira que la quantité d'électricité dégagée ne dépend que de la variation de température qui se produit entre deux molécules contiguës et placées sur une même droite parallèle à la hauteur.

En résumé, on peut dire que le cristal de tourmaline, en voie d'échauffement ou de refroidissement, se comporte comme s'il était placé dans un champ électrique uniforme dont la force, dirigée dans le sens de l'axe ternaire, changerait de sens avec le signe de la variation de température.

Analogies entre la piézo- et la pyro-électricité. — Il faut remarquer la parfaite analogie que les phénomènes pyro-électriques présentent avec les phénomènes piézo-électriques. Les lois sont les mêmes en substituant la variation de température à la variation de pression. Bien plus, non seulement dans la tourmaline, mais encore dans toutes les autres substances connues, le signe de l'électricité développée sur

une face par la *compression* est toujours le même que celui de l'électricité développée sur la même face par *refroidissement*. C'est-à-dire que, dans l'un et l'autre cas, le *développement de l'électricité se fait de la même façon que s'il était simplement lié à la variation de la distance qui sépare les molécules*. Lorsque l'une des propriétés pyro- ou piézo-électriques a été constatée sur un cristal, on peut non seulement conclure à l'existence de l'autre, mais dire encore le sens dans lequel cette dernière se produit.

Définition précise de la pyro-électricité. — Cette analogie si instructive entre les phénomènes électriques développés par la pression et par le refroidissement ne doit pas cependant faire oublier la différence très grande qui sépare les deux modes d'action.

Dans un cristal comprimé, nous avons dû éliminer tous les cas dans lesquels la pression n'est pas appliquée sur des faces égales et parallèles. Une règle analogue doit être posée dans la pyro-électricité pour éliminer toutes les particularités du phénomène qui ne seraient pas réellement spécifiques pour le corps et varieraient avec chaque condition particulière de l'expérience. Nous nous restreindrons donc au cas où une sphère cristalline se refroidit ou s'échauffe en gardant à chaque instant une température égale pour tous les points de la surface.

Ce serait là une condition difficile à réaliser dans la pratique, mais nous pourrons en approcher en taillant le cristal suivant une forme parfaitement définie, et en faisant en sorte que tous les points de la surface restent à une température qui soit la même pour tous pendant toute la durée du réchauffement ou du refroidissement.

Déductions tirées des lois de symétrie. — Avec ce point de départ, nous pouvons appliquer les règles de symétrie dont nous avons fait usage dans l'étude de la piézo-électricité. Seulement, comme ici nous supposons le refroidissement identique suivant toutes les directions, il est clair que tous les éléments de symétrie du cristal régiront le phénomène, et qu'aucun d'eux ne disparaîtra. On en conclut qu'il n'y a de cristaux pyro-électriques que ceux qui sont dépourvus de centre; mais ceux-ci ne satisfont pas tous aux données du problème.

En effet, s'il y a un axe de symétrie dans le cristal, la ligne des pôles sera dirigée suivant cet axe. Il n'y aura donc pas de pyro-électricité, c'est-à-dire qu'une sphère cristalline se refroidissant régulièrement ne développera pas d'électricité à sa surface, dans tous les cristaux non centrés qui possèdent plusieurs axes de symétrie. Il faut qu'il n'y ait qu'un seul axe de symétrie aux deux extrémités duquel l'absence du

centre donne des propriétés différentes. Les cristaux qui satisfont cette condition sont ceux auxquels les cristallographes allemands donnent le nom d'*hémimorphes*.

Il ne peut pas y avoir de cristaux hémimorphes dans le système cubique.

Dans le système sénaire, on aurait les hémiédries

$$A^6\ 0L^2\ 0C'\ 3P\ 3P',$$

et la tétartoédrie[1]

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 0P;$$

mais aucun de ces modes cristallins n'est réalisé dans la nature.

Dans le système *ternaire*, on a le mode hémiédrique

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 3P$$

qui est celui de la tourmaline; ou le mode tétartoédrique

$$A^3\ 0L^2\ 0C\ 0P$$

qui n'est pas connu dans la nature.

Dans le système *quadratique*, on aurait le mode hémiédrique

$$A^4\ 0L^2\ 0L'^2\ 0C\ 0\Pi\ 2P\ 2P'$$

et le mode tétartoédrique dérivé de celui-ci par la suppression des plans de symétrie. Aucun d'eux n'est connu dans la nature.

Dans le système terbinaire, on a le mode hémiédrique

$$L^2\ 0L'^2\ 0L''^2\ 0C\ P'\ P''$$

qui est celui de la calamine.

Dans le système binaire, on a le mode hémiédrique et holoaxe

$$A^2\ 0C\ 0\Pi$$

qui est celui du sucre et d'un très grand nombre de cristaux organiques. Le mode d'hémiédrie

$$0A^2\ 0C\ \Pi$$

1. L'hémitétartoédrie $A^3\,0L^2\,0C,\ \Pi$, qui n'est pas davantage connue dans la nature, ne satisferait pas à la condition, car le plan de symétrie Π étant perpendiculaire à l'axe ternaire, les deux extrémités de celui-ci seraient identiques entre elles.

pourrait satisfaire à la condition, mais il ne s'est encore jamais rencontré.

Dans le système anorthique enfin, l'hémiédrie qui supprime le centre satisferait à la condition de la pyro-électricité, mais elle n'est pas non plus connue dans la nature.

Les substances que l'on a reconnues avec certitude être pyro-électriques au sens précis que nous attachons à ce mot, sont en somme assez peu nombreuses. Nous citerons la tourmaline qui est ternaire, la calamine et la topaze qui sont terbinaires, l'acide tartrique et le sucre qui sont binaires. Toutes ces substances, à l'exception de la topaze, manifestent extérieurement d'une manière très nette leur dyssymétrie interne. Dans la topaze, l'hémimorphisme est prouvé surtout par la pyro-électricité. Cependant on a trouvé certains cristaux de ce minéral qui ne montraient qu'à une seule de leurs extrémités les faces a^1, e^1, $e^{1/3}$, $e_{1/3}$. (Des Cloizeaux.)

Expériences de Riess, de G. Rose et de M. Hankel. — Le nombre des substances que l'on a considérées, d'après certaines expériences, comme pyro-électriques, est beaucoup plus considérable que celui qui semblerait résulter de la courte liste qui précède et qui, d'ailleurs, est loind'être complète. Mais on avait été induit en erreur par une définition imparfaite des conditions de refroidissement et de réchauffement nécessaires pour donner naissance à la pyro-électricité. Si on ne se limite pas strictement au cas où la surface qui s'échauffe ou se refroidit est dans tous ses points à la même température, il est clair que le phénomène changera avec les conditions de refroidissement, variables avec le mode d'expérience, avec la forme du corps, etc., et n'aura ainsi plus rien de spécifique pour le corps soumis à l'observation.

C'est ainsi que Riess et G. Rose, en expérimentant avec l'axinite, qui cristallise dans le système anorthique, ont annoncé que cette substance possède deux axes de pyro-électricité distincts ; l'un serait dirigé de la face e^1 de gauche à l'angle trièdre aigu de droite, formé par les plans p, t, a^1; le second, parallèle au premier, joindrait la face inférieure droite à l'angle trièdre aigu gauche. On aurait donc deux axes distincts, parallèles entre eux, ne passant pas par le milieu du cristal, et dont les pôles situés du même côté seraient de nom contraire. Il est clair qu'un semblable énoncé ne présente de sens que pour un cristal d'axinite donné et des conditions de refroidissement données. Ce n'est donc pas une propriété de l'axinite, mais une particularité accidentelle manifestée par un échantillon spécial dans des conditions spéciales. Une

propriété, spécifique pour un cristal régulièrement formé, est nécessairement commune à toutes les directions parallèles menées à travers ce cristal.

On peut en dire autant, avec autant de raison, des expériences des mêmes observateurs sur la topaze. Suivant eux, si l'on coupe un prisme de topaze par le plan de symétrie qui passe par l'axe vertical et la grande diagonale de la base, on partage le cristal en deux moitiés dont les pôles pyro-électriques sont tournés en sens contraire, de sorte que le cristal, au lieu d'être analogue à un aimant bipolaire, le serait à un aimant à pôle central. Il est clair que l'existence d'un plan jouissant de propriétés particulières et distinctes de tous les autres plans parallèles est incompatible avec la notion même de la cristallisation et doit être rejetée, malgré l'autorité qui s'attache si justement aux noms des observateurs.

Des critiques analogues peuvent être adressées à la longue série d'observations sur la pyro-électricité des cristaux, due à M. Hankel. Ce savant se servait de cristaux ayant leur forme naturelle; il les plongeait dans une boîte métallique remplie de limaille de fer en laissant seulement à découvert les parties sur lesquelles devait porter l'observation et dont on étudiait l'état électrique des diverses parties au moyen d'un fil mis en communication avec un électromètre. Dans ces conditions, il est clair, et MM. Friedel et Curie ont montré[1] *que cela* avait lieu réellement, que le refroidissement des diverses parties du cristal n'est pas du tout le même, que la marche de ce refroidissement dépend non seulement de la nature du cristal, mais encore de sa forme extérieure et des conditions de l'expérience. On n'observe donc en aucune façon la vraie pyro-électricité du corps soumis à l'expérience.

Quoi qu'il en soit, les expériences de M. Hankel ainsi que celles de Riess et G. Rose ont montré ce fait en lui-même fort important *que*, si tous les cristaux ne sont point, dans le vrai sens qu'on doit attacher à ce mot, pyro-électriques, ils sont du moins susceptibles (et il *en serait* peut-être de même de tous les corps diélectriques) de se charger superficiellement d'électricité, soit positive, soit négative, *toutes les* fois qu'il se produit des variations de température inégalement réparties dans la masse du cristal.

Procédé d'expérimentation de M. Friedel. — Intérêt qu'il présente. — Avant d'être arrivé, au sujet de la vraie définition de la pyro-

1. *C. R.*, mai 1885.

électricité, à des conclusions analogues à celles qui précèdent, M. Friedel avait employé[1], pour constater la pyro-électricité des corps, un procédé qui donne prise aux critiques précédentes, mais qui est très intéressant, parce que les conditions de réchauffement du cristal y sont définies avec précision, et qu'il permet ainsi d'acquérir des données réellement spécifiques pour les cristaux expérimentés.

Le procédé consiste à découper une lame dans le cristal, à le placer sur une lame d'étain en communication avec le sol, et à faire reposer sur lui la base d'une demi-sphère métallique en communication avec un électromètre. La base de l'hémisphère a une surface notablement plus petite que celle de la lame ; elle forme donc comme une source de chaleur qui se propage dans le cristal suivant des cercles dont le centre de l'hémisphère était le centre. Lorsqu'on place alors la lame sur le porte-objet d'un microscope polarisant, on constate très bien, par la dépolarisation de la lumière, la propagation de la chaleur et la répartition incessamment variable de la température qui en est la conséquence. Dans ces conditions, les surfaces isothermes étant sensiblement des cylindres circulaires dont l'axe est normal à la lame, il est clair que cet axe jouit de propriétés spéciales à l'exclusion de tous les autres.

On peut aller plus loin et remarquer que, par suite de la propagation autour d'un axe central, et pendant cette propagation, les couches cylindriques intérieures étant plus chaudes que les extérieures, les premières ne peuvent pas se dilater librement et sont comprimées. Un cylindre très délié ayant pour axe une normale à la lame est donc comprimé, et si le phénomène pyro-électrique est possible suivant la direction de cette normale, celle-ci devient la ligne des pôles électriques. Le procédé imaginé par M. Friedel permet donc de reconnaître dans un cristal, qui n'est pas pyro-électrique au sens propre du mot, les directions particulières qui, sous l'influence d'une compression ou d'une traction perpendiculaire, peuvent prendre des pôles électriques. On pourrait donner au phénomène particulier découvert par M. Friedel le nom de pyro-électricité *axiale*.

Par son procédé, M. Friedel a pu reconnaître, avant la découverte de MM. Curie, qu'une lame de *quartz* taillée perpendiculairement à un axe binaire et échauffée par un point central prend des pôles opposés sur les deux faces.

1. *Bull. de la Soc. minér.*, 2,31 (1879).

Avec la *blende* qui cristallise dans le système cubique en présence l'hémiédrie tétartoèdrique, M. Friedel a montré que l'axe ternaire est un axe de pyro-électricité.

Il en est de même pour la *helvine*, aussi tétraédrique, et pour le *chlorate de soude*, qui est tétartoèdrique.

Lorsque l'hémisphère, que M. Friedel place sur la lame pour l'échauffer a une surface égale ou supérieure à celle de la lame cristalline, il est clair que la marche de la température se fait suivant des surfaces isothermes parallèles à la surface, et toute trace de pyro-électricité disparaît sur la face qui porte l'hémisphère.

Pyro-électricité de la boracite. — La boracite présente des phénomènes pyro-électriques particuliers qui ont été tout dernièrement étudiés par MM. Friedel et Curie[1]. Cette substance cristallise *dans le* système cubique, au moins à en juger par sa forme extérieure, et nous avons déjà dit dans le tome Ier que cette substance pouvait être considérée comme un type de l'hémiédrie tétraédrique. On a reconnu depuis longtemps que la boracite est pyro-électrique au vrai sens du mot, et qu'une lame taillée perpendiculairement à un axe ternaire se charge, par refroidissement, d'électricité positive du côté où ne se trouvent pas les faces du tétraèdre. MM. Friedel et Curie ont constaté d'une manière positive la pyro-électricité de la boracite, qui paraît contraire à la règle formulée plus haut.

Mais j'ai montré, il y a un certain nombre d'années[2], que la boracite n'est pas réellement cubique. Les phénomènes optiques démontrent péremptoirement que chaque cristal de boracite est formé par la juxtaposition de douze pyramides ayant pour sommet commun le centre du cristal, et pour bases respectives les faces du dodécaèdre rhomboïdal. Chacune de ces pyramides est un cristal terbinaire dont les axes binaires sont dirigés l'un suivant la normale à la base, et les deux autres suivant les deux diagonales de la face rhombe. De plus ces cristaux terbinaires sont hémimorphes et l'axe d'hémimorphisme est dirigé suivant la petite diagonale du rhombe. En un sommet du pseudo-dodécaèdre rhomboïdal viennent aboutir trois de ces axes hémimorphes qui se réunissent par leurs extrémités de même nom. Il en résulte que les droites qui vont d'un angle ternaire à l'autre du pseudo-dodécaèdre joignent un point de croisement des extrémités des axes binaires de même

1. *Comptes rendus.* — Juillet 1883.
2. *Ann. des mines* (7), X. (1876).

om à un point de croisement des extrémités de nom contraire. Cette droite peut donc être et est en effet un axe de piézo- et de pyro-électricité.

J'ai fait voir[1] plus tard que la boracite devient subitement cubique à la température de 265°. A cette température elle doit donc cesser subitement d'être pyro-électrique, et c'est en effet ce que MM. Friedel et J. Curie ont constaté de la manière la plus nette[2]. Ils ont vu en même temps qu'au moment du changement d'état la pyro-électricité est particulièrement intense, c'est-à-dire qu'au moment où change la symétrie de la molécule, il se produit un dégagement très considérable d'électricité polaire. Il faut espérer que les savants observateurs qui l'ont découvert nous feront connaître bientôt dans tous les détails ce phénomène particulièrement intéressant.

Pyro-électricité des cristaux conducteurs. — Cuivre gris et pyrite cuivreuse. — La pyro-électricité a été recherchée surtout sur les cristaux non conducteurs qui sont les plus nombreux. Il y avait lieu de se demander si elle pouvait se rencontrer dans les cristaux conducteurs.

M. Friedel[3] l'a recherchée dans les cristaux tétraédriques de cuivre gris. Le corps étant conducteur, l'électricité dégagée aux deux pôles était susceptible d'engendrer un courant. En conséquence les expériences se faisaient en mettant les deux faces d'une lame taillée perpendiculairement à un axe ternaire, en communication avec les extrémités des fils d'un galvanomètre. Lorsque la lame est chauffée, l'électricité positive se dégage sur la face tournée du côté de la base du tétraèdre.

La chalcopyrite, qui est aussi conductrice, cristallise dans le système quadratique, et en tétraèdres. M. Friedel a, par le même procédé, constaté aussi la pyro-électricité sur cette substance. Mais le sens du courant était inverse de celui qui se produit dans le cuivre gris.

Or on avait constaté, dans des expériences préalables, que lorsqu'on fabrique un tétraèdre de cuivre, et qu'on applique les deux extrémités des fils de platine du galvanomètre, l'un au sommet, l'autre à la base du tétraèdre, il se produit, pendant l'échauffement de ce tétraèdre, un courant dont le sens correspond à l'échauffement de la soudure du sommet. Cette soudure est en effet plus chaude, parce que la pointe du tétraèdre s'échauffe plus vite que la base.

1. *Bull. de la Soc. de Minér.*, 1882.
2. *C. R.* Juillet 1883.
3. *Ann. de ch. et de phys.* (4), 16 (1869).

Avec un tétraèdre de cuivre gris, le résultat est le même qu'avec le cuivre.

Avec un tétraèdre de chalcopyrite, le sens est inverse, ce qui prouve que le signe thermo-électrique de la chalcopyrite est, par rapport au platine, contraire à celui du cuivre gris.

Avec les *lames* de cuivre gris et de chalcopyrite, le sens des courants pyro-électriques est donc le même que celui qu'on aurait si on remplaçait les lames par des tétraèdres ayant leurs sommets dirigés vers celui du cristal dont la lame était détachée. On expliquerait donc les phénomènes observés en supposant que les molécules de ces deux matières ont une forme tétraédrique semblable à celle du cristal. La face placée du côté des pointes moléculaires se refroidirait ou s'échaufferait plus vite que celle qui serait tournée du côté des bases.

On voit que dans ces phénomènes la pyro-électricité paraît se compliquer de la thermo-électricité, et peut-être même celle-ci est-elle seule en jeu.

Règle déterminant celui des sommets du cristal qui est positif par compression ou par refroidissement. — En comparant entre elles toutes les substances sur lesquelles on a, jusqu'à ce jour, constaté la pyro-électricité, ou, ce qui est la même chose, la piézo-électricité, MM. Curie sont arrivés à formuler une loi curieuse et intéressante.

Lorsqu'on considère une droite susceptible de prendre à ses deux extrémités, par compression suivant sa direction, des électricités de noms contraires, ces deux extrémités sont cristallographiquement différentes. Or, l'extrémité qui prend par compression (ou par refroidissement) l'électricité positive, est toujours tournée du côté où les faces du cristal donnent le sommet le plus pointu.

Ainsi le sommet positif par compression est tourné, dans la tourmaline, du côté du pointement e^1; dans la calamine, du côté du pointement e_1; dans les tétraèdres de blende et de chlorate de soude, du côté du sommet du tétraèdre. Il paraît d'abord y avoir une exception pour la boracite, dont le sommet positif est tourné du côté de la base du tétraèdre. Mais cette exception confirme ici la règle, car nous venons de voir que la boracite est réellement terbinaire et que la droite qui joint deux sommets pseudo-ternaires est l'axe d'hémimorphisme. Or il est facile de voir que les faces tétraédriques sont, dans le cristal terbinaire, des faces du biseau a^1. Le pôle positif par compression, étant tourné du côté de cette face pseudo-ternaire, est donc en réalité tourné, suivant la règle, du côté du biseau a^1.

Cette règle ayant ainsi un haut degré de généralité, on peut conjecturer qu'elle a sa raison d'être dans la forme même de la molécule, qui serait plus pointue du côté du pôle positif.

Phénomène réciproque de la pyro-électricité. — De même que l'électrisation produite par la compression entraîne la dilatation produite par l'électrisation, l'électrisation par le réchauffement doit entraîner le refroidissement par l'électrisation. Un cristal de tourmaline qui, par échauffement, prend à une certaine extrémité un pôle positif, doit donc se refroidir lorsqu'on communique à la même extrémité de l'électricité positive. Cette conséquence de la théorie, qui a été formulée par M. Lippmann, peut être considérée comme certaine, quoiqu'elle n'ait pas encore été vérifiée par l'expérience.

Essais d'explication théorique de la piézo et de la pyro-électricité. — M. Gaugain[1], à la suite de ses remarquables travaux sur la pyro-électricité de la tourmaline, avait émis, pour expliquer ce phénomène, la théorie suivante. Il supposait que, dans la tourmaline, la dyssymétrie de la molécule est due à ce que deux portions opposées de cette molécule ont des pouvoirs thermo-électriques différents, et s'échauffent ou se refroidissent inégalement quand la température du corps varie. La variation de température constitue alors la molécule à l'état de tension opposée à ses deux extrémités.

On peut matérialiser en quelque sorte cette conception, comme l'a fait M. Gaugain, en soudant ensemble alternativement, par la base et par le sommet, de petits cônes de cuivre et de bismuth. Lorsqu'on plonge le tout dans une étuve, les pointes s'échauffent plus vite que les bases, et, jusqu'à ce que l'équilibre de température soit obtenu, il se produit un courant attesté par un galvanomètre. Le courant change de sens lorsque la variation de température change de signe; la quantité d'électricité dégagée est indépendante de la longueur de la chaîne; elle est proportionnelle à la variation de température. On retrouve donc les principales lois de la pyro-électricité.

Mais cette ingénieuse idée ne rend pas compte de la piézo-électricité, et les deux phénomènes paraissent si intimement liés que l'explication de l'un doit aussi convenir à l'autre.

Sir W. Thomson a cherché de son côté à expliquer la pyro-électricité en admettant qu'un cristal pyro-électrique est toujours à l'état de polarisation électrique, les deux extrémités dissemblables de la molécule

1. *Ann. de ch. et de phys.* (4) 6,51 (1865).

étant, à l'état de repos, l'une positive, l'autre négative. La chaleur modifie cet état d'équilibre, et change la charge électrique des deux extrémités du cristal.

MM. Curie, tout en trouvant cette hypothèse vraisemblable, la modifient pour l'adapter à la fois à la pyro- et à la piézo-électricité. Ils considèrent les deux pôles contraires d'une même molécule placés en regard comme les deux lames d'un condensateur. La variation de distance des deux lames fait varier la quantité d'électricité condensée.

Un système propre à faire comprendre cette conception serait une pile de lames dont chacune serait formée d'un couple zinc-cuivre soudé, et serait séparée par une lame d'air de celle qui la suivrait et de celle qui la précéderait. Si s est la surface d'un élément, e l'épaisseur, égale en tous les points de la pile, de la lame d'air, v la force électromotrice de contact, il y a une quantité

$$q = \frac{vs}{4\pi e}$$

d'électricité condensée sur chaque face opposée entre deux couches successives. Lorsque la distance varie, la quantité

$$\Delta = q - \frac{vs}{4\pi} \frac{\Delta e}{e^2}.$$

s'échappe aux deux extrémités sous forme d'électricités de noms contraires. Dans l'intérieur, les électricités se neutralisent, de sorte que les phénomènes sont indépendants de la hauteur de la pile.

On ne pourrait, d'ailleurs, se représenter la molécule comme un conducteur chargé d'électricité contraire aux deux extrémités. Il est plus vraisemblable que chacun des atomes de la molécule a son électricité propre. Ces électricités se neutralisent lorsque la molécule est symétrique autour d'un point et que les distances intermoléculaires sont toutes égales entre elles; elles cessent de se neutraliser lorsque la molécule est dépourvue de centre ou lorsque les distances intermoléculaires varient d'une extrémité à l'autre du cristal. Dans ce dernier cas, en effet, l'influence, sur une molécule, de deux molécules situées de part et d'autre, n'est plus égale et contraire et par conséquent ne se détruit plus.

On voit que l'étude des phénomènes électriques des cristaux conduit à des conséquences très importantes, soit au point de vue de la physique des cristaux, soit aussi au point de vue de la théorie générale des phénomènes électriques.

4. THERMO-ÉLECTRICITÉ.

Expériences de MM. Marbach et Friedel sur la thermo-électricité de la pyrite. — On désigne sous le nom de thermo-électricité la propriété que possèdent deux corps qui se touchent en *c* (*fig.* 177) de prendre aux deux extrémités libres A et B des électricités de noms contraires lorsque le point de contact *c* est à une température différente de celle des extrémités. Le signe des électricités accumulées à un pôle change de sens avec celui de la différence des températures entre *c* et les extrémités A et B.

Fig. 177.

Cette propriété exige, pour se manifester, que les corps soient conducteurs; aussi ne la connaît-on dans les cristaux que pour certaines substances notablement conductrices comme le sont en général les sulfures sulfoarséniure ou sulfoantimoniure des métaux, fer, cobalt, nickel et cuivre.

M. Marbach[1] a le premier signalé que les cristaux de pyrite cubique et de cobalt gris présentent, les uns et les autres, deux variétés jouissant de propriétés thermo-électriques opposées. Avec un couple formé par chacune des deux variétés de pyrite, on peut former un couple thermo-électrique plus énergique que celui du couple bismuth-antimoine.

M. Friedel[2] a substitué un procédé d'expérimentation plus simple à celui qu'employait Marbach. Deux fils de platine ou de cuivre sont reliés à un galvanomètre; une des extrémités est échauffée à la lampe, et l'autre reste froide.

Les deux extrémités du fil étant rapprochées l'une de l'autre, mais non pas en coïncidence, sont tenues par une pince isolante et promenées à la surface d'un cristal de pyrite. On observe que, dans certaines plages, le courant va, dans le point de contact le plus chaud, du fil au cristal, tandis que, dans d'autres plages, l'inverse se produit.

Dans un même cristal les plages des signes thermo-électriques opposées n'ont pas le même aspect; les unes sont lisses tandis que les autres sont finement striées. Mais, ce qu'il y a de surprenant, c'est que les parties, lisses par exemple, sont positives dans un cristal et négatives dans un autre.

1. *C. R.* 45,707 (1857).
2. *Ann. de ch. et de phys.* (4), 16 (1869).

Les cristaux de pyrite sont donc formés par l'enchevêtrement de parties positives et de parties négatives, absolument comme les cristaux de quartz le sont par l'enchevêtrement de parties droites et de parties gauches.

Le quartz est un cristal hémiédrique holoaxe, et les deux variétés qui se rencontrent à la fois dans un même cristal correspondent aux deux formes conjuguées hémièdres. Ces deux formes, n'étant pas superposables entre elles, sont réellement distinctes l'une de l'autre; ce sont en réalité deux substances différentes, quoique ayant entre elles des liens étroits, et on ne s'étonne pas de les voir présenter des propriétés différentes.

Ce cas n'est pas celui de la pyrite, qui est parahémiédrique, et dont les formes conjuguées sont parfaitement superposables entre elles. Il est difficile de comprendre comment ces deux formes conjuguées peuvent manifester des propriétés physiques distinctes. On ne possède pas encore de solution satisfaisante de ce problème.

CHAPITRE XVI

CORROSION DES CRISTAUX

Figures de corrosion. — En 1807, Widmanstätten avait signalé les figures régulières qu'on observe en corrodant par un acide étendu la surface polie d'un fer météorique. Leydolt[1] fit connaître en 1855 les apparences qu'on obtient en corrodant la surface de l'agate, de l'aragonite, du quartz. Mais c'est surtout M. H. Baumhauer[2] qui, par une longue suite de travaux sur les phénomènes que produit la corrosion des substances cristallines, a montré tout l'intérêt de cette étude et tout le parti qu'on en peut tirer dans les recherches cristallographiques.

Lorsqu'on attaque la surface d'un cristal par un acide faible, il se produit de petits canaux distribués régulièrement, ou, bien plus souvent, de petites cavités assez irrégulièrement disséminées. Ces cavités ont un contour curviligne ou rectiligne; elles sont limitées en profondeur par des pyramides à surfaces planes ou courbes. La forme de ces *figures de corrosion* (*Œtz figuren*) dépend à la fois de la nature de l'acide, de la nature du corps, et, pour un même corps, de la face, naturelle ou artificielle sur laquelle elles se produisent. Cette forme est, en général, la même, toutes choses égales, pour les diverses faces d'une même forme simple. La symétrie de ces figures est toujours en rapport avec celle du cristal.

L'examen des figures de corrosion produites sur les faces d'un cristal nous permettra donc, avec plus ou moins de certitude d'ailleurs suivant

1. *Wien. Akad. Ber.* 15,59. T. 9, 10.
2. *Pogg. Ann.* 138,563 (1869); 140,271; 142,324; 145,460; 150,619. *Groth Zeitschr.* depuis 1876. — Voir aussi Exner, *Pogg. Ann.* 153.

les cas, de distinguer les faces qui appartiennent ou non à la même forme simple. Bien plus, lorsque le cristal ne présentera qu'un petit nombre de faces naturelles, nous pourrons en provoquer d'artificielles et étudier la forme des figures de corrosion qu'on y peut produire.

Si le cristal a une structure intérieure complexe, comme il arrive souvent, l'examen des figures de corrosion provoquées dans les différentes plages d'une même lame naturelle ou taillée artificiellement pourra concourir, avec l'examen optique, à dévoiler la nature des enchevêtrements intérieurs. Si les renseignements qu'on obtient ainsi sont toujours moins précis et moins faciles à acquérir que ceux qui sont donnés par l'étude optique, ils n'en sont pas moins précieux comme confirmation de ceux-ci.

Les règles qu'il faut suivre pour conclure de la symétrie du cristal à celle des figures de corrosion, ou inversement, sont d'ailleurs très simples et peuvent s'énoncer comme il suit.

S'il y a un plan de symétrie perpendiculaire à la face corrodée, les figures de corrosion seront symétriques par rapport à la trace de cet axe sur le plan.

Tout axe de symétrie d'ordre n perpendiculaire au plan de la lame est un axe de symétrie d'ordre n pour les figures de corrosion.

Toute droite tracée dans le plan de la face corrodée et dont les deux directions peuvent être cristallographiquement distinguées l'une de l'autre, sera en général terminée de façon différente aux deux extrémités d'une figure de corrosion.

Exemples divers de figures de corrosion. — Calcite. — Barytine. — Mica. — Quartz. — Calamine. — Sulfate de strychnine. — Les figures suivantes, empruntées au Manuel de minéralogie que publie en ce moment le savant minéralogiste de Vienne, M. G. Tschermak, donneront quelques exemples de l'application de ces règles.

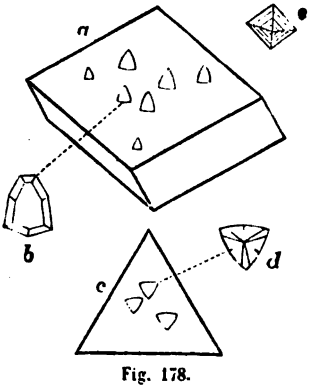


Fig. 178.

La figure 178 représente des figures de corrosion de la calcite par l'acide chlorhydrique; a est le rhomboèdre p sur les faces duquel les figures de corrosion ont la forme représentée agrandie en b; ces figures sont symétriques par rapport à la trace du plan de symétrie vertical passant

par l'axe ternaire, elles tournent leur pointe vers le sommet culminant.

La figure *e* représente les figures de corrosion produites par l'acide sulfurique; la forme est différente, mais la symétrie est la même. En *c* est représenté un plan taillé artificiellement dans une direction perpendiculaire à l'axe ternaire; les figures de corrosion représentées agrandies en *d* ont une symétrie ternaire autour de la normale au plan.

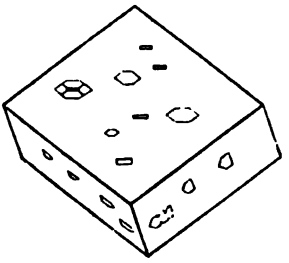


Fig. 179.

La figure 179 représente les figures de corrosion sur un cristal rhombique de barytine. Les figures de la base *p* sont symétriques par rapport aux deux diagonales du rhombe. Les figures des faces latérales du prisme *m* ne sont plus symétriques que par rapport à la trace du plan de symétrie parallèle à la base.

La figure 180 représente un cristal de quartz droit, et la figure 181 un cristal de quartz gauche. Il suffit de jeter les yeux sur les figures de corrosion relatives aux diverses faces pour voir que celles qui se rapportent aux faces *p* ne sont pas semblables à celles qui existent sur les faces $e^{\frac{1}{2}}$ et que les faces e^2 ne sont semblables que de deux en deux. De l'examen de ces figures on peut ainsi déduire sans peine que le cristal ne possède aucun plan de symétrie, mais qu'il possède un axe ternaire et trois axes binaires. La nature de l'hémiédrie est donc complètement dévoilée. On peut même distinguer les cristaux droits des cristaux gauches, par le sens de l'inclinaison des figures de corrosion qui se trouvent sur les faces $e^{\frac{1}{2}}$ de part et d'autre d'une face *p*.

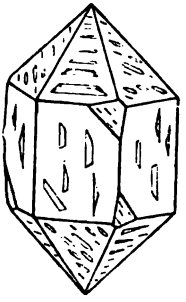


Fig. 180.

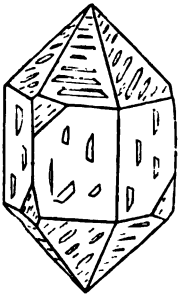


Fig. 181.

La figure 182 représente les figures de corrosion sur la face g^1 d'un cristal de calamine; elles sont symétriques par rapport à la trace du plan h^1, et ne le sont pas par rapport à un plan parallèle à *p*, puisque les deux extrémités ne sont pas semblables. L'hémiédrie spéciale de cette substance est ainsi accusée.

La figure 183 représente les figures de corrosion sur une lame de mica

muscovite. On voit qu'il n'y a de symétrie que par rapport à un pl perpendiculaire à la lame et allant de l'angle obtus antérieur à l'an obtus postérieur. Le cristal n'est donc pas hexagonal, il n'est même pa terbinaire, car alors les figures de corrosion seraient symétriques par rapport à un second plan de symétrie perpendiculaire au premier et la face du clivage. La symétrie binaire de la muscovite, que M. Tschermak a confirmée par l'examen des figures de choc, se trouve ainsi établi d'une façon certaine. Si l'on s'en tenait aux phénomènes cristallogra phiques, on devrait conclure à la symétrie hexagonale; si l'on y ajou

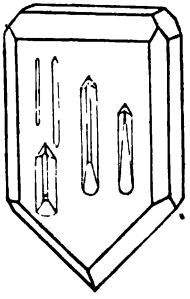


Fig. 182.

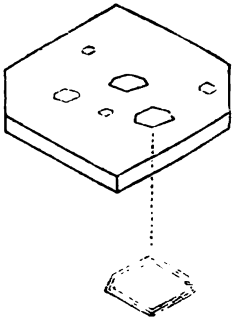


Fig. 183.

tait seulement les phénomènes optiques, c'est la symétrie terbinai qu'il faudrait adopter.

En observant les figures de corrosion sur des rhomboèdres de do lomie ($CaO,MgO,2CO^2$) de giobertite (MgO,CO^2) de sidérose (FeO,CO^2) M. Tschermak[1] a remarqué que ces figures ne sont pas symétriques par rapport au plan passant par l'axe ternaire et normal aux faces du rhom boèdre. Il en a conclu que ces substances ont une hémiédrie holoèdri analogue à celle du quartz, tandis que la calcite et l'azotate de soude sont holoédriques.

Le sulfate de strychnine présente, comme nous l'avons dit plus haut la polarisation rotatoire, bien que les cristaux paraissent holoédriques. M. Baumhauer[2], en provoquant avec de l'eau ou de l'alcool la produc tion des figures de corrosion sur la base, a trouvé qu'elles ont la form de carrés dont les côtés sont parallèles à ceux de la base. Mais si l'on attaque avec l'acide chlorhydrique étendu, on voit alors apparaître sub

1. *Tschrem. Min. und Petrogr. Mitt.*, 4,99 (1881).
2. *Groth Zeit.*, 5,577 (1881).

tement sous le microscope une série de petits canaux inclinés sur les côtés de la base, quoique formant un petit angle avec ceux-ci. Si l'on attaque de même la face inférieure, et si on observe en même temps, grâce à la transparence, les lignes de corrosion de la face supérieure et celles de la face inférieure, on voit qu'elles sont obliques les unes sur les autres, comme le montre la figure 184, où les lignes pleines se rapportent à la base supérieure et les lignes ponctuées à la base inférieure. Le cristal n'a donc pas de plan de symétrie, et comme il a un axe quaternaire et quatre axes binaires, il est hémiédrique holoaxe, ce qui est d'accord avec son pouvoir rotatoire.

Fig. 184.

Ces exemples suffisent à montrer le vif intérêt que présente l'étude des figures de corrosion, et les ressources précieuses qu'elle offre aux recherches cristallographiques.

TABLE DES MATIÈRES

DU SECOND VOLUME

DEUXIÈME PARTIE

CRISTALLOGRAPHIE PHYSIQUE

PRÉFACE. 1

CHAP. I. **Sur les propriétés physiques des milieux continus. — Principes généraux**. 1

Théorie de l'ellipsoïde 4
Changement d'axes coordonnés. — Expressions générales des n et des t pour des directions quelconques. 7
Expressions symboliques des $\mathcal{N}$ et des $\mathcal{T}$ 9
Cas particulier de l'égalité symétrique. 10
Relations entre l'orientation des axes de l'ellipsoïde et celle des axes de symétrie de l'édifice cristallin. 12
Ellipsoïde. — Surface principale. — Surface inverse. 14
Réflexions générales 17

Phénomènes qui se rapportent à la cohésion.

CHAP. II. — PREMIÈRE PARTIE. — ÉLASTICITÉ. 19

§ I. *Déformation des solides*. 19

Définition de la déformation réticulaire. — Ellipsoïde de déformation. . 20
Conditions nécessaires pour que six quantités puissent représenter les δ et les α caractéristiques d'une certaine déformation. 24

§ II. — *Forces élastiques*. — Ellipsoïde d'élasticité. 26

§ III. — *Relations entre les forces élastiques et la déformation*. . . . 30

Coefficients élastiques. 30
Réduction des 36 coefficients élastiques à 21. 32
Formules symboliques donnant les expressions des N et des T. 35
Forces élastiques dans les milieux qui possèdent des éléments de symétrie. 37

Coefficients élastiques inverses. . . . . .
Formules symboliques exprimant les coefficients élastiques directs ou inverses. . . . . .
§ IV. — *Equilibre d'élasticité*. . . . . .
Equations exprimant l'équilibre d'élasticité. . . . . .
Cas d'une traction ou d'une pression. — Coefficients d'élasticité longitudinale. . . . . .
Cas d'une pression uniforme sur toutes les faces. . . . . .
Cas d'un corps cylindrique soumis à la torsion. . . . . .
Cas dans lesquels on peut réduire à 15 les 21 coefficients de Green. . . .
Observations de M. Voigt sur l'élasticité du sel gemme. . . . . .
Expériences de M. P. Groth sur l'électricité du sel gemme. . . . . .
Expériences anciennes de Savart. . . . . .

CHAP. II[1]. — SECONDE PARTIE. — CLIVAGE ET PLANS DE FISSURE. . . . . .
Clivages. — Leur position possible dans les divers systèmes cristallins. .
Constance des clivages dans les cristaux d'une même substance. . . . .
Plans de séparation. . . . . .
Des divers modes de production du clivage. — Figures de décollement.
Production des plans de choc ou de glissement. . . . . .

CHAP. II[2]. — TROISIÈME PARTIE. — DURETÉ. . . . . .
Définition de la dureté. — Echelle de Mohs. . . . . .
Expériences scléromètriques. . . . . .
Expériences de Grailich et Pekarck sur la calcite. — Relation de la dureté avec les clivages. . . . . .
Expériences de M. Franz Exner. . . . . .
Essai d'une théorie de la dureté. — Relations entre la dureté et le *coefficient de frottement*. . . . . .

CHAP. III. — **Phénomènes thermiques**. . . . . .

PREMIÈRE SECTION. — PROPAGATION DE LA CHALEUR. . . . . .
Définition de la température d'un point de corps. . . . . .
Flux calorifique en un point de corps. — Conductibilité calorifique. . .
Surfaces isothermes dans les milieux cristallins indéfinis. . . . . .
Surfaces isothermes dans les plaques cristallines très minces. . . . . .
Expériences de Sénarmont et de M. Jannettaz. . . . . .
Loi formulée par M. Jannettaz. . . . . .
Influence de la compression sur la conductibilité thermique. . . . . .

DEUXIÈME SECTION. — DILATATION THERMIQUE. . . . . .
Théorie générale. . . . . .
Expériences de M. Fizeau. . . . . .

Phénomènes optiques.

CHAP. IV. — THÉORIE DE LA DOUBLE RÉFRACTION. . . . . .
Principes de la théorie des ondulations lumineuses. . . . . .
Hypothèse de Fresnel sur la propagation, dans un milieu solide, d'un système d'ondes planes parallèles entre elles. . . . . .

1. Cette seconde partie du chap. II a été appelée par erreur *Chap. III.*
2. Cette troisième partie du chap. II a été appelée par erreur *Chap. IV.*

Ellipsoïde d'élasticité optique. 106
Composantes de la force élastique. — Hypothèse de Fresnel. 106
Ellipsoïde d'élasticité D_0. — Ellipsoïde principal D_1. — Ellipsoïde inverse E. 107
Surfaces de vitesses normales. 108
Polarisation rectiligne, à angle droit, de deux rayons transmis suivant une même direction. 110
Forme de la surface des vitesses normales. — Axes optiques. 110
Relations entre les deux vitesses de propagation qui correspondent à une même direction et les angles que fait cette direction avec les axes optiques. 114
Les plans de vibration d'un même rayon bissèquent les angles dièdres formés par les plans qui passent par la direction de propagation et les axes optiques. 116
Formules approchées. 116
Grandeurs relatives des vitesses avec lesquelles se propagent, suivant la même direction, les deux vibrations rectangulaires. — Distinction des rayons ordinaire et extraordinaire. 120
Passage d'un rayon lumineux d'un milieu quelconque dans un milieu cristallisé. 122
Directions de propagation des deux rayons réfractés. 124
Lois de la réfraction dans le cas particulier des cristaux uniaxes. 127
Dispersion. 128

Surface de l'onde. — Rayons lumineux. 132

Surface de l'onde. 132
Equation de la surface de l'onde. 135
Directions des deux vibrations correspondant à une même direction du rayon. 136
Forme de la surface de l'onde. 137
Axes de réfraction extérieure. 137
Remarques d'Hamilton. — Expériences de Lloyd. 141
Détermination des directions des deux rayons réfractés correspondant à un rayon incident. 143
Formules de Mac-Cullagh donnant l'angle U compris entre la direction de propagation normale et celle du rayon lumineux. 145

Chap. V. — Polarisation chromatique. — Lumière parallèle. 149

I. *Description sommaire des appareils*. 148

Polariseurs par réflexion. 149
Polariseurs par absorption. 150
Polariseurs réfringents. 150
Appareil de Norremberg. — Microscope polarisant. 153

II. *Lumière normale*. 154

§ 1. — *Cas d'une seule lame cristalline*. 154

Intensité des vibrations émergeant de l'analyseur. 154
Discussion des formules. 157
Cas où la lumière incidente n'est pas homogène. 159
Discussion des formules dans le cas de la lumière non homogène. 161
Echelle chromatique de Newton. 163
Disparition des phénomènes de polarisation chromatique dans les plaques épaisses. 167

Lames cristallines à faces non parallèles. . . . . 15[illegible]

§ 2. — *Cas de plusieurs lames cristallines superposées*. . . . . 16[illegible]

Formules générales. . . . . 16[illegible]
Cas de deux lames. . . . . 17[illegible]
Cas où l'une des deux lames est un quart d'onde. . . . . 17[illegible]
Lames sensibles. — Polariscope de Bravais. . . . . 17[illegible]
Compensateur Babinet. . . . . 17[illegible]

III. — *Lumière oblique*. . . . . 17[illegible]

Formule générale donnant le retard de deux rayons émergents issus d'un même rayon incident. . . . . 17[illegible]
Cas où la lame cristalline est oblique à la direction de rayons. . . . . 18[illegible]
Cristaux à un axe. . . . . 18[illegible]
Lame perpendiculaire à l'axe. . . . . 18[illegible]
Lame parallèle à l'axe. . . . . 18[illegible]
Lames taillées d'une façon quelconque. . . . . 18[illegible]
Cristaux à deux axes. . . . . 18[illegible]
Lame perpendiculaire à l'axe d'élasticité minimum ou maximum. . . . 18[illegible]
Lame perpendiculaire à l'axe de moyenne élasticité. . . . . 18[illegible]

CHAP. VI. — POLARISATION CHROMATIQUE. — LUMIÈRE CONVERGENTE. 187

Appareils d'observation. — Microscope à lumière convergente. 187
Pince à tourmalines. 191

Lumière monochromatique. 192

I. *Courbes incolores*. 192

Définition des courbes incolores. 192
Forme générale des courbes incolores dans les cristaux biaxes. . . . . 19[illegible]
Cristaux uniaxes. 199

II. — *Courbes d'égal retard*. 200

Définition de la surface d'égal retard. 200

a. — Cristaux uniaxes. 205

Surface d'égal retard. 205
Lames perpendiculaires à l'axe. 205
Superposition de deux lames perpendiculaires à l'axe. 210
Superposition de deux lames parallèles à l'axe de même nature et de même épaisseur, mais dont les sections principales sont croisées à angle droit. 210
Cas de deux lames identiques taillées dans une direction quelconque et superposées de manière que les sections principales soient croisées à angle droit. 215

b. — Cristaux à deux axes. 215

Surface d'égal retard. 215
1° Intersection de la surface par un plan perpendiculaire à l'axe moyen des *y*. 216
2° Section par un plan perpendiculaire à l'une des bissectrices de l'angle des axes optiques. 221
3° Intersection par un plan perpendiculaire à un axe optique. 225
Lames taillées perpendiculairement à une bissectrice. 227

Lames taillées perpendiculairement à un axe optique. 229
Lames taillées perpendiculairement à l'axe moyen. 230

Lumière blanche. 230

Franges dans la lumière blanche. 230
Dispersion des axes dans les cristaux orthorhombiques. 231
Dispersion des axes dans les cristaux clinorhombiques. 234
1° Dispersion croisée. 235
2° Dispersion horizontale. 235
3° Dispersion inclinée 236

CHAP. VII. — DES DIVERSES ESPÈCES DE VIBRATIONS LUMINEUSES. 238

Vibrations rectilignes. — Compositions des vibrations rectilignes. . . . 238
Vibrations elliptiques. 240
Distinction entre le sens droit ou gauche d'une vibration elliptique. . . 242
Vibrations circulaires. 244
Composition de plusieurs vibrations circulaires simultanées de même sens. 245
Détermination des directions et des grandeurs des axes d'une vibration elliptique 245
Décomposition d'une vibration elliptique en deux vibrations circulaires inverses. 247
Décomposition d'une vibration rectiligne en deux vibrations circulaires inverses. 248
Composantes rectilignes de deux vibrations circulaires inverses. . . . 249
Vibration elliptique produite par une lame cristalline surmontant un polariseur rectiligne 249
Cas où la lame cristalline est très mince. 252
Production d'une vibration circulaire au moyen d'une lame quart d'onde. 253
Transformation d'une vibration elliptique en une vibration rectiligne au moyen d'une lame quart d'onde. 254
Polariseurs et analyseurs circulaires. 255
Lame cristalline, placée entre un polariseur rectiligne et un analyseur circulaire, ou entre un polariseur circulaire et un analyseur rectiligne, et examinée dans la lumière parallèle. 256
Lame cristalline uniaxe examinée en lumière convergente entre un polariseur rectiligne et un analyseur circulaire. 257
Lame cristalline placée entre un polariseur et un analyseur circulaires. . 260

CHAP. VIII. — PHÉNOMÈNES PRODUITS PAR LA SUPERPOSITION DE LAMES MINCES CRISTALLINES. 262

I. — *Modifications subies par une vibration elliptique traversant une lame cristalline très mince*. 262

II. — *Vibrations traversant un paquet très mince de lames cristallines*. 266

Formules générales. 266
Cas où la vibration incidente est rectiligne. 267
Pouvoir rotatoire du paquet de lames. 272

III. — *Vibrations traversant une pile formée par la superposition d'un grand nombre de paquets très minces*. 274

1° *Cas où la rotation de la vibration peut être négligée*. 274

Paquet composé de deux lames identiques entre elles. 274
Paquet composé de trois lames. 277

2° *Cas où le pouvoir rotatoire ne peut pas être négligé.* . . . . . 27[illegible]

Cas d'une vibration incidente rectiligne et dirigée suivant une des sections principales de la pile. — Valeurs de U et Ω. . . . . 27[illegible]
Remarques sur les valeurs de U et Ω. . . . . 2[illegible]
Vibration incidente dirigée d'une manière quelconque. . . . . 2[illegible]

IV. — *Application de la théorie à une pile uniaxe.* . . . . . 2[illegible]

Pile uniaxe formée par des paquets ternaires. — Valeur de *r*. . . . . 2[illegible]
Phénomènes produits par la pile lorsque la direction de propagation est dirigée suivant l'axe. . . . . 2[illegible]
Représentation des phénomènes de rotation par l'inégale vitesse de propagation de deux rayons circulaires inverses. . . . . 2[illegible]
Vibration se propageant suivant une direction inclinée sur l'axe de la pile. . . . . 2[illegible]
Phénomènes que présente une pile en lumière convergente. 291
Phénomènes produits en lumière convergente par la superposition de deux piles de même nature, mais de sens contraire. — Spirales d'Airy. . . . . 2[illegible]
Phénomènes produits en lumière convergente par une pile placée entre un polariseur rectiligne et un analyseur circulaire. 300

CHAP. IX. — POLARISATION ROTATOIRE DES SUBSTANCES CRISTALLISÉES ET NON CRISTALLISÉES. 305

I. — *Polarisation rotatoire du quartz.* 305

Les cristaux de quartz se comportent optiquement comme des piles de mica de Reusch. 305
Bilames de quartz. 307
Lames de quartz observées en lumière convergente. 308
Mesure du pouvoir rotatoire du quartz. 308
Définition du pouvoir rotatoire du quartz par l'inégale vitesse de propagation de deux vibrations circulaires inverses — Expériences de Fresnel. 310
Variations du pouvoir rotatoire du quartz sous l'influence de la chaleur. . 311
Relation du pouvoir rotatoire avec l'hémiédrie non superposable. . . . 312
Explication du pouvoir rotatoire du quartz. 313
Groupements de portions dextrogyres et lévogyres dans un même cristal. 314
Groupements intérieurs des cristaux de quartz améthyste. 315
Quartz calcédoine. 316

II. — *Polarisation rotatoire des cristaux autres que le quartz.* 317

Les cristaux uniaxes et unirréfringents manifestent seuls la polarisation rotatoire. 317
Tableau des substances cristallines connues pour manifester la polarisation rotatoire. 318
Relation entre le pouvoir rotatoire et la forme cristalline. 319
Structure théorique des cristaux quadratiques possédant le pouvoir rotatoire. 320
Structure théorique des cristaux cubiques possédant le pouvoir rotatoire. 322

III. — *Polarisation rotatoire des substances non cristallisées.* 324

Existence et constatation du pouvoir rotatoire dans les substances non cristallisées. 324

Lois de la polarisation rotatoire des dissolutions. 325
Les lois générales ne sont qu'approximatives. 327
Relation entre le pouvoir rotatoire des dissolutions et la forme des cristaux 328
Substances actives en cristaux et en dissolution. — Sulfate de strychnine et Alun d'éthylamine. 329
Le pouvoir rotatoire de l'acide persiste dans les sels. 329
Explication du pouvoir rotatoire des substances non cristallisées. . . . 330

CHAP. X. — DOUBLE RÉFRACTION ACCIDENTELLE. 334

I. — *Double réfraction produite par une action mécanique*. 334

Verre comprimé. 334
Formules mathématiques représentant la loi du phénomène. 336
Expériences de Neumann. 337
Expériences de Wertheim. 339
Effets des actions mécaniques sur diverses substances. 341
Effets des actions mécaniques sur les cristaux. 342
Les cristaux peuvent-ils subir, sous l'influence de la compression, des déformations permanentes? 344
Cas où le cristal comprimé jouit de la polarisation rotatoire. 345

II. — *Double réfraction produite par la trempe*. 346

Tensions intérieures et biréfringence du verre trempé. 346
La trempe est-elle compatible avec l'état cristallin? 347
Biréfringence du verre lorsque toute la masse n'est pas en équilibre de température 348
Biréfringence des corps non homogènes. 349

CHAP. XI. — PHÉNOMÈNES D'ABSORPTION LUMINEUSE. — PLÉOCHROISME. — COULEURS SUPERFICIELLES. — FLUORESCENCE. 350

I. — *Pléochroïsme*. 350

Couleur d'un corps vu par transmission. 350
Coefficient d'absorption. 350
Distinction entre les couleurs essentielle et accidentelle. 351
Pléochroïsme des substances cristallisées. 352
Loi de la variation du coefficient d'absorption avec la direction de la vibration transmise. — Loi de Babinet. — Ellipsoïde inverse d'absorption. 352
Couleurs transmises par les diverses directions de vibrations. — Loupe dichroscopique d'Haidinger. 356
Constatation du pléochroïsme dans les lames cristallisées vues sous le microscope. 357
Détermination précise de la valeur du coefficient d'absorption. — Spectrophotomètres de Glan et de Vierordt. — Prisme de Wollaston. 357
Houppes des lames cristallines biaxes et colorés, taillées perpendiculairement à un axe optique. 361
Lames uniaxes taillées perpendiculairement à l'axe. 363
Platinocyanure de magnésium. 364
Platinocyanure d'yttrium. 367

II. — *Réflexion de la lumière. — Couleurs superficielles*. 367

Réflexion de la lumière sur les corps transparents. 367
Réflexion sur les métaux et les corps absorbants. 368
Couleurs superficielles. — Lois de Haidinger. 360

Couleurs superficielles du platinocyanure de magnésium et de quelques autres substances. 370
Anneaux d'interférence observés dans quelques substances cristallisées sans polariseur ni analyseur. 372

III. — *Fluorescence*. 373

Définition de la fluorescence — Loi de Stokes. 373
Fluorescence du platinocyanure de magnésium. 374

CHAP. XII. — PROCÉDÉS PROPRES A OBSERVER ET A MESURER LES PROPRIÉTÉS BIRÉFRINGENTES DES CRISTAUX. 376

Moyens d'obtenir des lames cristallines à faces parallèles. 376

I. — *Procédés propres à déterminer les sections principales d'une lame cristalline*. 380

Principe de l'observation. 380
Microscope polarisant de M. Émile Bertrand. 381
Microscope de M. Nachet. 383
Réglage du microscope. 383
Détermination de l'azimut des sections principales. 389
Stauroscope 391
Position des axes optiques déduite de l'observation des sections principales 392
Observation du signe de la lame. 398

II. — *Mesure des différences des indices principaux d'une lame cristalline*. 399

Appréciation du retard par l'examen de la teinte de polarisation. 399
Emploi du compensateur à franges ou de Babinet. 399
Influence de la dispersion cristalline. 401
Emploi du compensateur à teintes plates ou de Bravais. 407
Emploi du spectre cannelé de Fizeau et Foucault. 408
Mesure de l'épaisseur de la lame. 410
Observation des modifications qu'apporte la chaleur dans la biréfringence. 411

III. — *Mesure de l'écartement angulaire des axes optiques*. 412

Théorie de la formation de l'image. 413
Appareil Schneider. 415
Appropriation du microscope Bertrand à l'étude des phénomènes produits par la lumière convergente. 416
Mesure de l'écartement angulaire des axes vus dans le microscope Bertrand. 418
Mesure de l'écartement angulaire des axes optiques au moyen du microscope à lumière convergente. 420
Influence de la chaleur sur l'écartement angulaire des axes. 426
Angle vrai des axes déduit des observations faites avec deux lames perpendiculaires aux deux bissectrices. 429
Discussion de causes d'erreur dans la mesure de l'écartement angulaire des axes. 428

IV. *Observations de courbes isochromatiques*. 433

Emploi des courbes isochromatiques pour déterminer le système cristallin. 433
Détermination du signe d'un cristal. 434

Emploi des courbes isochromatiques pour déterminer les différences des indices principaux 437

V. *Mesure des indices de réfraction* 440

1° *Observation d'un objet vu à travers une lame à faces parallèles* 440
Procédé du duc de Chaulnes 440
Application du procédé du duc de Chaulnes à la mesure des indices des lames cristallines. — Image d'un objet vu à travers une lame cristalline à faces parallèles 441

2° *Observation de l'image vue à travers un prisme* 445
Description générale du procédé 445
Fixateur Ketteler 448
Application du procédé à des prismes taillés dans des substances cristallisées 448

3° *Méthode de la réflexion totale* 455
Théorie générale du procédé 455
Emploi d'un prisme 455
Application à la mesure des indices des lames cristallines 460
Réfractomètre de M. F. Kohbrausch 461
Discussion des causes d'erreur dans la mesure des indices au moyen du réfractomètre de M. F. Kohbrausch 463
Réfractomètre de M. Soret 465
Cas où la lame est placée entre la source lumineuse et l'observateur . . . 466

4° *Emploi des franges d'interférence* 467
Emploi des franges d'interférence de Fresnel 467
Emploi des franges de Talbot 469

CHAP. XIII. — GÉNÉRALITÉS SUR LES CONSTANTES OPTIQUES DES CRISTAUX 474

I. *Réfringence des substances isotropes et réfringence moyenne des substances cristallisées* 474
Grandeurs des indices de réfraction 474
Pouvoir réfringent. — Energie réfractive spécifique. — Loi de Gladstone . . 475
Signification physique de la loi de Gladstone 476
Loi de Landolt 477
Vérification de la loi de Gladstone, lorsque la pression varie seule 478
Vérification de la loi de Gladstone lorsque la température varie seule . . 479
Energie réfractive spécifique d'un mélange 482
Mélanges liquides 482
Mélanges solides 483
Energie réfractive spécifique d'un même corps sous différents états . . . 484
Mélange d'un liquide et d'un solide par voie de dissolution 485
Energie réfractive spécifique des combinaisons 486
Applications de la loi de Gladstone étendue aux combinaisons 489

II. *Biréfringence* 491

1° *Symboles usités pour représenter l'orientation de l'ellipsoïde optique* . 491
Symboles désignant les constantes de la double réfraction 491
Symboles servant à indiquer l'orientation cristallographique de l'ellipsoïde optique 492
Cristaux rhombiques 493
Cristaux monocliniques 495
Cristaux anorthiques 495

2° *Relation entre les paramètres optiques et cristallographiques*. . . . 495
Indépendance entre la biréfringence et les paramètres cristallographiques. 495
3° *Relation entre la biréfringence et la composition chimique*. 498
4° *Anomalies optiques des cristaux*. 502
5° *Action de la chaleur sur les propriétés biréfringentes*. 502
Variations dans l'écartement angulaire des axes du gypse. 504
Observations sur les variations de l'écartement angulaire des axes optiques 505
Variations dans l'orientation des axes de l'ellipsoïde optique. 506
Variations permanentes, sous l'influence de la chaleur, dans l'écartement angulaire des axes optiques. — Expériences de M. Des Cloizeaux sur l'orthose. 507

III. *Dispersion*. 510
Formules représentant la dispersion. 510
Dispersion pour les radiations obscures. 514
Dispersion cristalline. 515
Dispersion des axes optiques. 521
Action de la chaleur sur la dispersion. 523
Influence de la chaleur sur la dispersion cristalline. — Expériences de M. Laspeyres sur la Glaubérite. 523

CHAP. XIV. — **Phénomènes magnétiques**. 526

Magnétisme et diamagnétisme des corps. 526
Théorie de l'induction magnétique. . . . . .
Ellipsoïde d'induction. 527
Couple directeur agissant sur un corps placé dans un champ magnétique uniforme. 530
Axes magnétiques. 532
Expériences de Plucker vérifiant les formules théoriques. 533
1° Formiate de cuivre. 535
2° Sulfate de fer. 537
3° Bismuth. 537
Résultats des observations faites par divers auteurs sur le magnétisme cristallin. 538
Expériences de MM. Knoblauch et Tyndall sur les substances amorphes comprimées. 541
Discussion des données fournies par l'observation. 543

CHAP. XV. — **Phénomènes électriques**. 547

I. *Conductibilité électrique*. 547
Expériences de Sénarmont. 547
Expériences de M. G. Wiedeman. 549

II. *Induction électrique*.
Expériences de Knoblauch. 550
Réflexions générales sur l'induction cristalline. 552

III. *Electricité dégagée par les cristaux* 553

1° *Electricité dégagée par une action mécanique. — Piézo-électricité* . . 553

Electricité dégagée par le clivage 553
Piézo-électricité de la tourmaline. — Observations de MM. J. et P. Curie. 555
Piézo-électricité du quartz 558
Lois générales de la piézo-électricité 566
Expériences de M. W. Röntgen sur la piézo-électricité d'une sphère de quartz 632
Piézo-électricité du sel de Seignette 256
Piézo-électricité d'un cristal cubique 565
Phénomène réciproque de la piézo-électricité. — Loi de M. Lippmann. — Vérification de MM. Curie 565
Vérification de la loi de M. Lippmann par l'emploi de phénomènes optiques biréfringents. — Expériences de M. Kundt 567

2° *Electricité dégagée par une action thermique. — Piézo-électricité* . . 568

Piézo-électricité de la tourmaline 568
Lois établies par M. Gaugain 569
Analogies entre la piézo- et la pyro-électricité 570
Définition précise de la pyro-électricité 571
Déductions tirés de la symétrie 571
Expériences de Riess, de G. Rose et de M. Hankel 573
Procédé d'expérimentation de M. Friedel. — Intérêt qu'il présente 575
Pyro-électricité de la boracite 576
Pyro-électricité des cristaux conducteurs 577
Cuivre gris et pyrite cuivreuse 577
Règle déterminant celui des sommets de cristal qui est positif par compression ou par refroidissement 578
Phénomène réciproque de la pyro-électricité 579
Essais d'explication théorique de la piézo- et de la pyro-électricité 579

IV. *Thermo-électricité* 581

Expériences de MM. Marbach et Friedel sur la thermo-électricité de la pyrite 581

CHAP. XVI. — **Corrosion des cristaux** 583

Figures de corrosion 583
Exemples divers de figures de corrosion. — Calcite. — Barytine. — Mica. — Quartz. — Calamine. — Sulfate de strychnine 584

21761. — Imprimerie A. Lahure, rue de Fleurus, 9, à Paris.

ERRATA DU PREMIER VOLUME.

Pages	*Lignes*	*Au lieu de*	*Lisez*
17	12 en remontant	rangée $m\,n\,p$	rangée $[m\,n\,p]$
25	3 en descendant	OT_1'	OT_1
25	7 en descendant	OT^b	$OT^{b'}$
28	7 en remontant	$ab \sin yz$	$ab \sin xy$
45	3 en remontant	$q > b$	$q > 6$
45	4 en remontant	$q = b$	$q = 6$
65	dans la fig. 27 à gauche du cadre et en haut	$\bar{1}\,4\,\bar{2}$	$\bar{1}\,\bar{4}\,2$
	à droite du cadre et en bas	$\bar{1}\,4\,\bar{2}$	$\bar{1}\,\bar{4}\,2$
66	10 en remontant	$\bar{1}\,4\,\bar{2}$	$\bar{1}\,\bar{4}\,2$
102	6 en descendant	$(\bar{r}\ qp)$	$(\bar{r}\ pq)$
113	9 en descendant	fig. 114	fig. 115
117	12 en remontant	$\frac{3\,a^2}{2\,\bar{d}^2}$	$\frac{3\,a^2}{2\,\bar{h}^2}$
122	1 en haut	$1\,2\,\bar{1}$	$1\,\bar{2}\,1$
131	fig. 125 et 126	001	111
136	2 en remontant	$e_3 = \{311\}$	$e_3 = \{31\bar{1}\}$
158	12 en descendant	ternaire	binaire
187	18 en descendant	(001)	$(00\bar{1})$
223	2 en descendant	division BA′	direction BA′
241	3 en remontant	$tg\,PZY = \frac{m \sin Z}{1 + m \sin PZY}$	$tg\,PZY = \frac{m \sin Z}{1 + m \cos Z}$
248	5 en descendant	les triangles	les angles
249	9 en descendant	$\gamma = \ldots = \frac{\sin a^1 h^1}{\sin (ph^1 - a^1 h^1)}$	$\gamma = \ldots = \frac{\sin a^1 h^1}{\sin (ph^1 - a^1 h^1)}$
251	11 en descendant	$g^1\,(110)$	$g^1\,(010)$
284	8 en remontant	Pz	PZ
315	9 en descendant	Idiocrase	Idocrase
316	12 en descendant	$m, h^1, a^1, h^2\ a_3, b^{\frac{1}{3}}, b^1, p$	$m, a^1, h^1, a_3, h^2, p, a^{\frac{1}{3}}, b$

ERRATA DU SECOND VOLUME.

Pages	*Lignes*	*Au lieu de*	*Lisez*
4	3 en remontant	$OB = \theta$	$OB = 0$
14	1 en bas	$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - \frac{z^2}{B} = 1$	$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = 1$
20	11 en remontant	point B	point B_1
22	12 en descendant	O_x est y	Ox est y_x
35	8 en remontant	$N_x\,d_x +$	$N_x\,d\,\delta_x +$
38	14 en descendant	$F_z\,\delta$	$F_z\,\delta_z$
44	10 en remontant	équations (7)	équations (6, page 35)
45	12 en descendant	$\delta_z = p\,B'_z,$	$\delta_z = p\,A'_z,$
45	13 en descendant	$\alpha_x = p\,C'$	$\alpha_x = p\,C'_z$
62		CHAPITRE III.	CHAPITRE II. — Seconde partie.
71		CHAPITRE IV.	CHAPITRE II. — Troisième partie.
72	11 en remontant	plateau E	plateau l
75	17 en descendant	Bn (fig. 9)	Bn (fig. 12)
75	11 en remontant	figure 9	figure 12
75	Dans la figure 12, substituer la lettre n à la lettre P pour le pied de la hauteur du triangle équilatéral.		
76	3 en descendant	figure 10	figure 13
76	8 en remontant	figure 11	figure 14
131	13 en descendant	nouveaux	nouvelles
145	8 en descendant	$\cos v = \cos \theta' \cos \theta'' -$	$\cos 2v = \cos (\theta' - \theta'') -$
166	13 en remontant	0mm,605	0mm,0605
179	7 en remontant	§ 3.	III
325	10 en descendant	de dissolution	des dissolutions

Planche I.

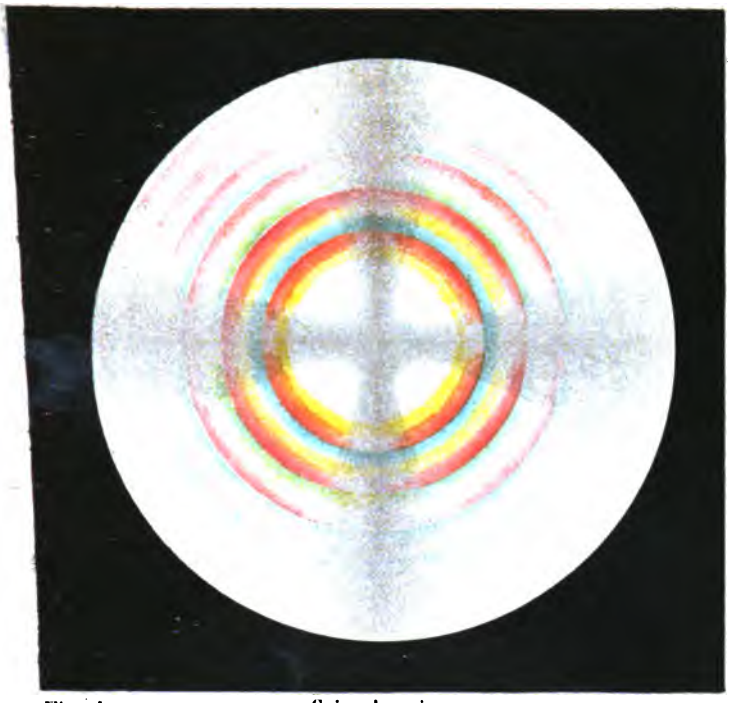


Fig. 1. **Cristal uniaxe**
taillé perpendiculairement à l'axe,
et vu entre deux nicols croisés à angle droit.

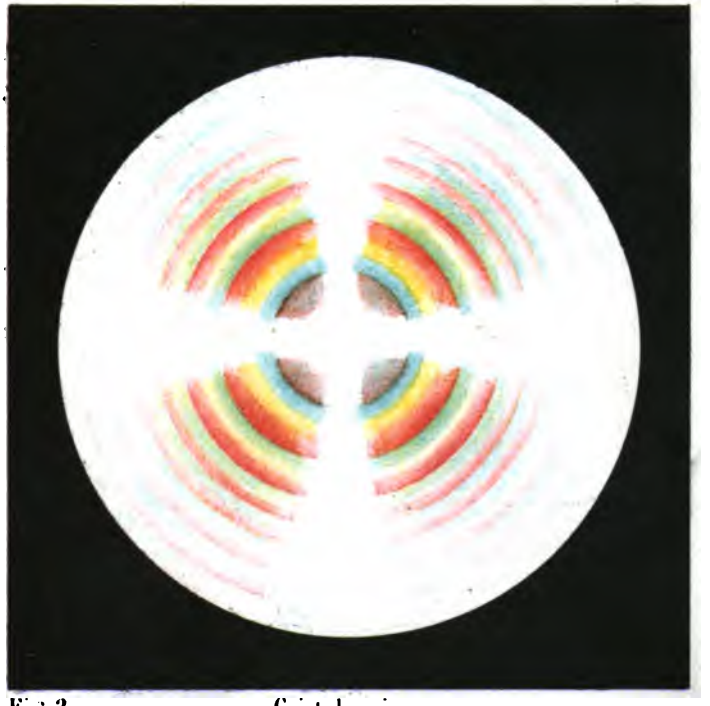


Fig. 2. **Cristal uniaxe**
taillé perpendiculairement à l'axe,

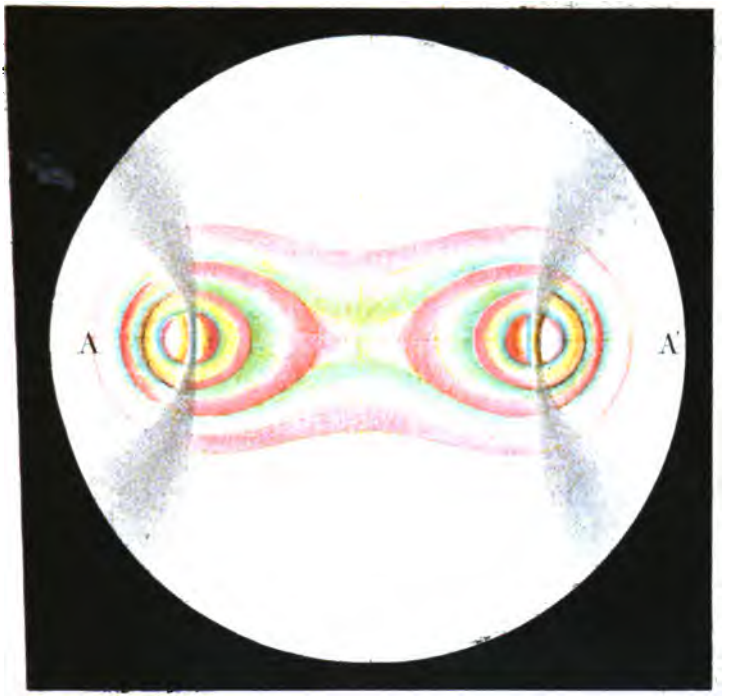


Fig.1.Cristal rhombique, taillé perpendiculairement à la bissectrice aigue, entre deux nicols croisés, le plan des axes A A' etant à 45° de la vibration du polariseur.
Dispersion : $\rho < v$.

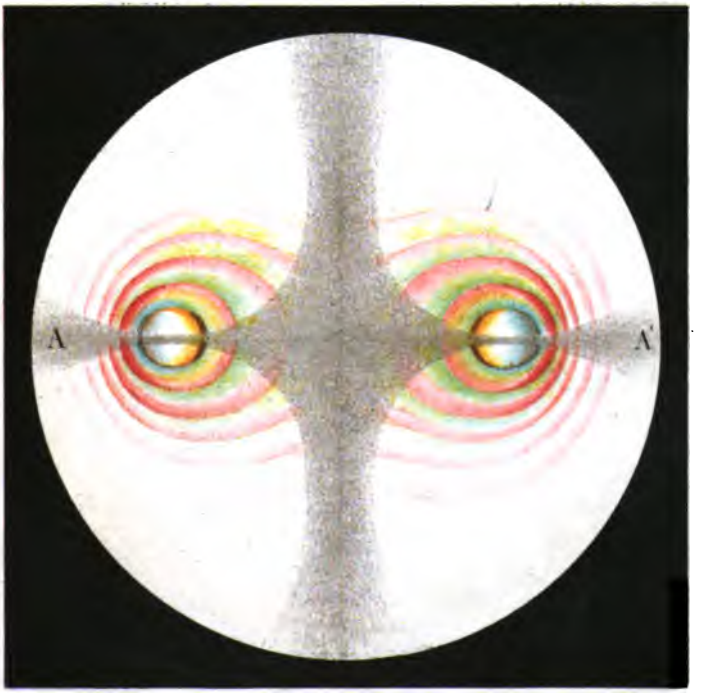


Fig. 2. Même lame que dans la figure ci-dessus, placée de manière que **AA'** soit parallèle à l'une des vibrations

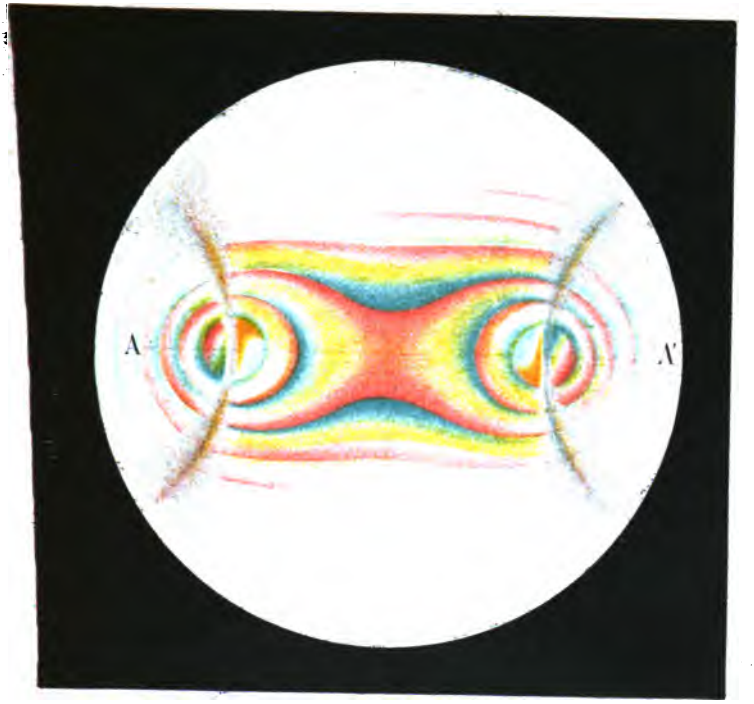


Fig. 1. **Dispersion croisée.**
Lame taillée perpendiculairement à la bissectrice aigüe, placée de manière que AA' soit à 45° de la vibration du polariseur

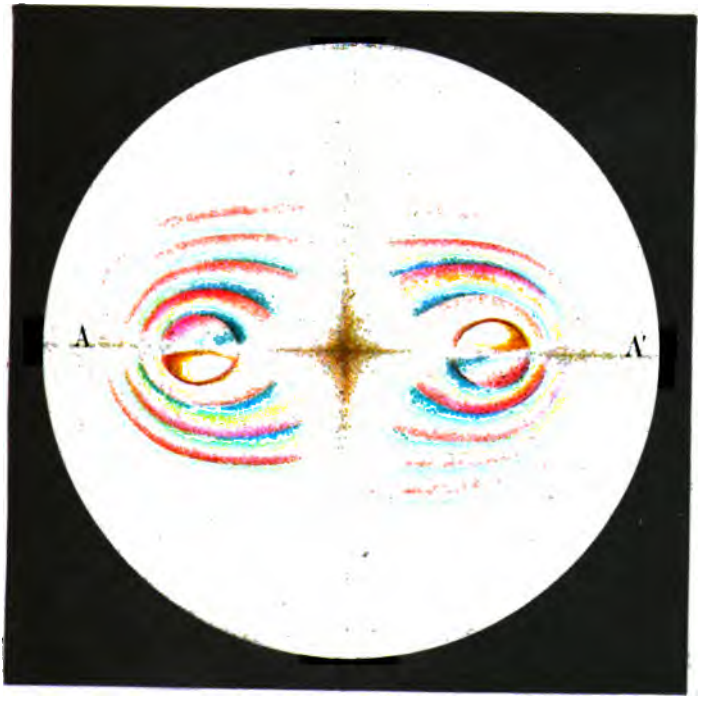


Fig. 2. **Dispersion croisée.**
Même lame que dans la figure ci-dessus, placée de manière que AA' soit parallèle à l'[illegible]

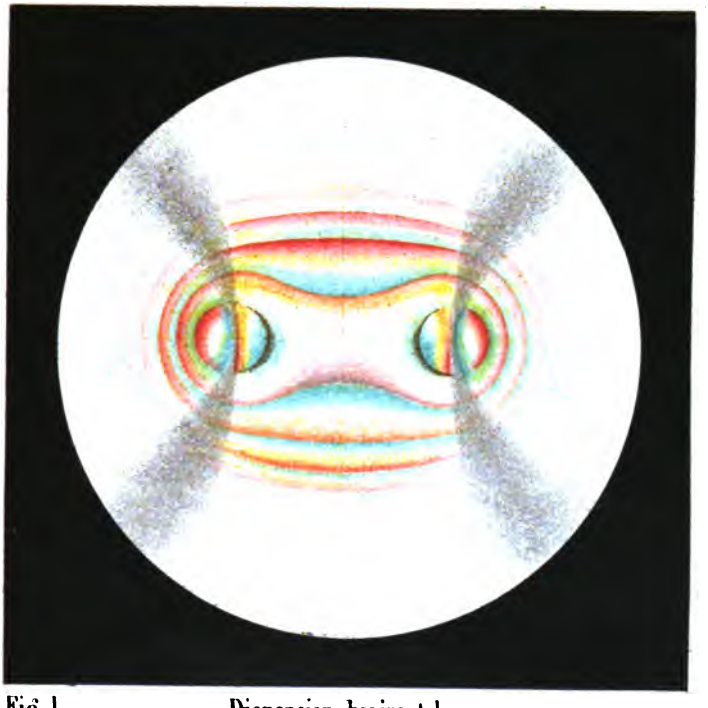


Fig. 1. **Dispersion horizontale**,
Lame taillée perpendiculairement à la bissectrice aiguë, placée à 45° de la vibration du polariseur.

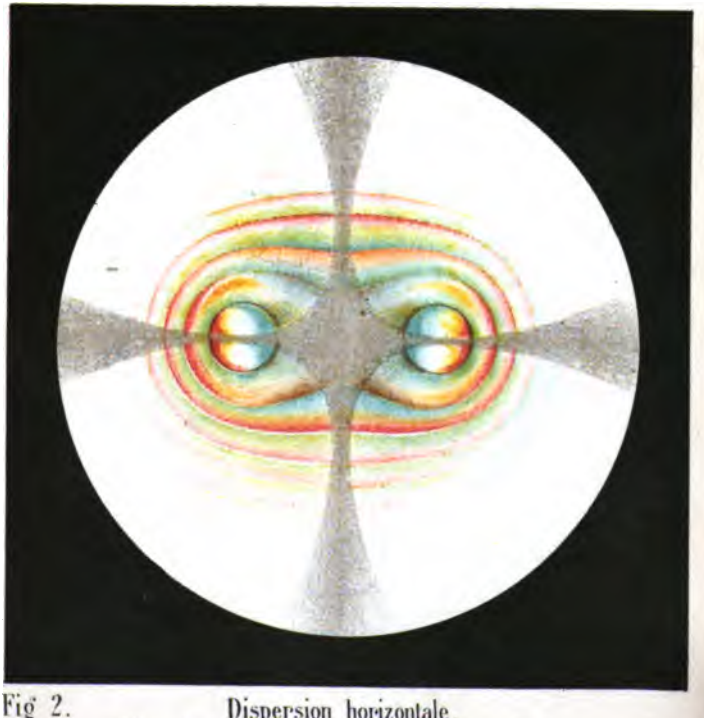


Fig 2. **Dispersion horizontale**,
Même lame que dans la figure ci-dessus, placée parallelement à l'une des vibrations du polariseur ou de l'analyseur.

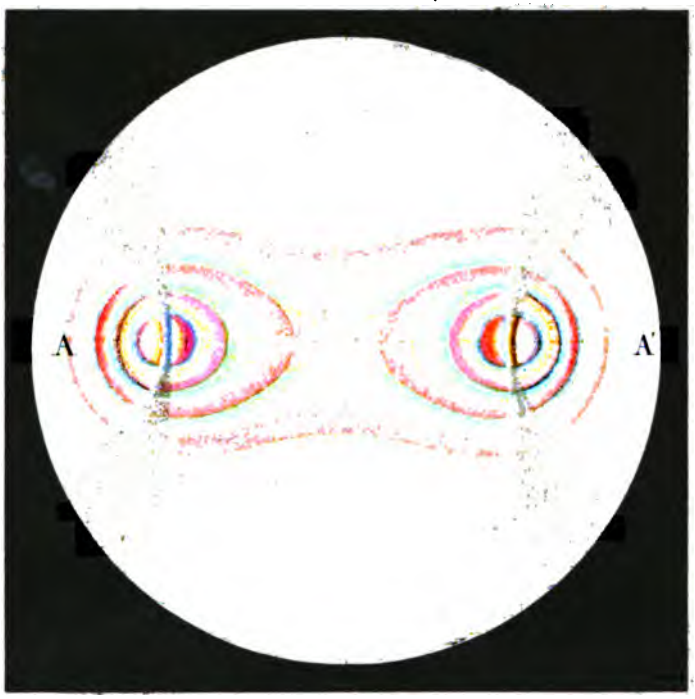


Fig.1.Cristal rhombique, taillé perpendiculairement à la bissectrice aigue, entre deux nicols croisés, le plan des axes A A' etant à 45° de la vibration du polariseur.
Dispersion : $\varphi < v$.

Fig. 2. Même lame que dans la figure ci-dessus, placée de manière que AA' soit parallèle à l'une des vibrations

Fig. 1. **Dispersion inclinée.**
Lame taillée perpendiculairement à la bissectrice aiguë,
placée de manière que AA' soit à 45° de la vibration du polariseur

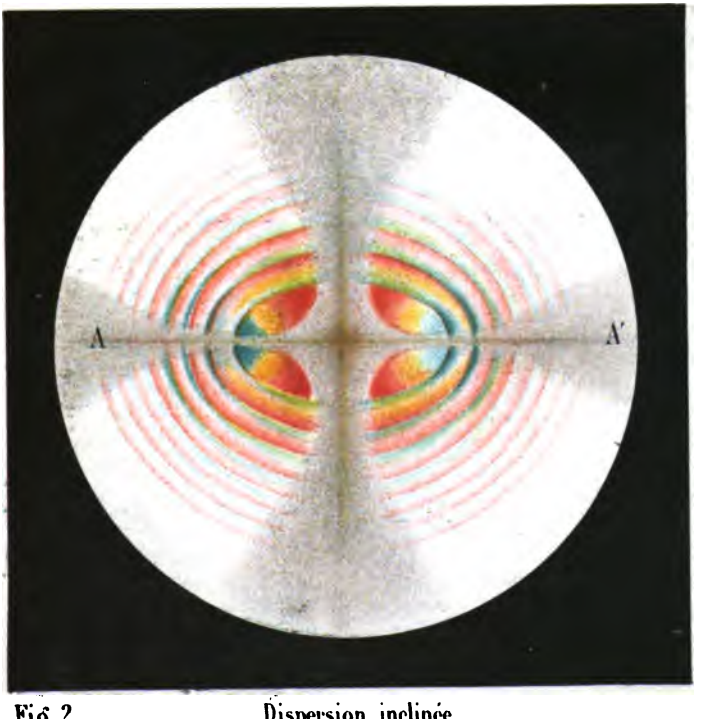


Fig. 2. **Dispersion inclinée.**
Même lame que dans la figure ci-dessus,
placée de manière que AA' soit parallèle à l'une des vibrations

Fig. 1. Cristal biaxe, taillé perpendiculairement à un axe optique, vu entre deux nicols croisés, la ligne des pôles AA' étant parallèle à l'une des vibrations du polariseur ou de l'analyseur

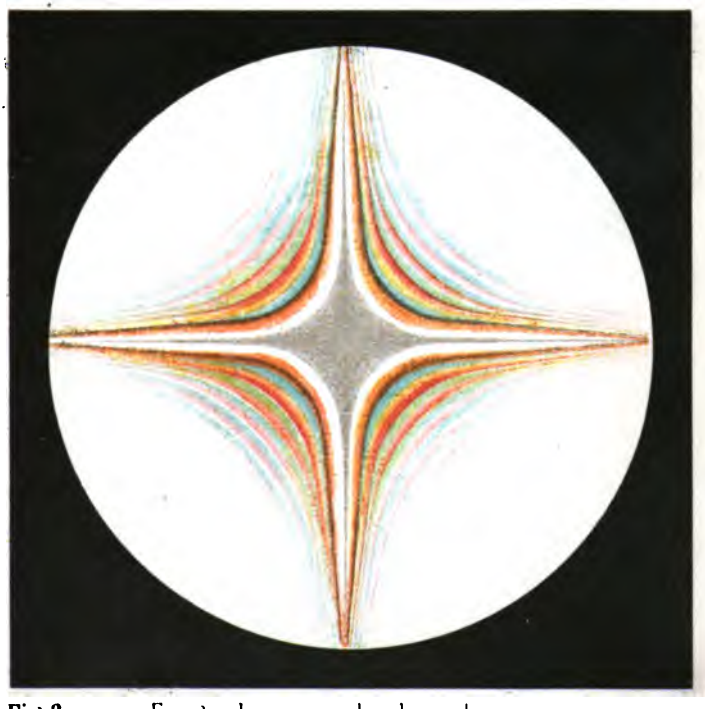


Fig. 2. Franges données par deux lames de quarz taillées parallèlement à l'axe, croisées à angle droit et placées entre deux nicols croisés.

Lame de quarz taillée perpendiculairement à l'axe,
et vue entre deux nicols à angle droit.

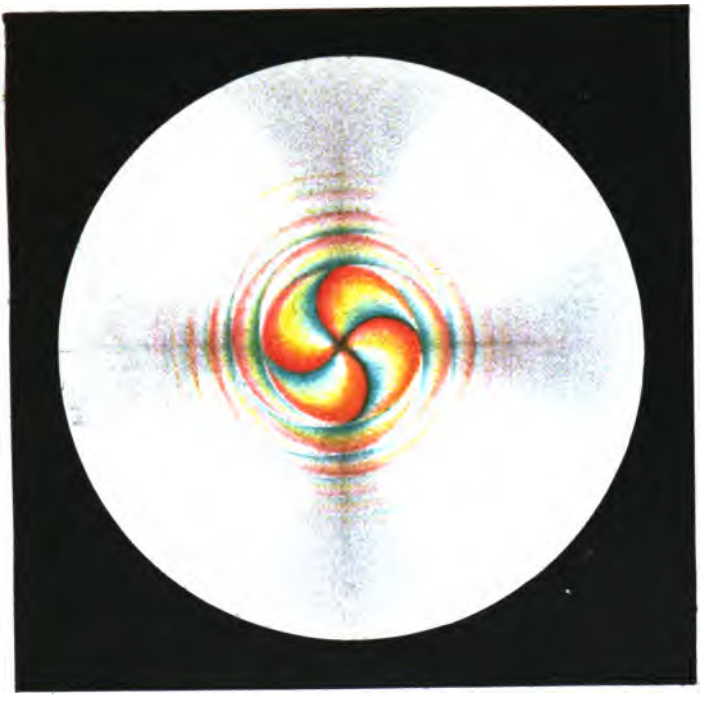


Fig. 1. Deux lames de quarz superposées, d'égale épaisseur et de rotation inverse la lame dextrogyre étant au-dessous

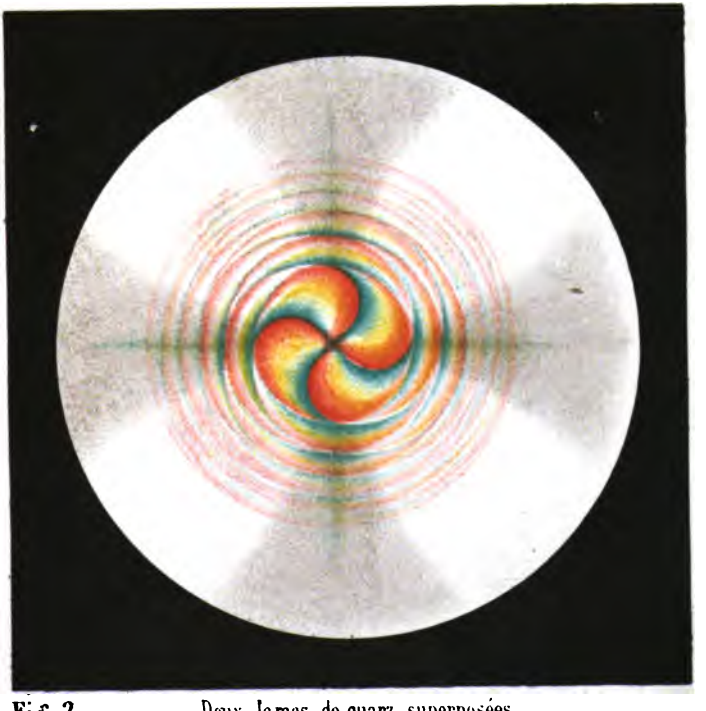


Fig. 2. Deux lames de quarz superposées, d'égale épaisseur et de rotation inverse la lame lévogyre étant au-dessous.

3 2044 103 125 639